PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2008

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción B

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ **,** $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $C=\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Calcula la matriz *P* que verifica $A\cdot P-B=C^t$ **(**C^t **es la matriz traspuesta de C).**
MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 1. EJERCICIO 3.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

$$A\cdot P-B=C^t \Rightarrow A\cdot P=C^t+B \Rightarrow P=A^{-1}\cdot(C^t+B)$$

Calculamos la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t}{1}=\frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P=A^{-1}\cdot(C^t+B)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Sea I la matriz identidad de orden 3 y $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcula, si existe, el valor de k para el cual $(A - kI)^2$ es la matriz nula.
MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 3. EJERCICIO 3.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$A - kI = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}$$

$$(A-kI)^2 = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2-1 & 2k-2 & 4k-4 \\ 2k-2 & k^2-1 & 4k-4 \\ 2-2k & 2-2k & k^2-6k+5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k^2-1 & 2k-2 & 4k-4 \\ 2k-2 & k^2-1 & 4k-4 \\ 2-2k & 2-2k & k^2-6k+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow k = 1$$

Igualando cada expresión a cero tenemos tendríamos nueve ecuaciones. La única que verifica todas las expresiones es $k = 1$.

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula, si existen, la matriz inversa de A y la de B.

b) Resuelve la ecuación matricial $A\cdot X+B=A+I$, donde I denota la matriz identidad de orden 3.

MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 3. EJERCICIO 3.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t}{-1}=\frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz B no tiene inversa, ya que su determinante vale cero.

b)

$$A\cdot X+B=A+I\Rightarrow A\cdot X=A+I-B\Rightarrow X=A^{-1}\cdot(A+I-B)$$

$$X=A^{-1}\cdot(A+I-B)=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 6 & -4 & 6 \\ -3 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dada la matriz $\boldsymbol{A=\begin{pmatrix}1 & 3 & k\\ k & 1 & 3\\ 1 & 7 & k\end{pmatrix}}$

a) Estudia el rango de *A* en función de los valores del parámetro *k*.

b) Para $\boldsymbol{k=0}$**, halla la matriz inversa de *A*.**

MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 4. EJERCICIO 3.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) El rango de *A* es al menos 2, ya que el determinante $\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 7\end{vmatrix}$ es distinto de cero. Vamos a calcular el determinante de *A*.

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & k\\ k & 1 & 3\\ 1 & 7 & k\end{vmatrix}=4k^2-12=0\Rightarrow k=\pm\sqrt{3}$$

- Si $k=\pm\sqrt{3}\Rightarrow$ el rango de *A* es 2.

- Si $k\neq\pm\sqrt{3}\Rightarrow$ el rango de *A* es 3.

b) Calculamos la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & 7 & 0\end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}-21 & 3 & -1\\ 0 & 0 & -4\\ 9 & -3 & 1\end{pmatrix}^t}{-12}=\frac{\begin{pmatrix}-21 & 0 & 9\\ 3 & 0 & -3\\ -1 & -4 & 1\end{pmatrix}}{-12}=\begin{pmatrix}\frac{7}{4} & 0 & -\frac{3}{4}\\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{12}\end{pmatrix}$$