

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

Determina el punto simétrico del punto $A(-3,1,6)$, respecto de la recta r de ecuaciones:

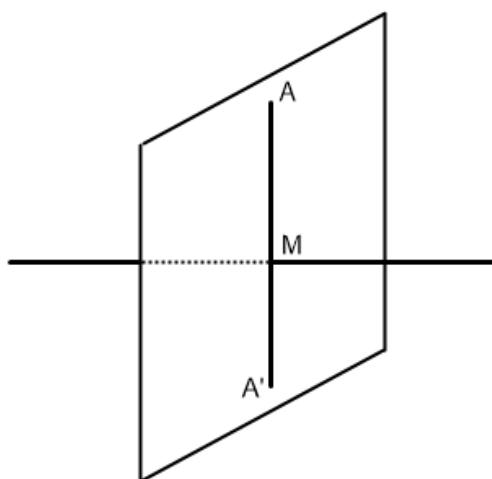
$$x-1 = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{2}.$$

MATEMÁTICAS II. 2011. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$\text{Pasamos la recta a paramétricas: } \left. \begin{aligned} x-1 &= \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{2} \Rightarrow \\ x &= 1+t \\ y &= -3+2t \\ z &= -1+2t \end{aligned} \right\}$$

El punto A' simétrico del punto A respecto de una recta está situado en un plano que pasando por el punto A es perpendicular a dicha recta y además la distancia que hay desde el punto A a la recta es la misma que la que hay desde el punto A' hasta dicha recta.



Calculamos la ecuación del plano que pasando por el punto A es perpendicular a la recta. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego: Vector normal del plano = vector director de la recta = $(1, 2, 2)$

La ecuación de todos los planos perpendiculares a dicha recta es: $x + 2y + 2z + D = 0$. Como nos interesa el que pasa por el punto $A(-3, 1, 6)$

$$-3 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 6 + D = 0 \Rightarrow D = -11 \Rightarrow x + 2y + 2z - 11 = 0$$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (M); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano: $(1+t) + 2(-3+2t) + 2(-1+2t) - 11 = 0 \Rightarrow t = 2$

luego las coordenadas del punto M son: $x = 1 + 2 = 3$; $y = -3 + 4 = 1$; $z = -1 + 4 = 3$

Como el punto M es el punto medio del segmento AA' , si llamamos (a, b, c) a las coordenadas del punto A' , se debe verificar que: $\frac{-3+a}{2} = 3$; $a = 9$; $\frac{1+b}{2} = 1$; $b = 1$; $\frac{6+c}{2} = 3$; $c = 0$

Luego, el punto simétrico es: $(9, 1, 0)$.

Considera los puntos $A = (1, 0, -1)$ y $B = (2, 1, 0)$ y la recta r dada por
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

a) Determina la ecuación del plano que es paralelo a r y pasa por A y B .

b) Determina si la recta que pasa por los puntos $P = (1, 2, 1)$ y $Q = (3, 4, 1)$ está contenida en dicho plano.

MATEMÁTICAS II. 2011. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el vector director de la recta r .

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, -1) = \vec{u}$$

El plano que nos piden viene definido por el punto A , el vector $\vec{AB} = (1, 1, 1)$ y el vector $\vec{u} = (1, -1, -1)$ y su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y & 1 & -1 \\ z+1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2y - 2z - 2 = 0 \Rightarrow y - z - 1 = 0$$

b) Si la recta que pasa por P y Q está contenida en el plano eso quiere decir que los puntos P y Q son del plano. Vemos que el punto P si verifica la ecuación del plano, pero el punto Q no la verifica, luego, la recta que pasa por P y Q no está contenida en el plano.

$$2 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow P \text{ está en el plano}$$

$$4 - 1 - 1 \neq 0 \Rightarrow Q \text{ no está en el plano}$$

Considera los puntos $A(1,0,2)$ y $B(1,2,-1)$.

a) Halla un punto C de la recta de ecuación $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z$ que verifica que el triángulo de vértices

A, B y C tiene un ángulo recto en B .

b) Calcula el área del triángulo de vértices A, B y D , donde D es el punto de corte del plano de ecuación $2x - y + 3z = 6$ con el eje OX .

