PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2005

MATEMÁTICAS II

TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Junio, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción A

Considera el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x+y+z=-2} \\ \boldsymbol{-\lambda x+3y+z=-7} \\ \boldsymbol{x+2y+(\lambda+2)z=-5} \end{array}\right\}$

a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro $\boldsymbol{\lambda}$.
b) Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.
MATEMÁTICAS II. 2005. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\lambda & 3 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda^2+3\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda=-1; \lambda=-2$$

A continuación, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$\lambda=-1$	2	3	S. Incompatible
$\lambda=-2$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\lambda \neq -1$ y -2	3	3	S. Compatible Determinado

b) $\lambda=-2 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado. Como el rango es 2, nos tenemos que quedar con dos ecuaciones y dos incógnitas, luego el sistema a resolver será:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=-2-z \\ 2x+3y=-7-z \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1-2z \\ y=-3+z \\ z=z \end{array}\right.$$

Considera el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x+3y+z=5} \\ \boldsymbol{mx+2z=0} \\ \boldsymbol{my-z=m} \end{array}\right\}$

a) Determina los valores de *m* para los que el sistema tiene una única solución. Calcula dicha solución para *m* = 1.
b) Determina los valores de *m* para los que el sistema tiene infinitas soluciones. Calcula dichas soluciones.
c) ¿Hay algún valor de *m* para el que el sistema no tiene solución?
MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a hacer la discusión del sistema y luego iremos contestando las preguntas del problema. Para ello calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ m & 0 & 2 \\ 0 & m & -1 \end{vmatrix} = m^2 + m = 0 \Rightarrow m = -1; m = 0$$

A continuación, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(*A*)	R(*M*)	
$m=-1$	2	3	S. Incompatible
$m=0$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$m\neq -1$ y 0	3	3	S. Compatible Determinado

a) Si $m \neq -1 \ y \ 0 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado y tiene una solución. Si $m=1$, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\left.\begin{array}{r} x+3y+z=5 \\ x+2z=0 \\ y-z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=-2; y=2; z=1$$

b) Si $m=0 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones. Como el rango es 2, nos quedamos con un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas.

$$\left.\begin{array}{r} x+z=5-3y \\ 2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=5-3t; y=t; z=0$$

c) Si $m=-1 \Rightarrow$ Sistema incompatible y no tiene solución.

Considera el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{aligned}(b+1)x+y+z&=\ \ 2\\ x+(b+1)y+z&=\ \ 2\\ x+y+(b+1)z&=-4\end{aligned}\right\}$

a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro *b*.
b) Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.
MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a hacer la discusión del sistema. Para ello calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} b+1 & 1 & 1 \\ 1 & b+1 & 1 \\ 1 & 1 & b+1 \end{vmatrix} = b^3+3b^2 = 0 \Rightarrow b=-3; m=0$$

A continuación, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(*A*)	R(*M*)	
$b=0$	1	2	S. Incompatible
$b=-3$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$b\neq 0\ y\ -3$	3	3	S. Compatible Determinado

b) Si $b=-3$ $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones. Como el rango es 2, nos quedamos con un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas.

$$\left.\begin{aligned}-2x+y&=2-z\\ x-2y&=2-z\end{aligned}\right\}\Rightarrow x=t-2; y=t-2; z=t$$

Álvaro, Marta y Guillermo son tres hermanos. Álvaro dice a Marta: si te doy la quinta parte del dinero que tengo, los tres hermanos tendremos la misma cantidad. Calcula lo que tiene cada uno si entre los tres juntan 84 euros.
MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Si llamamos al dinero de Álvaro = x ; al dinero de Marta = y ; al dinero de Guillermo = z. El sistema resultante es:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=84 \\ \frac{4}{5}x=y+\frac{1}{5}x \\ z=\frac{4}{5}x \end{array}\right\}$$

Resolviendo dicho sistema, obtenemos como solución: $x=35; y=21; z=28$

Considera el sistema de ecuaciones: $$\left.\begin{aligned} x+my+\quad z&=0\\ x+\quad y+mz&=2\\ mx+\quad y+\quad z&=m\end{aligned}\right\}$$

a) ¿Para qué valor de *m* el sistema tiene al menos dos soluciones?.
b) ¿Para qué valores de *m* el sistema admite solución en la que *x* = 1?.
MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = m^3-3m+2=0 \Rightarrow m=1; m=-2$$

A continuación, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(*A*)	R(*M*)	
$m=1$	1	2	S.I.
$m=-2$	2	2	S.C.I.
$m\neq 1$ y -2	3	3	S.C.D.

