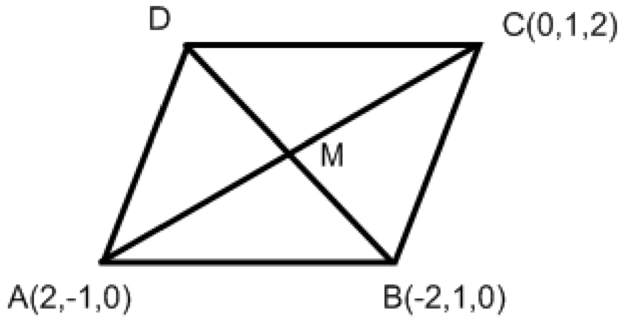
PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2012

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

De un paralelogramo *ABCD* conocemos tres vértices consecutivos: $A(2,-1,0)$, $B(-2,1,0)$ y $C(0,1,2)$.
a) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que lo contiene.
b) Halla el área de dicho paralelogramo.
c) Calcula el vértice D.
MATEMÁTICAS II. 2012. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N



a) Calculamos las coordenadas del centro del paralelogramo: $M=\dfrac{A+C}{2}=(1,0,1)$. Calculamos el vector normal al plano:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{BA}=(4,-2,0)\\ \vec{BC}=(2,0,2)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -2 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{vmatrix}=(-4,-8,4)$$

Luego, la recta que nos piden tiene de ecuación: $\dfrac{x-1}{-4}=\dfrac{y}{-8}=\dfrac{z-1}{4}$

b) El área del paralelogramo es:

$$Área = módulo\ \left|\vec{BA}\wedge\vec{BC}\right| = \sqrt{(-4)^2+(-8)^2+(4)^2}=\sqrt{96}\ u^2$$

c) Calculamos las coordenadas del vértice D

$$M=\frac{D+B}{2}\Rightarrow (1,0,1)=\frac{(a,b,c)+(-2,1,0)}{2}\Rightarrow D=(4,-1,2)$$

Sean *r* y *s* las rectas dadas por: $r \equiv \begin{cases} x+y-z=6 \\ x+z=3 \end{cases}$ **y** $s \equiv \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+1}{6} = \dfrac{z}{2}$

a) Determina el punto de intersección de ambas rectas.
b) Calcula la ecuación general del plano que las contiene.
MATEMÁTICAS II. 2012. JUNIO. EJERCICIO 4.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos un punto y vector director de cada recta.

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=6 \\ x+z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3-t \\ y=3+2t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow A(3,3,0)\ ;\ \vec{u}(-1,2,1)$$

$$s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{2} \Rightarrow B=(1,-1,0)\ ;\ \vec{v}=(-1,6,2)$$

a) Para determinar el punto de corte de las dos rectas resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de las rectas.

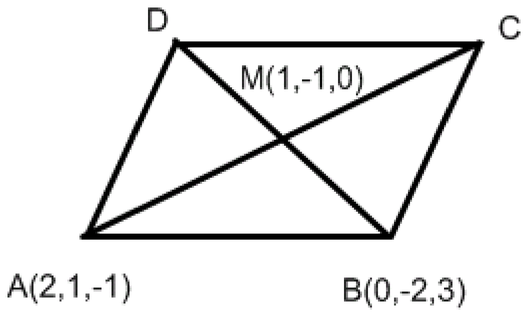
$$\frac{3-t-1}{-1} = \frac{3+2t+1}{6} = \frac{t}{2} \Rightarrow t=4 \Rightarrow \text{ el punto de corte es: } (-1,11,4)$$

b) El plano viene definido por el punto *A* y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, luego, su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x-3 & -1 & -1 \\ y-3 & 2 & 6 \\ z & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x+y-4z+3=0$$

El punto $M(1,-1,0)$ es el centro de un paralelogramo y $A(2,1,-1)$ y $B(0,-2,3)$ son dos vértices consecutivos del mismo.
a) Halla la ecuación general del plano que contiene al paralelogramo.
b) Determina uno de los otros dos vértices y calcula el área de dicho paralelogramo.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N



a) Con el punto M y los vectores $\vec{MA}=(1,2,-1)$ y $\vec{MB}=(-1,-1,3)$ calculamos la ecuación del plano:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y+1 & 2 & -1 \\ z & -1 & 3 \end{vmatrix} = 5x-2y+z-7=0$$

b) Calculamos las coordenadas del vértice C

$$M=\frac{A+C}{2} \Rightarrow (1,-1,0)=\frac{(2,1,-1)+(a,b,c)}{2} \Rightarrow C=(0,-3,1)$$