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Si pasamos la recta a paramétricas, cualquier punto C tendrá de coordenadas $C = (1+3t, 2t, t)$.

Como el triángulo es rectángulo en B , los vectores $\vec{BA} = (0, -2, 3)$ y $\vec{BC} = (3t, 2t - 2, t + 1)$, tienen que ser perpendiculares, luego, su producto escalar debe valer cero.

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = (0, -2, 3) \cdot (3t, 2t - 2, t + 1) = -4t + 4 + 3t + 3 = 0 \Rightarrow t = 7$$

Luego, el punto C tiene de coordenadas $C = (1+3t, 2t, t) = (22, 14, 7)$

b) Calculamos el punto de corte del plano con el eje OX , que será: $D = (3, 0, 0)$

Calculamos los vectores $\vec{AB} = (0, 2, -3)$ y $\vec{AD} = (2, 0, -2)$.

Hacemos el producto vectorial de los vectores:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 6\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2} \text{módulo} \left(\vec{AB} \wedge \vec{AC} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2 + (-4)^2} = \frac{\sqrt{68}}{2} u^2$$

Considera los planos π_1 , π_2 y π_3 dados respectivamente por las ecuaciones:

$$3x - y + z - 4 = 0, \quad x - 2y + z - 1 = 0 \quad \text{y} \quad x + z - 4 = 0$$

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3,1,-1)$, es paralela a π_1 y corta a la recta intersección de los planos π_2 y π_3 .

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Pasamos a paramétricas la recta intersección de los planos π_2 y π_3 .

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + z - 1 = 0 \\ x + z - 4 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - t \\ y = \frac{3}{2} \\ z = t \end{cases}$$

Luego, cualquier punto A de la recta tiene de coordenadas $A(4-t, \frac{3}{2}, t)$.

La recta que nos piden pasa por P y A , y tiene que ser paralela al plano π_1 , luego el vector normal del plano $\vec{n} = (3, -1, 1)$ y el vector $\vec{PA} = (1-t, \frac{1}{2}, t+1)$ tienen que ser perpendiculares, luego, su producto escalar debe valer cero.

$$\vec{n} \cdot \vec{PA} = (3, -1, 1) \cdot (1-t, \frac{1}{2}, t+1) = 3 - 3t - \frac{1}{2} + t + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{7}{4}$$

El vector de la recta es: $\vec{PA} = (1 - \frac{7}{4}, \frac{1}{2}, \frac{7}{4} + 1) = (-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{11}{4})$.

Por lo tanto, la recta que nos piden es: $\frac{x-3}{-\frac{3}{4}} = \frac{y-1}{\frac{1}{2}} = \frac{z+1}{\frac{11}{4}}$

Dados los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,0,1)$ y $P(1,-1,1)$, y la recta r definida por $\left. \begin{array}{l} x - y - 2 = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\}$

- a) Halla los puntos de la recta r cuya distancia al punto P es de 3 unidades.
 b) Calcula el área del triángulo ABP .

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas: $\left. \begin{array}{l} x - y - 2 = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 0 \end{array} \right\}$

Cualquier punto C tendrá de coordenadas $C = (2+t, t, 0)$. Calculamos el módulo del vector $\vec{PC} = (1+t, t+1, -1)$ y lo igualamos a 3.

$$\left| \vec{PC} \right| = \sqrt{(1+t)^2 + (t+1)^2 + (-1)^2} = 3 \Rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow t = 1 ; t = -3$$

Luego, los puntos son: $C_1 = (3, 1, 0)$; $C_2 = (-1, -3, 0)$.

b) Calculamos los vectores $\vec{AB} = (-1, 0, 1)$ y $\vec{AP} = (0, -1, 1)$.

