

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 1, Opción A
- Junio, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A

De la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que tiene un máximo en $x = -1$, y que su gráfica corta al eje OX en el punto de abscisa $x = -2$ y tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 0$. Calcula a , b , c y d sabiendo, además, que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene pendiente 9.
MATEMÁTICAS II. 2005. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Al ser polinómica la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ su dominio es \mathbb{R} , por lo tanto, es continua y derivable en \mathbb{R} . Calculamos su derivada primera y segunda:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c ; f''(x) = 6ax + 2b$$

$$\text{Máximo en } x = -1 \Rightarrow f'(-1) = 0 \Rightarrow 3a - 2b + c = 0$$

$$\text{Corta al eje OX en } x = -2 \Rightarrow f(-2) = 0 \Rightarrow -8a + 4b - 2c + d = 0$$

$$\text{Punto de inflexión en } x = 0 \Rightarrow f''(0) = 0 \Rightarrow 2b = 0$$

$$\text{La tangente en } x = 2 \text{ tiene de pendiente } 9 \Rightarrow f'(2) = 9 \Rightarrow 12a + 4b + c = 9$$

Resolviendo el sistema formado por las 4 ecuaciones que hemos obtenido:

$$\left. \begin{array}{l} 3a - 2b + c = 0 \\ -8a + 4b - 2c + d = 0 \\ 2b = 0 \\ 12a + 4b + c = 9 \end{array} \right\}$$

Resulta: $a = 1 ; b = 0 ; c = -3 ; d = 2$

Sea f la función definida para $x \neq 0$ por $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$.

a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f .

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtiene y los valores que alcanza la función).

c) Esboza la gráfica de f .

MATEMÁTICAS II. 2005. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) El dominio de la función $f(x)$ es $\mathbb{R} - \{0\}$

Asíntotas Verticales: La recta $x = 0$ es una asíntota vertical ya que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \pm \infty$

Asíntotas Horizontales: No tiene ya que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$

Asíntota Oblicua: La ecuación es $y = mx + n$:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2} = 1; \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 + 1}{x} - 1x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

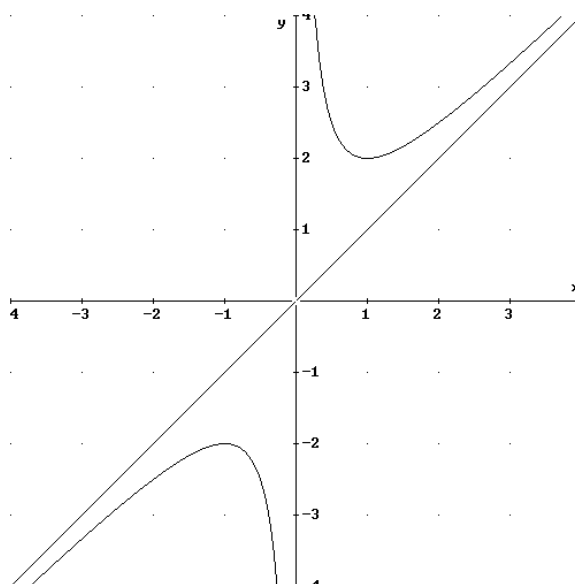
Luego es: $y = x$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $y' = \frac{x^2 - 1}{x^2}$; $y' = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
Signo y'	+	-	-	+
Función	C	D	D	C

\downarrow \downarrow \downarrow
 Máximo(-1, -2) No existe mínimo(1, 2)

c)



Sea f la función definida para $x \neq 1$ por $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$.

- Halla las asíntotas de la gráfica de f .
- Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .
- Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f .
- Esboza la gráfica de f .

MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El dominio de la función $f(x)$ es $\mathbb{R} - \{1\}$

Asíntotas Verticales: La recta $x = 1$ es una asíntota vertical ya que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \pm \infty$

Asíntotas Horizontales: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{e^\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = \infty \Rightarrow$ No tiene

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{e^{-\infty}}{\infty} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow y = 0$$

Luego, $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$.

Al tener asíntota horizontal, no tiene asíntota oblicua.