Calculamos los vectores $\vec{AB}=(-2,-3,4)$ y $\vec{AC}=(-2,-4,2)$ y el área del paralelogramo es:

$$\vec{AB}\wedge\vec{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -3 & 4 \\ -2 & -4 & 2 \end{vmatrix}=(10,-4,2)$$

$$\acute{A}rea = m\acute{o}dulo\ \left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(10)^2+(-4)^2+(2)^2}=\sqrt{120}\ u^2$$

Calcula de manera razonada la distancia del eje OX a la recta *r* de ecuaciones $\begin{cases} 2x-3y=4 \\ 2x-3y-z=0 \end{cases}$

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos un punto y el vector director de cada recta:

$$Eje\ OX \equiv \begin{cases} A=(0,0,0) \\ \vec{u}=(1,0,0) \end{cases} \quad ; \quad r \equiv \begin{cases} 2x=4+3y \\ 2x-z=3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2+\frac{3}{2}y \\ y=y \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=(2,0,4) \\ \vec{u}=\left(\frac{3}{2},1,0\right) \end{cases}$$

Aplicamos la fórmula que nos da la distancia entre dos rectas:

$$d(r,s)=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})\right|}{\left|\vec{u}\wedge\vec{v}\right|}=\left|\frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \end{vmatrix}}{módulo\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \end{vmatrix}}\right|=\frac{4}{\sqrt{1}}=4\ u$$

Dadas las rectas $r \equiv \dfrac{x+3}{-6} = \dfrac{y-9}{4} = \dfrac{z-8}{4}$ **y** $s \equiv \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-9}{-2} = \dfrac{z-8}{-2}$

a) Determina la posición relativa de las recta *r* y *s*.
b) Calcula la distancia entre *r* y *s*.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Los vectores de la rectas son paralelos, luego las rectas son paralelas.

b) Calculamos el plano perpendicular a s: $3x-2y-2z+D=0$, y queremos que pase por el punto $A=(-3,9,8)$ de la recta r.

$$3x-2y-2z+D=0 \Rightarrow 3\cdot(-3)-2\cdot(9)-2\cdot(8)+D=0 \Rightarrow D=43$$

Luego, el plano es: $3x-2y-2z+43=0$.

Calculamos el punto de corte de la recta s con el plano:

$$s \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y-9}{-2} = \frac{z-8}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x=3+3t \\ y=9-2t \\ z=8-2t \end{cases}$$

$$3x-2y-2z+43=0 \Rightarrow 3\cdot(3+3t)-2\cdot(9-2t)-2\cdot(8-2t)+43=0 \Rightarrow t=-\frac{18}{17}$$

Luego, el punto de corte es: $M=\left(3-3\frac{18}{17}, 9+2\frac{18}{17}, 8+2\frac{18}{17}\right)=\left(-\frac{3}{17}, \frac{189}{17}, \frac{172}{17}\right)$

La distancia entre las dos rectas viene dada por el módulo del vector $\vec{AM}=\left(\frac{48}{17}, \frac{36}{17}, \frac{36}{17}\right)$

Cualquier punto C tendrá de coordenadas. Calculamos el módulo del vector y lo igualamos a 3.

$$\left|\vec{AM}\right| = \sqrt{\left(\frac{48}{17}\right)^2+\left(\frac{36}{17}\right)^2+\left(\frac{36}{17}\right)^2} = \sqrt{\frac{4896}{289}} = \sqrt{\frac{288}{17}}\ u$$

Los puntos $A(1,1,5)$ y $B(1,1,2)$ son vértices consecutivos de un rectángulo *ABCD*. El vértice *C*, consecutivo a *B*, está en la recta $x=\frac{y-6}{-2}=\frac{z+1}{2}$. Determina los vértices *C* y *D*.

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta a paramétricas: $x=\frac{y-6}{-2}=\frac{z+1}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=t\\y=6-2t\\z=-1+2t\end{cases}$, luego, el vértice C tiene de coordenadas $C(t,6-2t,-1+2t)$.

