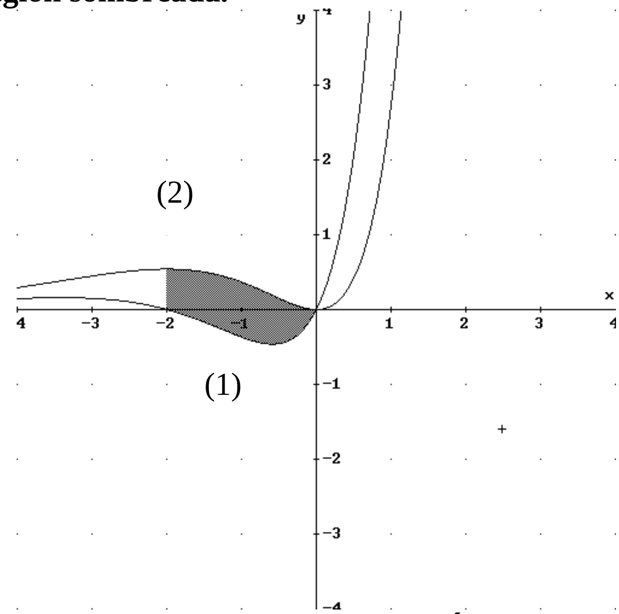
PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2005

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

Se sabe que las dos gráficas del dibujo corresponden a la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2\cdot e^x$ y a su derivada f'.
a) Indica, razonando la respuesta, cuál es la gráfica de *f* y cuál la de f'.
b) Calcula el área de la región sombreada.



MATEMÁTICAS II. 2005. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) La función $f(x)=x^2\cdot e^x$ es continua y derivable en su dominio $\mathbb{R}$. Además vemos que esta función es siempre positiva, luego su gráfica debe ser la que está por encima del eje OX.
Podríamos también calcular los puntos de corte con el eje OX de las dos funciones

$$f(x)=x^2\cdot e^x=0\Rightarrow x=0 \text{, luego sólo corta en el punto (0,0)}$$

$f'(x)=2x\cdot e^x+x^2\cdot e^x=(2x+x^2)\cdot e^x=0\Rightarrow x=0;x=-2$, luego vemos que corta en dos puntos al eje OX.

b) El área pedida es $A=\int_{-2}^{0}\left(f(x)-f'(x)\right)dx=\int_{-2}^{0}\left(x^2e^x-(x^2e^x+2xe^x\right)dx=-2\int_{-2}^{0}xe^xdx$

Vamos a calcular primero la integral indefinida por partes y luego sustituiremos:

$$\int x\cdot e^xdx=x\cdot e^x-\int e^xdx=x\cdot e^x-e^x$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=x;\ du=dx \\ dv=e^xdx;\ v=e^x \end{array}}$$

Sustituyendo, nos queda:

$$A=-2\int_{-2}^{0}xe^xdx=-2\left[x\cdot e^x-e^x\right]_{-2}^{0}=-2\left[(0-e^0)-(-2e^{-2}-e^{-2}\right]=-2(-1+3e^{-2})=2-6e^{-2}=1'18\ u^2$$

Considera la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^{-\frac{x}{2}}$.
a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=0$.
b) Calcula el área de la región acotada que está limitada por la gráfica de *f*, la recta de ecuación $x=2$ y la recta obtenida en (a).
MATEMÁTICAS II. 2005. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

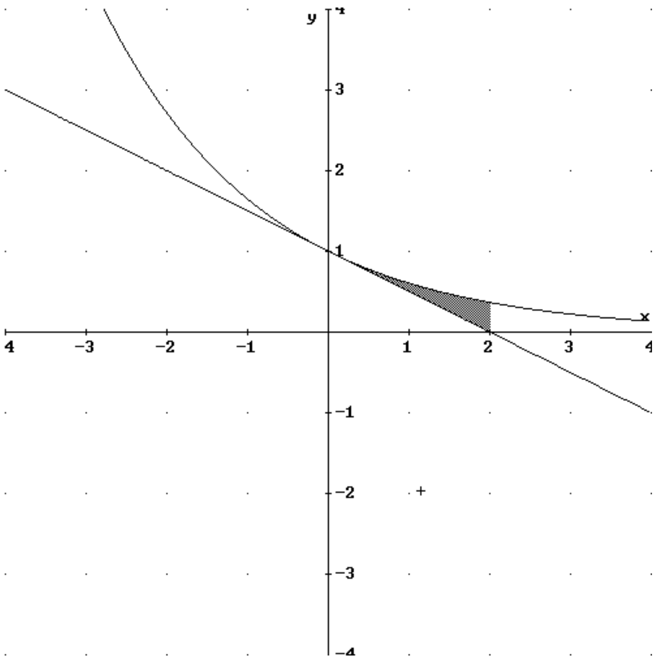
R E S O L U C I Ó N

a) La recta tangente en $x=0$ es $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)$