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $y' = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x = 2$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
Signo y'	-	-	+
Función	D	D	C

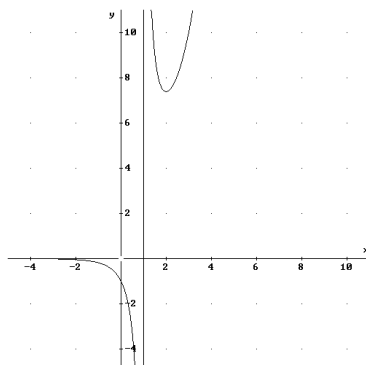
\downarrow \downarrow
 No existe mínimo $(2, e^2)$

c) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero: $y'' = \frac{e^x(x^2 - 4x + 5)}{(x-1)^3} = 0 \Rightarrow$ No

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
Signo y''	-	+
Función	Cn	Cx

\downarrow
No existe

d)



Determina los puntos de la parábola de ecuación $y = 5 - x^2$ que están más próximos al origen de coordenadas. Calcula la distancia entre los puntos obtenidos y el origen de coordenadas.
MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Cualquier punto P de la parábola tendrá de coordenadas $P = (a, 5 - a^2)$, y el origen de coordenadas es el punto $O = (0, 0)$. Queremos que sea mínima la distancia entre estos dos puntos, luego tiene que ser mínimo el módulo del vector que une esos dos puntos.

$$\vec{OP} = (a, 5 - a^2)$$

$$D_{\min} = \sqrt{a^2 + (5 - a^2)^2} = \sqrt{a^4 - 9a^2 + 25}$$

$$D'_{\min} = \frac{4a^3 - 18a}{2\sqrt{a^4 - 9a^2 + 25}} = 0 \Rightarrow x = 0; x = \frac{3}{\sqrt{2}}; x = -\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Calculamos la segunda derivada para ver que valor de los obtenidos corresponde al mínimo.

$$D'' = \frac{2a^6 - 27a^4 + 150a^2 - 225}{\sqrt{(a^4 - 9a^2 + 25)^3}}$$

$$D''(0) = -\frac{9}{5} < 0 \Rightarrow \text{Máximo}$$

$$D''\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = \frac{36\sqrt{19}}{19} > 0 \Rightarrow \text{mínimo}$$

$$D''\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = \frac{36\sqrt{19}}{19} > 0 \Rightarrow \text{mínimo}$$

Luego los puntos que están a mínima distancia son: $P_1 = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ y $P_2 = \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$

La distancia es: $\frac{\sqrt{19}}{2} u$

Se sabe que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \alpha \operatorname{sen} x}{x^2}$ es finito. Determina el valor de α y calcula el límite.

MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Como $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \alpha \operatorname{sen} x}{x^2} = \frac{0}{0}$, le aplicamos la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \alpha \operatorname{sen} x}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \alpha \cos x}{2x} = \frac{1 - \alpha}{0}$$

Como nos dicen que el límite es finito deberíamos haber obtenido $\frac{0}{0}$, con lo cual, $1 - \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 1$

Ahora, calculamos cuanto vale el límite para $\alpha = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \alpha \operatorname{sen} x}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \alpha \cos x}{2x} = \frac{1 - \alpha}{0} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

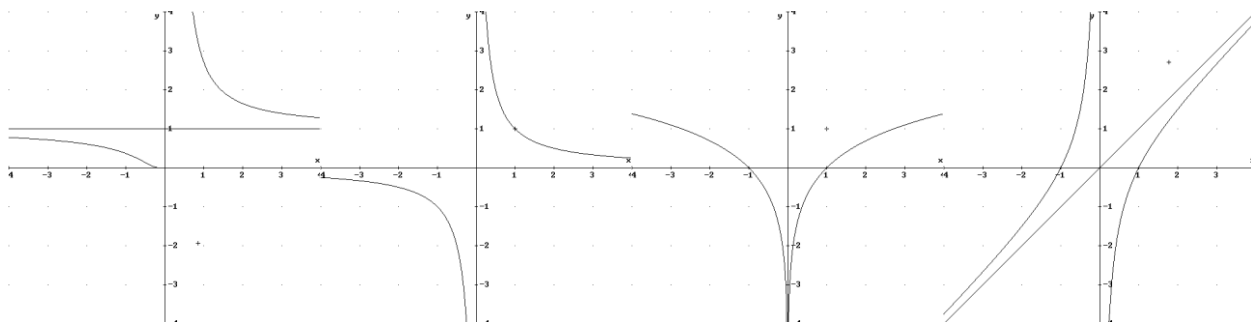
Considera las tres funciones cuyas expresiones respectivas vienen dadas, para $x \neq 0$, por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x} ; g(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad \text{y} \quad h(x) = \text{Ln} |x|$$

siendo Ln la función logaritmo neperiano.

a) Halla las ecuaciones de las asíntotas de las gráficas de f, g y h .

b) Identifica, entre las que siguen, la gráfica de cada función, justificando la respuesta.