Hacemos el producto vectorial de los vectores: $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2} \text{módulo} \left(\vec{AB} \wedge \vec{AP} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} u^2$$

Dados el punto $P(1,1,-1)$, y la recta r de ecuaciones $\left. \begin{array}{l} x+z=1 \\ y+z=0 \end{array} \right\}$

a) Halla la ecuación del plano que contiene a r y pasa por P .

b) Halla la ecuación de la recta contenida en el plano de ecuación $y+z=0$, que es perpendicular a r y pasa por P .

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas: $\left. \begin{array}{l} x+z=1 \\ y+z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x=1-t \\ y=-t \\ z=t \end{array} \right\}$

La recta pasa por el punto y su vector director es $\vec{u} = (-1, -1, 1)$. El plano que nos piden viene definido por el punto $A = (1, 0, 0)$, el vector $\vec{u} = (-1, -1, 1)$ y el vector $\vec{AP} = (0, 1, -1)$, luego, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ y & -1 & 1 \\ z & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y+z=0$$

b) La recta pasa por el punto $P = (1, 1, -1)$ y su vector director es $\vec{v} = (a, b, c)$.

Como la recta es perpendicular a r , el producto escalar de $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow -a - b + c = 0$.

Además la recta está contenida en el plano $y+z=0$, entonces el producto escalar del vector normal del plano $\vec{n} = (0, 1, 1)$ y el vector $\vec{v} = (a, b, c)$, también es cero, luego: $b+c=0$.

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} -a-b+c=0 \\ b+c=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v} = (2c, -c, c)$$

Vemos que hay infinitos vectores. Si por ejemplo, damos a c el valor 1, la recta será:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$$

Sea el punto $P(2,3,-1)$, y la recta r dada por las ecuaciones
$$\left. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right\}$$

a) Halla la ecuación del plano perpendicular a r y que pasa por P .

b) Calcula la distancia del punto P a la recta r y determina el punto simétrico de P respecto de r .

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El vector normal del plano es el vector director de la recta $\vec{u} = \vec{n} = (0, -2, 1)$. Luego, todos los planos perpendiculares a r tienen de ecuación: $-2y + z + D = 0$. Nos interesa el que pasa por $P = (2, 3, -1)$, luego su ecuación será: $-2 \cdot 3 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = 7 \Rightarrow -2y + z + 7 = 0$

b) Calculamos el punto de corte de la recta con el plano. Para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano.

$$-2y + z + 7 = 0 \Rightarrow -2 \cdot (-2\lambda) + \lambda + 7 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{7}{5}$$

Luego, el punto de corte es: $M = \left(1, -2 \cdot \left(-\frac{7}{5} \right), -\frac{7}{5} \right) = \left(1, \frac{14}{5}, -\frac{7}{5} \right)$

La distancia que nos piden viene dada por el módulo del vector $\vec{PM} = \left(-1, -\frac{1}{5}, -\frac{2}{5} \right)$

$$d = \left| \vec{PM} \right| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{1}{5} \right)^2 + \left(-\frac{2}{5} \right)^2} = \sqrt{\frac{6}{5}} \text{ u}$$

M es el punto medio del segmento PP' , siendo P' el simétrico, luego:

$$M = \left(1, \frac{14}{5}, -\frac{7}{5} \right) = \left(\frac{2+a}{2}, \frac{3+b}{2}, \frac{-1+c}{2} \right) \Rightarrow a = 0; b = \frac{13}{5}; c = -\frac{9}{5}$$

Luego, el simétrico es: $P' = \left(0, \frac{13}{5}, -\frac{9}{5} \right)$

Considera los planos π_1 y π_2 dados, respectivamente, por las ecuaciones

$$(x, y, z) = (-2, 0, 7) + \lambda(1, -2, 0) + \mu(0, 1, -1) \quad \text{y} \quad 2x + y - z + 5 = 0$$

Determina los puntos de la recta r definida por $x = y + 1 = \frac{z-1}{-3}$ que equidistan de π_1 y π_2 .

