PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2007

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 1, Opción A
- Junio, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción B

Determina dos números reales positivos sabiendo que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo.
MATEMÁTICAS II. 2007. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Función que queremos que sea máximo: $P_{\max} = x^2 \cdot y^2$.

b) Relación entre las variables: $x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$P_{\max} = x^2 \cdot y^2 = x^2 \cdot (10 - x)^2 = x^2 \cdot (100 + x^2 - 20x) = x^4 - 20x^3 + 100x^2$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$P' = 4x^3 - 60x^2 + 200x = 0 \Rightarrow x = 0 \ ; \ x = 5 \ ; \ x = 10$$

e) Calculamos la segunda derivada para ver que valor corresponde al máximo.

$$P'' = 12x^2 - 120x + 200$$

$$P''(0) = 200 > 0 \Rightarrow \text{ mínimo}$$
$$P''(5) = -100 < 0 \Rightarrow \text{ Máximo}$$
$$P''(10) = 200 > 0 \Rightarrow \text{ Máximo}$$

Luego, los números son: $x = 5 \ ; \ y = 5$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=2x^3+12x^2+ax+b$. Determina a y b sabiendo que la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión es la recta $y=2x+3$.
MATEMÁTICAS II. 2007. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Calculamos el punto de inflexión.

$f'(x)=6x^2+24x+a$
$f''(x)=12x+24=0\Rightarrow x=-2$

Como la recta tangente pasa por el punto de inflexión $\Rightarrow y=2\cdot(-2)+3=-1$. Luego el punto de inflexión tiene de coordenadas: $P.I.(-2,-1)$.

- $f'(-2)=2\Rightarrow 24-48+a=2\Rightarrow a=26$

- La función pasa por $(-2,-1)\Rightarrow f(-2)=-1\Rightarrow -16+48-2a+b=-1\Rightarrow -2a+b=-33\Rightarrow b=19$

Sea $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^2\,Ln(x)$ (*Ln* denota la función logaritmo neperiano).
a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de *f* (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).
b) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=\sqrt{e}$.
MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 1. EJERCICIO 1.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x)=2x\,Ln\,x+\frac{x^2}{x}=x\cdot(2Ln\,x+1)=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=e^{-\frac{1}{2}}$$

	$\left(0,e^{-\frac{1}{2}}\right)$	$\left(e^{-\frac{1}{2}},\infty\right)$
Signo y'	$-$	+
Función	D	C

$\downarrow$

m $\left(e^{-\frac{1}{2}},-\frac{1}{2e}\right)$

b) La ecuación de la recta tangente en $x=\sqrt{e}$ es: $y-f\left(\sqrt{e}\right)=f'\left(\sqrt{e}\right)\cdot\left(x-\sqrt{e}\right)$

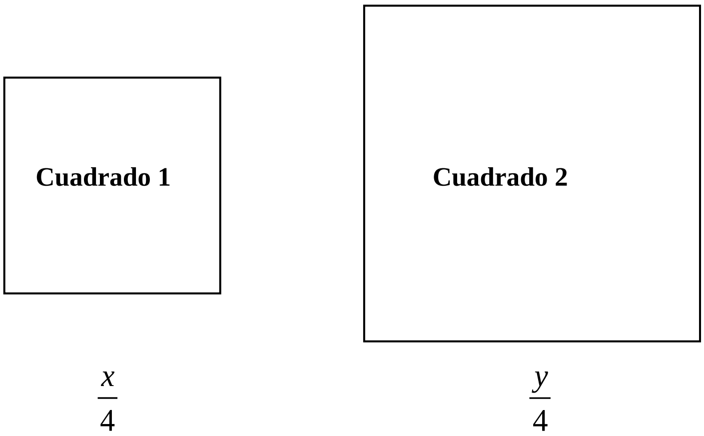
- $f\left(\sqrt{e}\right)=\frac{e}{2}$

- $f'\left(\sqrt{e}\right)=2\sqrt{e}$

Luego, la recta tangente es: $y-\frac{e}{2}=2\sqrt{e}\cdot\left(x-\sqrt{e}\right)$

Tenemos que fabricar dos chapas cuadradas con dos materiales distintos. El precio de cada uno de estos materiales es 2 y 3 euros por centímetro cuadrado, respectivamente. Por otra parte, la suma de los perímetros de los dos cuadrados tiene que ser 1 metro. ¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo?
MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 1. EJERCICIO 1.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



Cuadrado 1: Lado $\frac{x}{4}$; perímetro x ; área = $\left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}$