Gráfica 1

Gráfica 2

Gráfica 3

Gráfica 4

MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

El dominio de la función $f(x)$ es $\mathbb{R} - \{0\}$

Asíntotas Verticales: La recta $x = 0$ es una asíntota vertical ya que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \pm \infty$

Asíntotas Horizontales: No tiene ya que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$

Asíntota Oblicua: La ecuación es $y = mx + n$: Luego es: $y = x$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x}{x^2} = 1 ; n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 - 1}{x} - 1x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1 + x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{x} = 0$$

Por lo tanto, su dibujo corresponde a la gráfica 4.

El dominio de la función $g(x)$ es $\mathbb{R} - \{0\}$

Asíntotas Verticales: La recta $x = 0$ es una asíntota vertical ya que $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$

Asíntotas Horizontales: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = e^0 = 1$, luego es $y = 1$

Asíntota Oblicua: No tiene, ya que tiene asíntota horizontal.

Por lo tanto, su dibujo corresponde a la gráfica 1.

El dominio de la función $h(x)$ es $\mathbb{R} - \{0\}$.

Asíntotas Verticales: La recta $x = 0$ es una asíntota vertical ya que $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -\infty$

Asíntotas Horizontales: No tiene ya que $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \infty$

Asíntota Oblicua: No tiene, ya que tiene asíntota horizontal.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln |x|}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \Rightarrow \text{No tiene}$$

Por lo tanto, su dibujo corresponde a la gráfica 3.

De la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x}$ se sabe que la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ viene dada por $y = -2$.

a) Calcula a y b .

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada de la función.

$$f'(x) = \frac{2ax \cdot x - 1 \cdot (ax^2 + b)}{x^2} = \frac{ax^2 - b}{x^2}$$

La recta tangente en $x=1$ tendrá de ecuación: $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$ y como nos dice el enunciado que esta recta es $y = -2$, se tiene que cumplir que:

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = -2 \\ f'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{a+b}{1} = -2 \\ \frac{a-b}{1} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a = -1; b = -1$$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $y' = \frac{-x^2 + 1}{x^2}$; $y' = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

Como el dominio dice que es $(0, +\infty)$, sólo tomamos el valor $x = 1$

	(0,1)	(1,∞)
Signo y'	+	-
Función	C	D

↓
Máximo (1, -2)

Sea f la función definida para $x \neq 2$ por $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}$

- a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f .
 b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .
 c) Calcula, si existen, el máximo y el mínimo absolutos de f en el intervalo $[0; 2)$ (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El dominio de la función $f(x)$ es $\mathbb{R} - \{2\}$

Asíntotas Verticales: La recta $x = 2$ es una asíntota vertical ya que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm \infty$

Asíntotas Horizontales: No tiene ya que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$

Asíntota Oblicua: La ecuación es $y = mx + n$:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x} = 1;$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2} - 1x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 3 - x^2 + 2x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x + 3}{x - 2} = -2$$

Luego es: $y = x - 2$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $y' = \frac{x^2 - 4x + 5}{(x - 2)^2}$; $y' = 0 \Rightarrow$ NO

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
Signo y'	+	+
Función	C	C

Luego la función es creciente en su dominio.

c) Los extremos absolutos se pueden alcanzar en los puntos donde la función no es continua, donde no es derivable o en los extremos del intervalo $[0, 2)$.

En nuestro caso la función $f(x)$ es continua y derivable en $x \neq 2$. Luego sólo tenemos que estudiar en el punto $x = 0$. En este punto tiene un mínimo absoluto y vale $f(0) = -\frac{3}{2}$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{5x+8}{x^2+x+1}$

a) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes coordenados.

b) Halla las asíntotas de la gráfica de f .

c) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

d) Esboza la gráfica de f .

MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Punto de corte eje X $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{5x+8}{x^2+x+1}; x = -\frac{8}{5} \Rightarrow \left(-\frac{8}{5}, 0\right)$

Punto de corte eje Y $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = \frac{8}{1}; y = 8 \Rightarrow (0, 8)$

b) El dominio de la función $f(x)$ es \mathbb{R}

Asíntotas Verticales: No tiene.

