PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2005

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

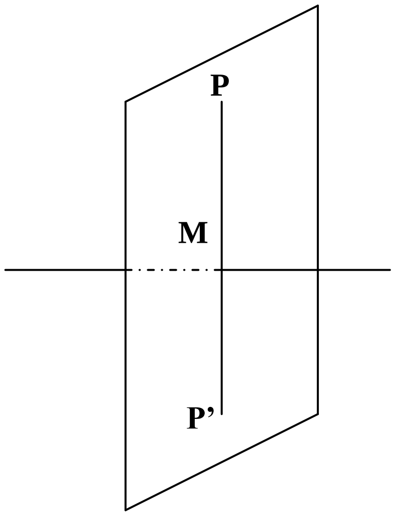
Considera el punto $P(2,0,1)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+2y=6 \\ z=2 \end{cases}$

a) Halla la ecuación del plano que contiene a *P* y a *r*.
b) Calcula el punto simétrico de *P* respecto de la recta *r*.
MATEMÁTICAS II. 2005. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación del haz de planos que contiene a la recta *r* es: $x+2y-6+k(z-2)=0$. De todos esos planos nos interesa el que pasa por el punto $P(2,0,1)$, luego: $2+2\cdot 0-6+k(1-2)=0 \Rightarrow k=-4$ por lo tanto, el plano pedido tiene de ecuación: $x+2y-6-4(z-2)=0 \Rightarrow x+2y-4z+2=0$

b) El punto *P'* simétrico del punto *P* respecto de la recta *r*, está situado en un plano que pasando por el punto *P* es perpendicular a *r* y además la distancia que hay desde el punto *P* a la recta *r* es la misma que la que hay desde el punto *P'* hasta dicha recta.



Calculamos la ecuación del plano que pasando por el punto *P* es perpendicular a *r*. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego: Vector normal del plano = vector director de la recta = $(-2,1,0)$

La ecuación de todos los planos perpendiculares a dicha recta es: $-2x+y+D=0$. Como nos interesa el que pasa por el punto $P(2,0,1)$: $-2\cdot 2+0+D=0 \Rightarrow D=4 \Rightarrow -2x+y+4=0$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (M); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano: $-2(6-2t)+t+4=0 \Rightarrow t=\dfrac{8}{5}$

luego las coordenadas del punto M son: $x=6-2\cdot\dfrac{8}{5}=\dfrac{14}{5}; y=\dfrac{8}{5}; z=2$

Como el punto M es el punto medio del segmento *P P'*, si llamamos (*a*, *b*, *c*) a las coordenadas del punto *P'*, se debe verificar que: $\dfrac{2+a}{2}=\dfrac{14}{5}; a=\dfrac{18}{5}$; $\dfrac{0+b}{2}=\dfrac{8}{5}; b=\dfrac{16}{3}$; $\dfrac{1+c}{2}=2; c=3$

Luego el simétrico es: $P'=\left(\dfrac{18}{5},\dfrac{16}{5},3\right)$

Sean los vectores: $\overrightarrow{v_1}=(0,1,0)$, $\overrightarrow{v_2}=(2,1,-1)$ y $\overrightarrow{v_3}=(2,3,-1)$.
a) ¿Son los vectores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ y $\overrightarrow{v_3}$ linealmente dependientes?.
b) ¿Para qué valores de a el vector $(4,a+3,-2)$ puede expresarse como combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ y $\overrightarrow{v_3}$?.
c) Calcula un vector unitario y perpendicular a $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$.
MATEMÁTICAS II. 2005. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Los vectores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ y $\overrightarrow{v_3}$ son linealmente dependientes si $\det(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\ y\ \overrightarrow{v_3})=0$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0-2+0-0+2+0=0 \Rightarrow Dependientes$$

b) Dado que los vectores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ y $\overrightarrow{v_3}$ son dependientes, para que el vector $\vec{u}=(4,a+3,-2)$ se pueda expresar como combinación lineal de $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ y $\overrightarrow{v_3}$, basta que se pueda expresar como combinación lineal de dos de ellos, es decir, que $\det(\vec{u}, \overrightarrow{v_1}\ y\ \overrightarrow{v_2})=0$.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & a+3 & -2 \end{vmatrix} = 0-4+0-0+4+0=0 \Rightarrow$$ Para cualquier valor de a el determinante vale cero, luego el vector $\vec{u}$ depende linealmente de $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ y $\overrightarrow{v_3}$ y se puede expresar como combinación lineal de ellos.