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Pasamos el plano π_1 a forma general:

$$\begin{vmatrix} x+2 & 1 & 0 \\ y & -2 & 1 \\ z-7 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + y + z - 3 = 0$$

Cualquier punto de la recta tiene de coordenadas: $A = (t, -1+t, 1-3t)$.

Aplicamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\frac{|2t - 1 + t + 1 - 3t - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|2t - 1 + t - 1 + 3t + 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} \Rightarrow |-3| = |6t + 3| \Rightarrow t = 0 ; t = -1$$

Luego, los puntos son: si $t = 0 \Rightarrow A = (0, -1, 1)$; $t = -1 \Rightarrow A = (-1, -2, 4)$

Dada la recta r definida por $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = -z+3$, y la recta s definida por $\left. \begin{array}{l} x=1 \\ 2y-z=-2 \end{array} \right\}$

a) Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a r .

b) Halla la ecuación del plano que contiene a s y es paralelo a r .

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta r a implícitas: $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = -z+3 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+3z=10 \\ y+2z=5 \end{array} \right\}$

Calculamos el haz de planos, es decir la ecuación de todos los planos que contienen a r .

$$x+3z-10+k(y+2z-5)=0$$

De todos esos planos nos interesa el que pasa por el origen de coordenadas, luego, ese punto debe satisfacer la ecuación del plano.

$$x+3z-10+k(y+2z-5)=0 \Rightarrow 0+0-10+k(0+0-5)=0 \Rightarrow k=-2$$

Luego, la ecuación del plano que nos piden es: $x+3z-10-2(y+2z-5)=0 \Rightarrow x-2y-z=0$.

b) Calculamos la ecuación de todos los planos que contienen a s .

$$x-1+k(2y-z+2)=0 \Rightarrow x+2ky-kz-1+2k=0$$

Como queremos que sea paralelo a r , el vector normal del plano $\vec{n}=(1,2k,-k)$ y el vector director de la recta $\vec{u}=(3,2,-1)$, tienen que ser perpendiculares, luego, su producto escalar debe valer cero.

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = (3,2,-1) \cdot (1,2k,-k) = 3+4k+k=0 \Rightarrow k=-\frac{3}{5}$$

Por lo tanto, la ecuación del plano que nos piden es: $x+2ky-kz-1+2k=0 \Rightarrow 5x-6y+3z-11=0$

Dada la recta r definida por $\frac{x+7}{2} = \frac{y-7}{-1} = z$ y la recta s definida por $\begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \\ z = \lambda \end{cases}$.

a) Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a ambas.

b) Calcula la distancia entre r y s .

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = 7 - t \\ z = t \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \\ z = s \end{cases}$$

Cualquier punto de la recta r tendrá de coordenadas $A = (-7 + 2t, 7 - t, t)$ y cualquier punto de la recta s tendrá de coordenadas $B = (2, -5, s)$

El vector \vec{AB} tendrá de coordenadas: $\vec{AB} = (9 - 2t, -12 + t, s - t)$

Como el vector \vec{AB} tiene que ser perpendicular a la recta r y s se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{u} = 0 &\Rightarrow (9 - 2t, -12 + t, s - t) \cdot (2, -1, 1) = 0 \Rightarrow 30 - 6t + s = 0 \\ \vec{AB} \cdot \vec{v} = 0 &\Rightarrow (9 - 2t, -12 + t, s - t) \cdot (0, 0, 1) = 0 \Rightarrow s - t = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo las dos ecuaciones, obtenemos que $t = 6$; $s = 6$

Luego, los puntos A y B que están a mínima distancia tienen de coordenadas

$$A = (5, 1, 6) ; B = (2, -5, 6)$$

a) La recta que nos piden viene definida por: $A = (5, 1, 6)$ y $\vec{AB} = (-3, -6, 0)$. Su ecuación es:

$$\frac{x-5}{-3} = \frac{y-1}{-6} = \frac{z-6}{0}$$

b) La distancia es el módulo del vector $\vec{AB} = (-3, -6, 0)$

$$d = \left| \vec{AB} \right| = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + 0} = \sqrt{45} \text{ u}$$

Considera los puntos $A(-1, k, 3)$, $B(k+1, 0, 2)$, $C(1, 2, 0)$ y $D(2, 0, 1)$.

a) ¿Existe algún valor de k para el que los vectores \vec{AB} , \vec{BC} y \vec{CD} sean linealmente dependientes?.

b) Calcula los valores de k para los que los puntos A , B , C y D forman un tetraedro de volumen 1.