$$f(0)=e^0=1$$
$$f'(x)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\Rightarrow f'(0)=-\frac{1}{2}$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-1=-\frac{1}{2}\cdot(x-0)\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+1$

b) El área de la región pedida es:



$$A=\int_0^2\left(e^{-\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}x-1\right)dx=\left[-2e^{-\frac{x}{2}}+\frac{x^2}{4}-x\right]_0^2=-\frac{2}{e}+1-2+2=1-\frac{2}{e}$$

Calcula la integral $\displaystyle\int \frac{3x^3+x^2-10x+1}{x^2-x-2}dx$

MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Como el polinomio del numerador tiene mayor grado que el polinomio del denominador, lo primero que hacemos es dividir, con lo cual:

$$\int \frac{3x^3+x^2-10x+1}{x^2-x-2}dx = \int (3x+4)dx + \int \frac{9}{x^2-x-2}dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2-x-2=0 \Rightarrow x=2; x=-1$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{9}{x^2-x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores

$$x=2 \Rightarrow 9=3A \Rightarrow A=\frac{9}{3}=3$$

$$x=-1 \Rightarrow 9=-3B \Rightarrow B=\frac{9}{-3}=-3$$

Con lo cual:

$$\int \frac{3x^3+x^2-10x+1}{x^2-x-2}dx = \int (3x+4)dx + \int \frac{9}{x^2-x-2}dx = \int (3x+4)dx + \int \frac{3}{(x-2)}dx + \int \frac{-3}{(x+1)}dx =$$

$$= \frac{3x^2}{2} + 4x + 3\ln|x-2| - 3\ln|x+1| + C$$

Se sabe que la función $f:[0,+\infty] \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x)=\begin{cases} \sqrt{ax} & si \quad 0 \le x \le 8 \\ \dfrac{x^2-32}{x-4} & si \quad x>8 \end{cases}$

es continua en $[0,+\infty)$.

a) Halla el valor de *a*.

b) Calcula $\int_0^{10} f(x)\,dx$

MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 8^-} \sqrt{ax} = \sqrt{8a} \\ \lim\limits_{x\to 8^+} \dfrac{x^2-32}{x-4} = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{8a} = 8 \Rightarrow a = 8$$

b) $$\int_0^{10} f(x)\,dx = \int_0^8 \sqrt{8x}\,dx + \int_8^{10} \frac{x^2-32}{x-4}\,dx$$

$$I_1 = \int_0^8 \sqrt{8x}\,dx = \sqrt{8}\int_0^8 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \sqrt{8}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^8 = \frac{128}{3}$$

$$I_2 = \int_8^{10} \frac{x^2-32}{x-4}\,dx$$

Como el polinomio del numerador tiene mayor grado que el polinomio del denominador, lo primero que hacemos es dividir, con lo cual:

$$\int \frac{x^2-32}{x-4}\,dx = \int (x+4)dx + \int \frac{-16}{x-4}\,dx = \frac{x^2}{2} + 4x - 16\ln|x-4|$$

$$I_2 = \int_8^{10} \frac{x^2-32}{x-4}\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 4x - 16\ln|x-4|\right]_8^{10} = \left[(50+40-16\ln 6) - (32+32-16\ln 4)\right] = 26 - 16\ln\frac{3}{2}$$

Por lo tanto:

$$\int_0^{10} f(x)\,dx = \int_0^8 \sqrt{8x}\,dx + \int_8^{10} \frac{x^2-32}{x-4}\,dx = \frac{128}{3} + 26 - 16\ln\frac{3}{2} = \frac{206}{3} - 16\ln\frac{3}{2}$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por: $f(x)=\begin{cases}2x+4 & si \quad x\le 0\\ (x-2)^2 & si \quad x>0\end{cases}$

a) Calcula los puntos de corte de la gráfica de *f* con el eje de abscisas y esboza dicha gráfica.
b) Halla el área de la región acotada que está limitada por la gráfica de *f* y por el eje de abscisas.
MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El punto de corte con el eje X es $y=0\Rightarrow 2x+4=0\Rightarrow x=-2\Rightarrow(-2,0)$