c) Para calcular un vector perpendicular a $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$, hacemos su producto vectorial.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}-2\vec{k}+0\vec{j}-0\vec{i}=(-1,0,-2)$$

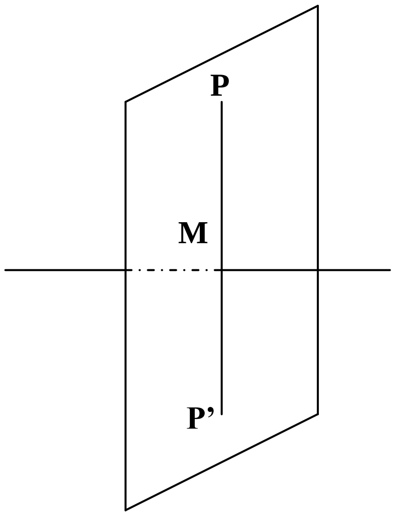
Como además queremos que sea unitario, bastará con dividir dicho vector por su módulo

$$módulo(-1,0,-2)=\sqrt{(-1)^2+0^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$$

Luego el vector unitario y perpendicular a $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ será $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},0,-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ ó $\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Sea el punto $P(1,0,-3)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x-y-1=0 \\ x+z=0 \end{cases}$
a) Halla la ecuación del plano que contiene a *P* y es perpendicular a *r*.
b) Calcula las coordenadas del punto simétrico de *P* respecto de *r*.
MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



a) Escribimos la ecuación de la recta *r* en paramétricas: $r \equiv \begin{cases} 2x-y-1=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=-1-2t \\ z=t \end{cases}$

Como el plano es perpendicular a la recta, su vector normal es el vector director de la recta, luego su ecuación será: $\pi \equiv -x-2y+z+D=0$. De todos esos planos nos interesa el que pasa por el punto P, luego: $-1-2\cdot 0-3+D=0 \Rightarrow D=4$.Por lo tanto el plano pedido es: $\pi \equiv -x-2y+z+4=0$

b) Calculamos las coordenadas del punto M, que es el punto de corte de la recta con el plano, para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano:

$$-(-t)-2(-1-2t)+t+4=0 \Rightarrow t=-1$$

luego, las coordenadas del punto M son: $x=1; y=1; z=-1$

Como el punto M es el punto medio del segmento P P', si llamamos (*a*, *b*, *c*) a las coordenadas del punto P', se debe verificar que:

$$\frac{1+a}{2}=1; a=1$$
$$\frac{0+b}{2}=1; b=2$$
$$\frac{-3+c}{2}=-1; c=1$$

Luego, $P'=(1,2,1)$

Se sabe que los puntos $A(m,0,1);B(0,1,2);C(1,2,3)$ y $D(7,2,1)$ están en un mismo plano.
a) Halla *m* y calcula la ecuación de dicho plano.
b) ¿Están los puntos *B*, *C* y *D* alineados?
MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) El plano viene definido por $B=(0,1,2)$; $\vec{BC}=(1,1,1)$; $\vec{BD}=(7,1,-1)$, luego su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 7 \\ y-1 & 1 & 1 \\ z-2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x-4y+3z-2=0$$

Como el punto *A* pertenece a dicho plano, debe verificar su ecuación.

$$m-4\cdot 0+3\cdot 1-2=0 \Rightarrow m=-1$$

b) Los puntos *B*, *C* y *D*, no están alineados pues forman un plano.

Se sabe que las rectas: $r \equiv \begin{cases} x+y-z-3=0 \\ x+2y-2=0 \end{cases}$ **y** $s \equiv \begin{cases} ax+6y+6=0 \\ x-2z+2=0 \end{cases}$ **son paralelas.**

a) Calcula *a*.
b) Halla la ecuación del plano que contiene a las rectas *r* y *s*.
MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Como las rectas *r* y *s* son paralelas, sus vectores directores son paralelos, luego sus componentes tienen que ser proporcionales. Vamos a calcular los vectores directores.