Cuadrado 2: Lado $\frac{y}{4}$; perímetro y ; área = $\left(\frac{y}{4}\right)^2 = \frac{y^2}{16}$

a) Función que queremos que sea máximo es: $A = 2\cdot\frac{x^2}{16} + 3\cdot\frac{y^2}{16}$

b) Relación entre las variables: $x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - x$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$A = 2\cdot\frac{x^2}{16} + 3\cdot\frac{y^2}{16} = \frac{2x^2 + 3(100-x)^2}{16} = \frac{5x^2 - 600x + 30000}{16}$$

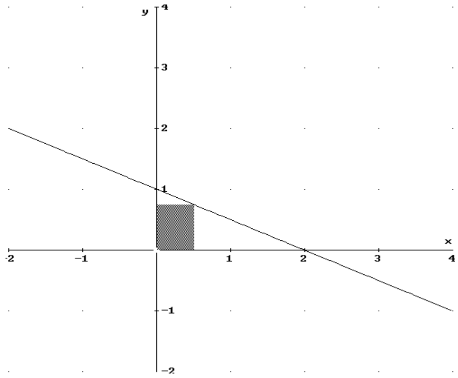
d) Derivamos e igualamos a cero

$$A' = \frac{10x - 600}{16} = 0 \Rightarrow x = 60$$

Los lados de los cuadrados son:

$$\text{cuadrado 1} = \frac{x}{4} = \frac{60}{4} = 15\ cm\ ;\ \text{cuadrado 2} = \frac{y}{4} = \frac{40}{4} = 10\ cm$$

De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos de sus lados sobre los ejes coordenados y un vértice en la recta *r* de ecuación $\frac{x}{2}+y=1$ (ver figura), determina el que tiene mayor área.



MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 2. EJERCICIO 1.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Función que queremos que sea máximo es: $A=x\cdot y$

b) Relación entre las variables: $\frac{x}{2}+y=1\Rightarrow y=\frac{2-x}{2}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$A=x\cdot\frac{2-x}{2}=\frac{2x-x^2}{2}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$A'=\frac{2-2x}{2}=0\Rightarrow x=1$$

Las dimensiones del rectángulo son: $x=1$; $y=\frac{1}{2}$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^2\cdot e^{-x}$.
a) Determina los extremos relativos de *f* (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).
b) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=e^{-x}(2x-x^2)=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=2$$

	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
Signo f'	–	+	–
Función	D	C	D

$\downarrow$ $\downarrow$

mínimo (0,0) Máximo $\left(2,\dfrac{4}{e^2}\right)$

b) El dominio de la función *f(x)* es R.

Asíntotas Verticales: No tiene

Asíntotas Horizontales: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=\frac{2}{\infty}=0\Rightarrow y=0$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty\Rightarrow \text{No tiene}$$

Luego, y = 0 es una asíntota horizontal cuando $x\to+\infty$

Al tener asíntota horizontal, no tiene asíntota oblicua.

Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=(x-3)\cdot e^{x}$.
a) Calcula los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).
b) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión.
MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x)=e^{x}+(x-3)e^{x}=e^{x}(x-2)=0\Rightarrow x=2$$

	$(-\infty,2)$	$(2,\infty)$
Signo f'	–	+
Función	D	C

$\downarrow$

mínimo $\left(2,-e^{2}\right)$

b) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero.

$$f''(x)=e^{x}(x-2)+e^{x}=e^{x}(x-1)=0\Rightarrow x=1$$

La ecuación de la recta tangente en $x=1$ es: $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$

- $f(1)=-2e$
- $f'(1)=-e$

Luego, la recta tangente es: $y+2e=-e\cdot(x-1)$

Sea f la función definida, para $x \neq 2$ y $x \neq -2$, por $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2-4}$

a) Determina las asíntotas de la gráfica de *f*.

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de *f* (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

c) Esboza la gráfica de *f*.

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) El dominio de la función *f(x)* es $\mathbb{R} - \{2, -2\}$.

Asíntotas Verticales: $x = 2$ y $x = -2$.

Asíntotas Horizontales: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2x} = 1 \Rightarrow y = 1$

Al tener asíntota horizontal, no tiene asíntota oblicua.