Los vectores $\vec{AB}(0,0,-3)$ y $\vec{BC}(1-t,-5+2t,3-2t)$ tienen que ser perpendiculares, luego, su producto escalar vale 0.

$$\vec{AB}\cdot\vec{BC}=(0,0,-3)\cdot(1-t,-5+2t,3-2t)=-9+6t=0\Rightarrow t=\frac{3}{2}$$

El vértice *C* tiene de coordenadas: $C(t,6-2t,-1+2t)=\left(\frac{3}{2},3,2\right)$

Como los vectores $\vec{AB}(0,0,-3)$ y $\vec{DC}\left(\frac{3}{2}-a,3-b,2-c\right)$ son iguales, las coordenadas del vértice D son: $D=\left(\frac{3}{2},3,5\right)$

Se consideran los vectores $\vec{u}=(k,1,1)$, $\vec{v}=(2,1,-2)$ y $\vec{w}=(1,1,k)$, donde k es un número real.
a) Determina los valores de k para los que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes.
b) Determina los valores de k para los que $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{v}-\vec{w}$ son ortogonales.
c) Para $k=-1$, determina aquellos vectores que son ortogonales a $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y tienen módulo 1.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Los vectores son linealmente dependientes si su determinante vale cero.

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k^2-1=0 \Rightarrow k=\pm 1$$

b) Calculamos los vectores $\vec{u}+\vec{v}=(2+k,2,-1)$ y $\vec{v}-\vec{w}=(1,0,-2-k)$, y como son ortogonales, su producto escalar vale cero.

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{v}-\vec{w})=(2+k,2,-1)\cdot(1,0,-2-k)=2+k+2+k=4+2k=0 \Rightarrow k=-2$$

c) El vector perpendicular a $\vec{v}$ y $\vec{w}$, es su producto vectorial.

$$\vec{v}\wedge\vec{w}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=(1,0,1)$$

y como tiene que ser unitario, lo dividimos por su módulo.

Luego el vector que nos piden es: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ o, también el $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Encuentra los puntos de la recta $r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{2-y}{2} = z-3$ cuya distancia al plano $\pi \equiv x-2y+2z=1$ vale cuatro unidades.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta a paramétricas: $\frac{x-1}{4} = \frac{2-y}{2} = z-3 \Rightarrow \begin{cases} x = 1+4t \\ y = 2-2t \\ z = 3+t \end{cases}$

Luego, cualquier punto de la recta tendrá de coordenadas: $(1+4t, 2-2t, 3+t)$

Aplicamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\frac{|(1+4t)-2(2-2t)+2(3+t)-1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{|1+4t-4+4t+6+2t-1|}{\sqrt{9}} = \frac{|10t+2|}{3} = 4 \Rightarrow |10t+2| = 12 \Rightarrow t=1 \; ; \; t = -\frac{14}{10}$$

Luego, los puntos son: si $t=1 \Rightarrow A=(5,0,4)$; $t=-\frac{14}{10} \Rightarrow B = \left(-\frac{23}{5}, \frac{24}{5}, \frac{8}{5}\right)$

Determina un punto P de la recta $r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z+4}{3}$ que equidista del origen de coordenadas y del punto $A(3,2,1)$.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta a paramétricas: $\frac{x+3}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z+4}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = -3+2t \\ y = -5+3t \\ z = -4+3t \end{cases}$

Luego, cualquier punto de la recta tiene de coordenadas $P = (-3+2t, -5+3t, -4+3t)$.
Como este punto equidista de O y de A, se cumple que: $\left|\overrightarrow{OP}\right| = \left|\overrightarrow{AP}\right|$.

$$\overrightarrow{OP} = (-3+2t, -5+3t, -4+3t) \Rightarrow \left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{(-3+2t)^2 + (-5+3t)^2 + (-4+3t)^2} = \sqrt{22t^2 - 66t + 50}$$

$$\overrightarrow{AP} = (-6+2t, -7+3t, -5+3t) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{(-6+2t)^2 + (-7+3t)^2 + (-5+3t)^2} = \sqrt{22t^2 - 96t + 110}$$

Igualando, nos queda:

$$\sqrt{22t^2 - 66t + 50} = \sqrt{22t^2 - 96t + 110} \Rightarrow 30t = 60 \Rightarrow t = 2$$

Luego, el punto que nos piden es: $P = (1,1,2)$.