$y=0\Rightarrow(x-2)^2=0\Rightarrow x=2\Rightarrow(2,0)$

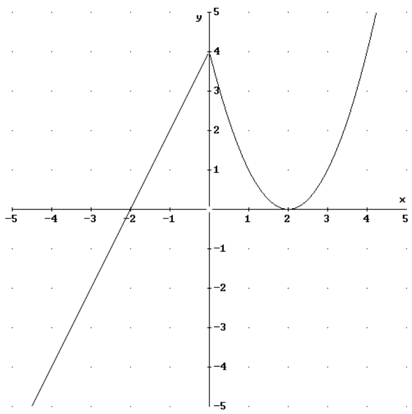
Como $f(x)=2x+4$, es una recta, hacemos una tabla de valores

x	$f(x)=2x+4$
0	4
-1	2
-2	0

Como $f(x)=(x-2)^2$, es una parábola, hacemos una tabla de valores

x	$f(x)=(x-2)^2$
0	4
1	1
2	0
3	1
4	4

Luego la gráfica será:



b) Área = $\int_{-2}^{0}(2x+4)dx+\int_{0}^{2}(x-2)^2dx=\left[x^2+4x\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_0^2=4+\frac{8}{3}=\frac{20}{3}u^2$

Calcula $\int_{-1}^{0} Ln(2+x)\,dx$, siendo Ln la función logaritmo neperiano.
MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral $I_1 = \int Ln(2+x)\,dx$, que es una integral por partes.

$$u = \ln(2+x);\ du = \frac{1}{2+x}\,dx$$
$$dv = dx;\ v = x$$

$$I_1 = \int Ln(2+x)\,dx = x \cdot Ln(2+x) - \int \frac{x}{2+x}\,dx = x \cdot Ln(2+x) - I_2$$

La integral $I_2 = \int \frac{x}{2+x}\,dx$ es una integral racional

$$I_2 = \int \frac{x}{2+x}\,dx = \int \left(1 + \frac{-2}{2+x}\right)dx = x - 2\,Ln(2+x)$$

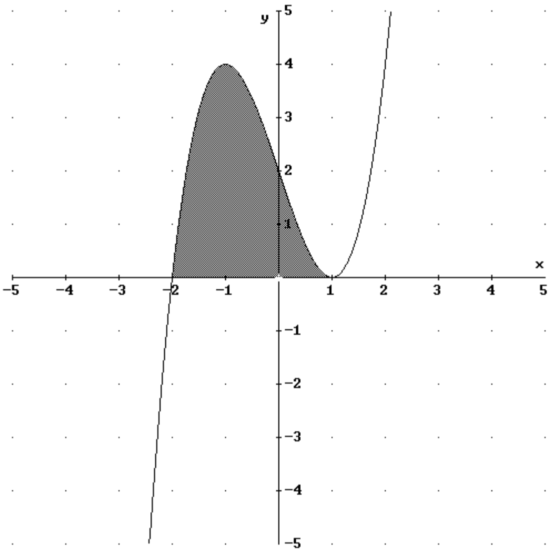
Sustituyendo en la anterior, nos queda:

$$I_1 = \int Ln(2+x)\,dx = x \cdot Ln(2+x) - \int \frac{x}{2+x}\,dx = x \cdot Ln(2+x) - x + 2\,Ln(2+x)$$

Una vez que hemos calculado la integral indefinida, ahora resolvemos la que nos proponía el problema.

$$\int_{-1}^{0} Ln(2+x)\,dx = \left[x \cdot Ln(2+x) - x + 2\,Ln(2+x)\right]_{-1}^{0} = 2 \cdot Ln\,2 - 1$$

Se sabe que la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ es la que aparece en el dibujo.
a) Determina *f*.
b) Calcula el área de la región sombreada.



MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) De la gráfica de la función $f(x)$, vemos que:

1. $f(-2)=0 \Rightarrow 4a-2b+c=8$

2. $f(1)=0 \Rightarrow a+b+c=-1$

3. mínimo en $x=1 \Rightarrow f'(1)=0 \Rightarrow 2a+b=-3$

Luego resolviendo el sistema $\left.\begin{array}{r} 4a-2b+c= \ \ 8 \\ a+b+c=-1 \\ 2a+b=-3 \end{array}\right\}$ obtenemos que $a=0; b=-3; c=2$. Por lo tanto, la función pedida es $f(x)=x^3-3x+2$

b) $A=\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1}=\frac{27}{4}\ u^2$

Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^2 sen(2x)$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0,1)$.
MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral $F(x)=\int x^2 sen(2x)\,dx$, que es una integral por partes.

$$F(x)=\int x^2 sen(2x)\,dx=-x^2\cdot\frac{\cos 2x}{2}+\int x\cdot\cos 2x\,dx=-x^2\cdot\frac{\cos 2x}{2}+\left[x\cdot\frac{sen\,2x}{2}-\int\frac{sen\,2x}{2}dx\right]=$$
$$=-x^2\cdot\frac{\cos 2x}{2}+x\cdot\frac{sen\,2x}{2}+\frac{\cos 2x}{4}+C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=x^2;\ du=2x\ dx \\ dv=sen\,2x\,dx;\ v=-\dfrac{\cos 2x}{2}\end{array}}\qquad \boxed{\begin{array}{l} u=x;\ du=dx \\ dv=\cos 2x\,dx;\ v=\dfrac{sen\,2x}{2}\end{array}}$$

$$F(x)=-x^2\cdot\frac{\cos 2x}{2}+x\cdot\frac{sen\,2x}{2}+\frac{\cos 2x}{4}+C$$

Como nos piden una primitiva que pase por $(0,1)\Rightarrow F(0)=1$, luego sustituyendo podemos calcular el valor de C.

$$1=0+0+\frac{1}{4}+C\ \Rightarrow\ C=\frac{3}{4}$$

Por lo tanto, la función primitiva que nos piden es: $F(x)=-x^2\cdot\dfrac{\cos 2x}{2}+x\cdot\dfrac{sen\,2x}{2}+\dfrac{\cos 2x}{4}+\dfrac{3}{4}$

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2-5x+4$.
a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=3$.
b) Calcula el área de la región acotada que está limitada por el eje de ordenadas, por la gráfica de *f* y por la recta tangente obtenida.
MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

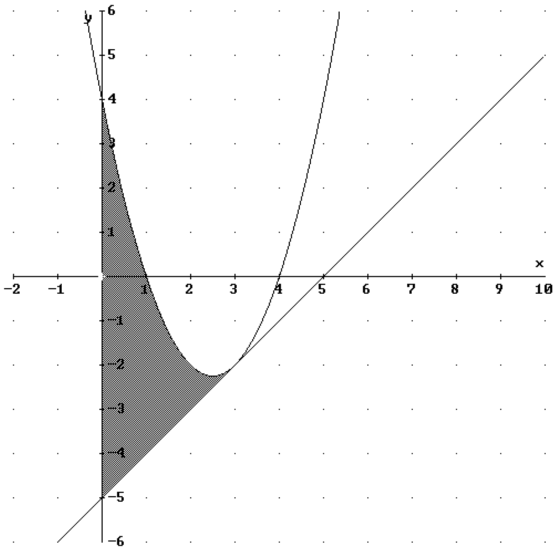
a) La ecuación de la recta tangente en $x=3$ es $y-f(3)=f'(3)\cdot(x-3)$.

Calculamos

$$f(x)=x^2-5x+4 \Rightarrow f(3)=9-15+4=-2$$
$$f'(x)=2x-5 \Rightarrow f'(3)=6-5=1$$

Luego la recta tangente es: $y-(-2)=1\cdot(x-3)\Rightarrow y=x-5$

b) Dibujamos la parábola y la recta tangente para ver con mayor claridad el área que nos piden.



$$A=\int_0^3\left[(x^2-5x+4)-(x-5)\right]\,dx=\int_0^3(x^2-6x+9)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}+9x\right]_0^3=9u^2$$

Calcula las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \cos(5x+1)\,dx$ **.**

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^3}}\,dx$ **.**

c) $\displaystyle\int_0^1 x\cdot e^{-3x}\,dx$

MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) $\displaystyle\int \cos(5x+1)\,dx = \frac{1}{5}\cdot\int 5\cdot\cos(5x+1)\,dx = \frac{1}{5}sen(5x+1)+C$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^3}}\,dx = \int (x+2)^{-\frac{3}{2}}\,dx = \frac{(x+2)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = \frac{-2}{\sqrt{x+2}}+C$

c) Vamos a calcular la integral $I=\int x\cdot e^{-3x}\,dx$, que es una integral por partes.