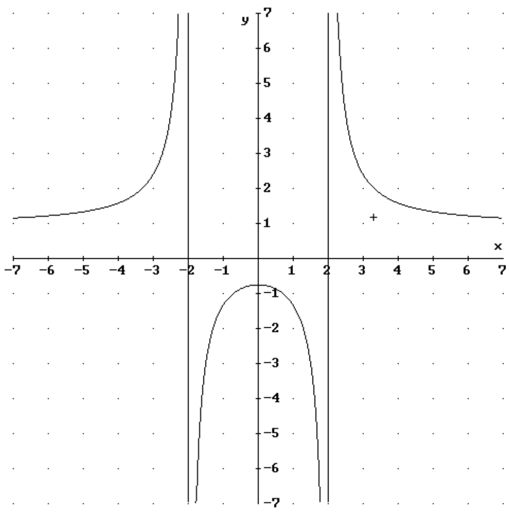
b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-4) - 2x(x^2+3)}{(x^2-4)^2} = \frac{-14x}{(x^2-4)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
Signo f'	+	+	–	–
Función	C	C	D	D

$\downarrow$

Máximo $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$



Determina la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x)=x^2-1$ y que la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=0$ es la recta $y=1$.
MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

La función que nos piden tendrá de ecuación: $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$. Calculamos la primera y segunda derivada y vamos aplicando las condiciones del problema.

$f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$

$f''(x)=12ax^2+6bx+2c=x^2-1\Rightarrow a=\dfrac{1}{12}\ ;\ b=0\ ;\ c=-\dfrac{1}{2}$

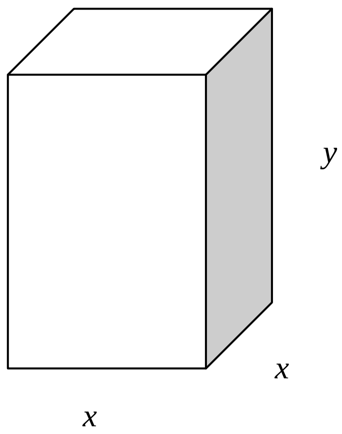
La ecuación de la tangente en $x=0$, será: $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)$

$$y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)\Rightarrow y-e=d(x-0)=1\Rightarrow e=1\ ;\ d=0$$

Luego, la función que nos piden tiene de ecuación: $f(x)=\dfrac{1}{12}x^4-\dfrac{1}{2}x^2+1$

Se quiere construir un depósito en forma de prisma de base cuadrada sin tapadera que tenga una capacidad de 500 m^3. ¿Qué dimensiones ha de tener el depósito para que su superficie sea mínima?.
MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máximo es: $S = x^2 + 4xy$

b) Relación entre las variables: $x^2 \cdot y = 500 \Rightarrow y = \dfrac{500}{x^2}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$S = x^2 + 4xy = x^2 + 4x\frac{500}{x^2} = x^2 + \frac{2000}{x} = \frac{x^3 + 2000}{x}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S' = \frac{3x^2 \cdot x - 1 \cdot (x^3 + 2000)}{x^2} = \frac{2x^3 - 2000}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1000} = 10$$

Las dimensiones del depósito son: $x = 10\ m$; $y = 5\ m$

Sea $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\dfrac{3x+1}{\sqrt{x}}$

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de *f* (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) Calcula el punto de inflexión de la gráfica de *f*.

MATEMÁTICAS II. 2007. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x)=\frac{3x-1}{2x\sqrt{x}}=0\Rightarrow x=\frac{1}{3}$$

	$\left(0,\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{3},\infty\right)$
Signo y'	$-$	+
Función	D	C

$\downarrow$

m $\left(\frac{1}{3},2\sqrt{3}\right)$

b) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero:

$$f''(x)=\frac{-3x+3}{4x^2\sqrt{x}}=0\Rightarrow x=1$$

	$(0,1)$	$(1,\infty)$
Signo y''	+	$-$
Función	Cx	Cn

$\downarrow$

P.I. $(1,4)$

Determina una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sabiendo que su derivada viene dada por $f'(x)=x^2+x-6$ y que el valor que alcanza *f* en su punto máximo (relativo) es el triple del valor que alcanza en su punto mínimo (relativo).
MATEMÁTICAS II. 2007. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La función que nos piden será una función polinómica de tercer grado, es decir, $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c=x^2+x-6\Rightarrow a=\frac{1}{3}\ ;\ b=\frac{1}{2}\ ;\ c=-6$$

Vamos a calcular el máximo y el mínimo.

$$f'(x)=x^2+x-6=0\Rightarrow x=2\ ;\ x=-3$$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,2)$	$(2,\infty)$
Signo y'	+	–	+
Función	C	D	C
		$\downarrow$ Máximo	$\downarrow$ mínimo

Como el valor que alcanza en el máximo es el triple del que alcanza en el mínimo, tenemos que:

$$f(-3)=3\cdot f(2)\Rightarrow -27a+9b-3c+d=24a+12b+6c+3d\Rightarrow -51a-3b+9c=2d\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -51\cdot\frac{1}{3}-3\cdot\frac{1}{2}-9\cdot(-6)=2d\Rightarrow\frac{71}{2}=2d\Rightarrow d=\frac{71}{4}$$

Luego, la función que nos pedían es: $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x+\frac{71}{4}$