Considera el punto $P(1,0,2)$ y la recta r dada por las ecuaciones $\begin{cases} 2x-y-4=0 \\ y+2z-8=0 \end{cases}$.

a) Calcula la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r.
b) Calcula el punto simétrico de P respecto de la recta r.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x=6-t \\ y=8-2t \\ z=t \end{cases}$. El vector director de la recta $(-1,-2,1)$, es el vector normal del plano, luego, los planos perpendiculares a la recta tienen de ecuación:

$$-x-2y+z+D=0$$

Como queremos que pase por el punto $(1,0,2)$.

$$-x-2y+z+D=0 \Rightarrow -1-2\cdot 0+2+D=0 \Rightarrow D=-1$$

Luego, el plano que nos piden es: $-x-2y+z-1=0$.

b) Calculamos el punto de corte de la recta con el plano:

$$-x-2y+z-1=0 \Rightarrow -(6-t)-2(8-2t)+t-1=0 \Rightarrow t=\frac{23}{6}$$

Luego, el punto de corte es: $M=\left(6-\frac{23}{6}, 8-\frac{46}{6}, \frac{23}{6}\right)=\left(\frac{13}{6}, \frac{1}{3}, \frac{23}{6}\right)$.

Si llamamos al punto simétrico $P'=(a,b,c)$, se cumple que:

$$\frac{(1,0,2)+(a,b,c)}{2}=\left(\frac{13}{6}, \frac{1}{3}, \frac{23}{6}\right) \Rightarrow P'=\left(\frac{10}{3}, \frac{2}{3}, \frac{17}{3}\right)$$

Sean los puntos $A(0,0,1), B(1,0,-1), C(0,1,-2)$ y $D(1,2,0)$.
a) Halla la ecuación del plano π determinado por los puntos *A*, *B* y *C*.
b) Demuestra que los cuatro puntos no son coplanarios.
c) Calcula la distancia del punto *D* al plano π.
MATEMÁTICAS II. 2012. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El plano viene definido por el punto *A* y los vectores $\vec{AB} = (1,0,-2)$; $\vec{AC} = (0,1,-3)$. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z-1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 2x+3y+z-1=0$$

b) Si los cuatro puntos son coplanarios, el punto D debe satisfacer la ecuación del plano que hemos calculado en el apartado anterior.

$2\cdot 1+3\cdot 2+0-1\neq 0 \Rightarrow$ No son coplanarios.

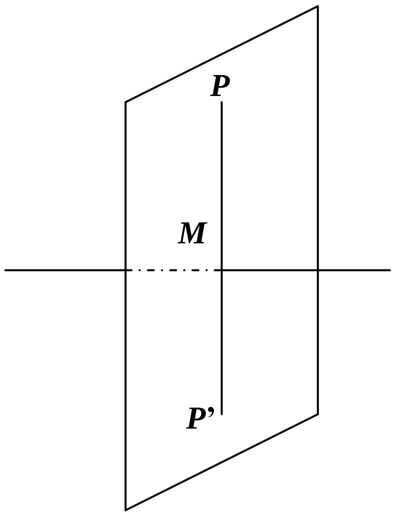
c) Calculamos la distancia

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|2\cdot 1+3\cdot 2+1\cdot 0-1|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{2}\ u$$

Halla el punto simétrico de $P(2,1,-5)$ respecto de la recta *r* definida por $\begin{cases} x-z=0 \\ x+y+2=0 \end{cases}$.

MATEMÁTICAS II. 2012. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



Calculamos la ecuación del plano que pasando por el punto *P* es perpendicular a la recta. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego:

$$\text{Vector normal del plano = vector director de la recta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1,-1,1)$$

La ecuación de todos los planos perpendiculares a dicha recta es: $x-y+z+D=0$. Como nos interesa el que pasa por el punto $P(2,1,-5)$

$$1\cdot 2-1\cdot 1+1\cdot(-5)+D=0 \Rightarrow D=4 \Rightarrow x-y+z+4=0$$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (*M*); para ello pasamos la recta a paramétricas y sustituimos la ecuación de la recta en la del plano:

$$\left.\begin{matrix} x-z=0 \\ x+y+2=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-2-t \\ z=t \end{cases}$$

$$t+2+t+t+4=0 \Rightarrow 3t=-6 \Rightarrow t=-2$$

luego las coordenadas del punto *M* son: $M\,(-2,0,-2)$

Como el punto M es el punto medio del segmento *P P'*, si llamamos (*a*, *b*, *c*) a las coordenadas del punto *P'*, se debe verificar que: $\dfrac{2+a}{2}=-2 \Rightarrow; a=-6$; $\dfrac{1+b}{2}=0 \Rightarrow b=-1$; $\dfrac{-5+c}{2}=-2 \Rightarrow; c=1$

Luego el simétrico es: $P'=(-6,-1,1)$