Como nos dice que el sistema admite al menos dos soluciones quiere decir que es compatible indeterminado, luego $m=-2$.

b) Si $x=1$, el sistema es: $$\left.\begin{aligned} 1+my+z&=0\\ 1+y+mz&=2\\ m+y+z&=m\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} my+z&=-1\\ y+mz&=\ \ 1\\ y+z&=\ \ 0\end{aligned}\right\}$$

Calculamos el determinante $|A| = \begin{vmatrix} m & 1\\ 1 & m\end{vmatrix} = m^2-1=0 \Rightarrow m=1; m=-1$

A continuación, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(*A*)	R(*M*)	
$m=1$	1	2	S.I.
$m=-1$	2	2	S.C.D.
$m\neq 1$ y -1	2	2	S.C.D.

Luego para cualquier valor de $m\neq 1$ el sistema tiene como solución $x=1$.

Considera el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{aligned} 5x+2y-z &= 0 \\ x+y+(m+4)z &= my \\ 2x-3y+z &= 0 \end{aligned}\right\}$

a) Determina los valores del parámetro *m* para los que el sistema tiene una única solución.
b) Resuelve el sistema cuando tenga infinitas soluciones y da una solución en la que *z* = 19.
MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = 12m+84=0 \Rightarrow m=-7$$

Si $m \neq -7$, este sistema homogéneo es incompatible y solo tiene la solución trivial.

b) Si $m=-7$, el sistema homogéneo es compatible y tiene infinitas soluciones. El sistema que tenemos que resolver es:

$$\left.\begin{aligned} 5x+2y &= z \\ 2x-3y &= z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{z}{19} \\ y = \dfrac{7z}{19} \\ z = z \end{cases}$$

Si $z=19 \Rightarrow x=1; y=7$

En una excavación arqueológica se han encontrado sortijas, monedas y pendientes. Una sortija, una moneda y un pendiente pesan conjuntamente 30 gramos. Además, 4 sortijas, 3 monedas y 2 pendientes han dado un peso total de 90 gramos. El peso de un objeto deformado e irreconocible es de 18 gramos. Determina si el mencionado objeto es una sortija, una moneda o un pendiente, sabiendo que los objetos que son del mismo tipo pesan lo mismo.
MATEMÁTICAS II. 2005. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Llamamos x = al peso de una sortija
y = al peso de una moneda
z = al peso de un pendiente

Leyendo el enunciado del problema podemos plantear 3 posibles sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} x=18 \\ x+y+z=30 \\ 4x+3y+2z=90 \end{aligned}\right\} \quad ó \quad \left.\begin{aligned} y=18 \\ x+y+z=30 \\ 4x+3y+2z=90 \end{aligned}\right\} \quad ó \quad \left.\begin{aligned} z=18 \\ x+y+z=30 \\ 4x+3y+2z=90 \end{aligned}\right\}$$

De estos tres posibles sistemas, sólo será válido aquel que tenga solución única y además los tres valores sean positivos, ya que el peso no puede ser negativo.

$$\left.\begin{aligned} x=18 \\ x+y+z=30 \\ 4x+3y+2z=90 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} y+\quad z=12 \\ 3y+2z=18 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x=18;\ y=-6;\ z=18 \Rightarrow \text{Solución no válida}$$

$$\left.\begin{aligned} y=18 \\ x+y+z=30 \\ 4x+3y+2z=90 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x+\quad z=12 \\ 4x+2z=36 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x=6;\ y=18;\ z=6 \Rightarrow \text{Solución correcta, luego el objeto es}$$

una moneda

$$\left.\begin{aligned} z=18 \\ x+y+z=30 \\ 4x+3y+2z=90 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x+\quad y=12 \\ 4x+3y=54 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x=18;\ y=-6;\ z=18 \Rightarrow \text{Solución no válida}$$