$$I=\int x\cdot e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{3}x\cdot e^{-3x}+\frac{1}{3}\int e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{3}x\cdot e^{-3x}-\frac{1}{9}e^{-3x}$$

$u=x;\; du=dx$

$dv=e^{-3x}dx;\; v=-\frac{1}{3}e^{-3x}$

Ahora calculamos la integral que nos pide el problema

$$I=\int_0^1 x\cdot e^{-3x}\,dx = \left[-\frac{1}{3}x\cdot e^{-3x}-\frac{1}{9}e^{-3x}\right]_0^1 = \frac{1}{9}-\frac{4}{9}e^{-3}$$

De una función $f:[0,5]\to\mathbb{R}$ se sabe que $f(3)=6$ y que su función derivada está dada por:

$$f'(x)=\begin{cases} 5x-2 & si \quad 0<x<1 \\ x^2-6x+8 & si \quad 1\le x<5 \end{cases}$$

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=3$.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f* y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).
MATEMÁTICAS II. 2005. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La recta tangente en $x=3$ es $y-f(3)=f'(3)\cdot(x-3)$

$$f(3)=6$$
$$f'(x)=x^2-6x+8\Rightarrow f'(3)=3^2-6\cdot 3+8=-1$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-6=-1\cdot(x-3)\Rightarrow y=-x+9$

b) Igualamos a cero la derivada: $y'=5x-2=0\Rightarrow x=\frac{2}{5}$

$$y'=x^2-6x+8=0\Rightarrow x=2; x=4$$

	$(0,\frac{2}{5})$	$(\frac{2}{5},1)$	(1,2)	(2,4)	(4,5)
Signo y'	–	+	+	–	+
Función	D	C	C	D	C

mínimo $\left(\frac{2}{5},\frac{133}{30}\right)$ Máximo $\left(2,\frac{20}{3}\right)$ mínimo $\left(4,\frac{16}{3}\right)$

Para poder calcular las coordenadas del máximo y de los mínimos, necesitamos calcular la función *f(x)*

$$\int(5x-2)dx=\frac{5x^2}{2}-2x+C\,;\ \int(x^2-6x+8)dx=\frac{x^3}{3}-3x^2+8x+D$$

Como $f(3)=6\Rightarrow 6=\frac{27}{3}-27+24+D\Rightarrow D=0$

Como *f(x)* es continua en el punto *x* = 1, tenemos: $\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)\Rightarrow\frac{5}{2}-2+C=\frac{1}{3}-3+8\Rightarrow C=\frac{29}{6}$

Luego: $$f(x)=\begin{cases}\frac{5x^2}{2}-2x+\frac{29}{6} & si \quad 0<x<1\\ \frac{x^3}{3}-3x^2+8x & si \quad 1\le x<5\end{cases}$$

Considera la integral definida $I = \int_{3}^{8} \frac{1}{\sqrt{1+x}-1}\,dx$ **.**

a) Exprésala aplicando el cambio de variables $\sqrt{1+x}-1=t$

b) Calcula ***I*****.**

MATEMÁTICAS II. 2005. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Como el cambio es $\sqrt{1+x}-1=t$, vamos a calcular los nuevos límites de integración.

Si $x=3 \Rightarrow \sqrt{1+3}-1=t \Rightarrow t=1$

Si $x=8 \Rightarrow \sqrt{1+8}-1=t \Rightarrow t=2$

Vamos a calcular cuanto vale *dx*:

$\sqrt{1+x}-1=t \Rightarrow \sqrt{1+x}=1+t \Rightarrow 1+x=(1+t)^2$, con lo cual $dx = 2\cdot(1+t)\cdot dt$

Sustituyendo, nos queda:

$$I = \int_{3}^{8} \frac{1}{\sqrt{1+x}-1}\,dx = \int_{1}^{2} \frac{1}{t}\cdot 2\cdot(1+t)\cdot dt = 2\int_{1}^{2} \frac{1+t}{t}\,dt = 2\int_{1}^{2} (1+\frac{1}{t})dt$$

b)

$$I = 2\cdot\int_{1}^{2} (1+\frac{1}{t})dt = 2\left[t+\ln|t|\right]_{1}^{2} = 2\cdot\left[(2+\ln 2)-(1+\ln 1)\right] = 2\left[1+\ln 2)\right] = 3'38$$