Asíntotas Horizontales: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+8}{x^2+x+1} = 0 \Rightarrow y = 0$

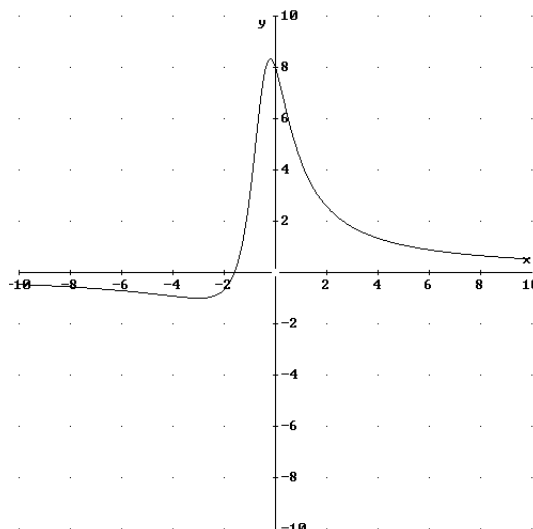
Asíntota Oblicua: No tiene ya que posee asíntota horizontal.

c) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $y' = \frac{-5x^2 - 16x - 3}{(x^2 + x + 1)^2} = 0 \Rightarrow x = -3 \quad y \quad -\frac{1}{5}$

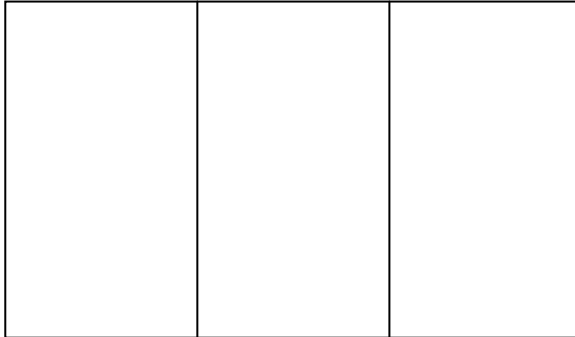
	$(-\infty, -3)$	$\left(-3, -\frac{1}{5}\right)$	$\left(-\frac{1}{5}, \infty\right)$
Signo y'	-	+	-
Función	D	C	D

\downarrow \downarrow
 Mínimo $(-3, -1)$ Máximo $\left(-\frac{1}{5}, \frac{25}{3}\right)$

d)



De un terreno se desea vender un solar rectangular de 12.800 m^2 dividido en tres parcelas iguales como las que aparecen en el dibujo. Si se quieren vallar las lindes de las tres parcelas (los bordes y las separaciones de las parcelas), determina las dimensiones del solar para que la longitud de la valla utilizada sea mínima.



MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Llamamos x a la longitud e y al ancho del solar.

Paso 1: Escribimos la función que queremos que sea mínima: $L_{\min} = 2x + 4y$

Paso 2: Escribimos la relación entre las variables: $x \cdot y = 12.800$; $y = \frac{12.800}{x}$

Paso 3: Sustituimos: $L_{\min} = 2x + 4y = 2x + 4 \cdot \frac{12.800}{x} = 2x + \frac{51.200}{x}$

Paso 4: Derivamos e igualamos a cero: $L'_{\min} = 2 - \frac{51.200}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 160$

Paso 5: Calculamos la 2ª derivada.

$$L'' = \frac{102.400}{x^3} \Rightarrow \begin{cases} L''(x=160) = 0'025 \Rightarrow \text{mínimo} \\ L''(x=-160) = -0'025 \Rightarrow \text{Máximo} \end{cases}$$

Luego las dimensiones del solar son $x = 160 \text{ m}$; $y = 80 \text{ m}$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x-1)^2 e^{-x}$

- a) Halla las asíntotas de la gráfica de f .
- b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula, si existen, sus extremos relativos o locales y sus extremos absolutos o globales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).
- c) Esboza la gráfica de f .

MATEMÁTICAS II. 2005. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) La función $f(x) = \frac{(x-1)^2}{e^x}$, no tiene asíntota vertical ya que no hay ningún valor de x que anule el denominador.

Vamos a ver si tiene asíntota horizontal

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(x-1)}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

Por lo tanto, la asíntota horizontal es $y = 0$.

Como tiene asíntota horizontal, no puede tener asíntota oblicua.

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $y' = \frac{2(x-1)e^x - (x-1)^2 e^x}{(e^x)^2} = \frac{-x^2 + 4x - 3}{e^x}$

$$y' = 0 \Rightarrow x = 1; x = 3$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
Signo y'	-	+	-
Función	D	C	D

↓
mínimo (1,0)

↓
Máximo (3, $4e^{-3}$)

El punto (1,0), además de ser el mínimo relativo, es el mínimo absoluto. La función no tiene máximo absoluto.