MATEMÁTICAS II. 2011. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los vectores: $\vec{AB} = (k+2, -k, -1)$; $\vec{BC} = (-k, 2, -2)$; $\vec{CD} = (1, -2, 1)$. Para que sean linealmente dependientes, su determinante debe valer cero, luego:

$$\begin{vmatrix} k+2 & -k & -1 \\ -k & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -k^2 - 2k - 2 = 0 \Rightarrow \text{No tiene solución real}$$

Luego, no hay ningún valor de k para el que los vectores sean linealmente dependientes.

b) Calculamos los vectores: $\vec{AB} = (k+2, -k, -1)$; $\vec{AC} = (2, 2-k, -3)$; $\vec{AD} = (3, -k, -2)$.

$$V = 1 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} k+2 & -k & -1 \\ 2 & 2-k & -3 \\ 3 & -k & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |-k^2 - 2k - 2| \Rightarrow |-k^2 - 2k - 2| = 6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -k^2 - 2k - 2 = 6 \Rightarrow \text{No} \\ -k^2 - 2k - 2 = -6 \Rightarrow k = -1 \pm \sqrt{5} \end{cases}$$

Dados el plano π de ecuación $x + 2y - z = 0$ y la recta r de ecuaciones $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + y - 4z = -13 \end{cases}$

- a) Halla el punto de intersección del plano π y la recta r .
 b) Halla el punto simétrico del punto $Q = (1, -2, 3)$ respecto del plano π .

MATEMÁTICAS II. 2011. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

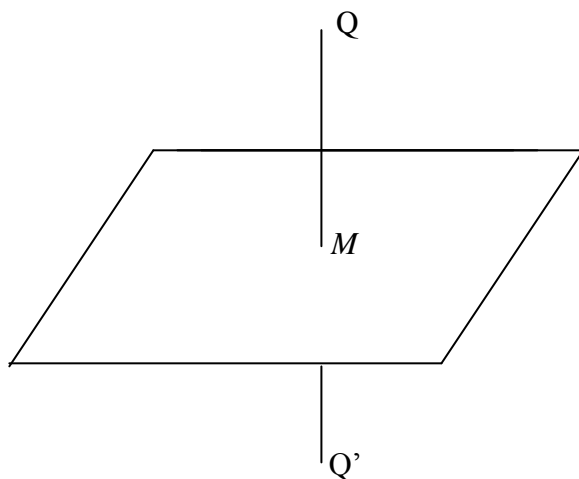
R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el punto de intersección resolviendo el sistema formado por las tres ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y - z = 0 \\ 3x - y = 5 \\ x + y - 4z = -13 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 2 ; y = 1 ; z = 4$$

Luego, el punto de intersección es $(2, 1, 4)$

b)



Calculamos la ecuación de la recta que pasando por el punto Q es perpendicular al plano. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego: Vector normal del plano = vector director de la recta = $(1, 2, -1)$.

La ecuación paramétrica de la recta será: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (M); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano: $(1+t) + 2 \cdot (-2+2t) - (3-t) = 0 \Rightarrow t = 1$

Luego, las coordenadas del punto M son: $x = 2; y = 0; z = 2$

Como el punto M es el punto medio del segmento $Q Q'$, si llamamos (a, b, c) a las coordenadas del punto Q' , se debe verificar que:

$$\frac{a+1}{2} = 2; a = 3; \frac{b-2}{2} = 0; b = 2; \frac{c+3}{2} = 2; c = 1$$

Luego, el punto simétrico es el $Q'(3, 2, 1)$