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} = (2,-1,1)$$

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -12\vec{i} + 2a\vec{j} - 6\vec{k} = (-12, 2a, -6)$$

Como sus componentes son proporcionales: $\dfrac{2}{-12} = \dfrac{-1}{2a} = \dfrac{1}{-6} \Rightarrow a = 3$

b) Como las rectas son paralelas, el plano que las contiene vendrá determinado por el punto A de la recta r, el vector director de la recta *r* y el vector $\vec{AB}$, siendo B un punto de la recta *s*.

El punto A puede ser $(2,0,-1)$, el punto B puede ser $(-2,0,0)$, con lo cuál el vector $\vec{AB}$ será el $(-4,0,1)$. Por lo tanto, la ecuación del plano es:

$$\pi = \begin{vmatrix} x-2 & 2 & -4 \\ y-0 & -1 & 0 \\ z+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x+6y+4z+2=0$$

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} x+z-2=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$ **y** $s \equiv \dfrac{x}{2} = y-1 = \dfrac{z}{3}$

a) Halla la ecuación del plano π que contiene a *s* y es paralelo a *r*.
b) Calcula la distancia de la recta *r* al plano π.
MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta *r* a paramétricas $r \equiv \begin{cases} x+z-2=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = x \\ y = 1-x \\ z = 2-x \end{cases}$

La recta *r*, viene definida por el punto $A=(0,1,2)$ y el vector director $\vec{u}=(1,1,-1)$. La recta *s*, viene definida por el punto $B=(0,1,0)$ y el vector director $\vec{v}=(2,1,3)$.

El plano que nos piden viene definido por el punto *B* y los vectores $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$, luego su ecuación será:.

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-0 & 1 & 2 \\ y-1 & 1 & 1 \\ z-0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 4x-5y-z+5=0$$

b) Como la recta y el plano son paralelos, basta con calcular la distancia del punto *A* al plano

$$d(A,\pi) = \frac{|4\cdot 0 - 5\cdot(-1) - 1\cdot 2 + 5|}{\sqrt{4^2+5^2+1^2}} = \frac{8}{\sqrt{42}} = 1'23u$$

Considera el punto $A(0,-3,1)$, el plano $\pi \equiv 2x-2y+3z=0$ y la recta $r \equiv x+3=y=\dfrac{z-3}{2}$

a) Determina la ecuación del plano que pasa por *A* y contiene a *r*.
b) Determina la ecuación de la recta que pasa por *A*, es paralela a π y corta a *r*.
MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta *r* a implícitas $r \equiv x+3=y=\dfrac{z-3}{2} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x-y+3=0 \\ 2x-z+9=0 \end{cases}$

La ecuación del haz de planos que contiene a la recta *r* es: $x-y+3+k(2x-z+9)=0$. De todos esos planos nos interesa el que pasa por el punto $A(0,-3,1)$, luego:

$$0+3+3+k(0-1+9)=0 \Rightarrow k=-\frac{3}{4}$$

por lo tanto, sustituyendo nos queda que el plano pedido tiene de ecuación: $2x+4y-3z+15=0$

b) Pasamos la recta *r* a paramétricas $r \equiv x+3=y=\dfrac{z-3}{2} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-3+t \\ y=t \\ z=3+2t \end{cases}$

Cualquier punto *B* de la recta *r*, tendrá de coordenadas $B(-3+t,t,3+2t)$. El vector director de la recta que buscamos será: $\overrightarrow{AB}=(-3+t,t+3,2+2t)$.

Como la recta tiene que ser paralela al plano π, eso quiere decir que el vector $\overrightarrow{AB}$ y el vector normal del plano $\vec{n}=(2,-2,3)$, tienen que ser perpendiculares, luego su producto escalar tiene que valer 0.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=(-3+t,t+3,2+2t)\cdot(2,-2,3)=-6+2t-2t-6+6+6t=0 \Rightarrow t=1$$

Sustituyendo, nos queda que $\overrightarrow{AB}=(-2,4,4)$ y la recta que nos piden es: $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z-1}{4}$

Se sabe que las rectas: $r \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-t \\ z = b+t \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 6x + 2z = 2 \end{cases}$ están contenidas en un mismo plano.

a) Calcula *b*.

b) Halla la ecuación del plano que contiene a las rectas *r* y *s*.

MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

b) Vamos a calcular primero el apartado b, para ello calculamos un punto y el vector director de cada recta

$$r \equiv \begin{cases} A = (1,-1,b) \\ \vec{u} = (1,-1,1) \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} B = (0,-2,1) \\ \vec{v} = (1,-2,-3) \end{cases}$$

El plano que nos piden viene definido por el punto B y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Por lo tanto su ecuación será:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-0 & 1 & 1 \\ y+2 & -1 & -2 \\ z-1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 5x + 4y - z + 9 = 0$$

a) Como la recta r está contenida en el plano, el punto A es de dicho plano y, por lo tanto, debe verificar su ecuación.

$$5 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) - b + 9 = 0 \Rightarrow b = 10$$

Calcula el área del triángulo de vértices $A(0,0,1)$, $B(0,1,0)$ y *C*, siendo *C* la proyección ortogonal del punto $(1,1,1)$ sobre el plano $x+y+z=1$.
MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la proyección del punto $(1,1,1)$ sobre el plano.

Calculamos la ecuación de la recta que pasando por el punto *A* es perpendicular al plano. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego:

Vector normal del plano = vector director de la recta = (1,1,1)

La ecuación paramétrica de la recta será:

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 1 + t \\ z &= 1 + t \end{aligned}$$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (*C*); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano:

$$1 + t + 1 + t + 1 + t = 1 \; ; \; 3t = -2; \; t = -\frac{2}{3}$$

luego las coordenadas del punto *C* son: $x = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}; y = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}; z = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

Calculamos los vectores $\vec{AB} = (0,1,-1)$ y $\vec{AC} = \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$ y aplicamos la fórmula del área del triángulo.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

$$S = \frac{1}{2} \, |\vec{AB} \wedge \vec{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \, u^2$$

Sean $A(-3,4,0); B(3,6,3)$ y $C(-1,2,1)$ los vértices de un triángulo.
a) Halla la ecuación del plano π que contiene al triángulo.
b) Halla la ecuación de la recta que es perpendicular a π y pasa por el origen de coordenadas.
c) Calcula el área del triángulo *ABC*.
MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) El plano viene definido por el punto $A=(-3,4,0)$ y los vectores $\overrightarrow{AB}=(6,2,3)$ y $\overrightarrow{AC}=(2,-2,1)$. Luego su ecuación será:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+3 & 6 & 2 \\ y-4 & 2 & -2 \\ z & 3 & 1 \end{vmatrix} = x-2z+3=0$$

b) La recta viene definida por el punto $(0,0,0)$ y su vector director será el vector normal del plano $\vec{u}=(1,0,-2)$. Luego su ecuación será: $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z}{-2}$

c) Aplicamos la fórmula del área del triángulo $S=\dfrac{1}{2}\left|\,\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\,\right|$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 8\vec{i}-16\vec{k}$$

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{64+0+256}=\frac{\sqrt{320}}{2}u^2$$

Considera un plano $\pi \equiv x + y + mz = 3$ y la recta $r \equiv x = y - 1 = \frac{z-2}{2}$
a) Halla *m* para que *r* y π sean paralelos.
b) Halla *m* para que *r* y π sean perpendiculares.
c) ¿Existe algún valor de *m* para que la recta *r* esté contenida en el plano π ?.
MATEMÁTICAS II. 2005. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El vector normal del plano es $\vec{n} = (1,1,m)$ y el vector director de la recta es $\vec{u} = (1,1,2)$. Si el plano y la recta son paralelos, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{n}$ son perpendiculares, luego, su producto escalar vale cero

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 + 1 + 2m = 0 \Rightarrow m = -1$$

b) Si el plano y la recta son perpendiculares, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{n}$ son paralelos, luego, sus componentes tienen que ser proporcionales

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{m}{2} \Rightarrow m = 2$$

c) Si la recta está contenida en el plano, el vector director de la recta y el normal del plano son perpendiculares, luego, $m = -1$, y el plano seria $x + y - z = 3$. Pero, como la recta está contenida en el plano, todos los puntos de la recta deben pertenecer a dicho plano. Un punto de la recta es el $A = (0,1,2)$, que debe pertenecer al plano

$$0 + 1 - 2 \neq 3 \Rightarrow \text{No pertenece al plano}$$

por lo tanto, no hay ningún valor de *m* para el cual la recta esté contenida en el plano.

Otra forma:

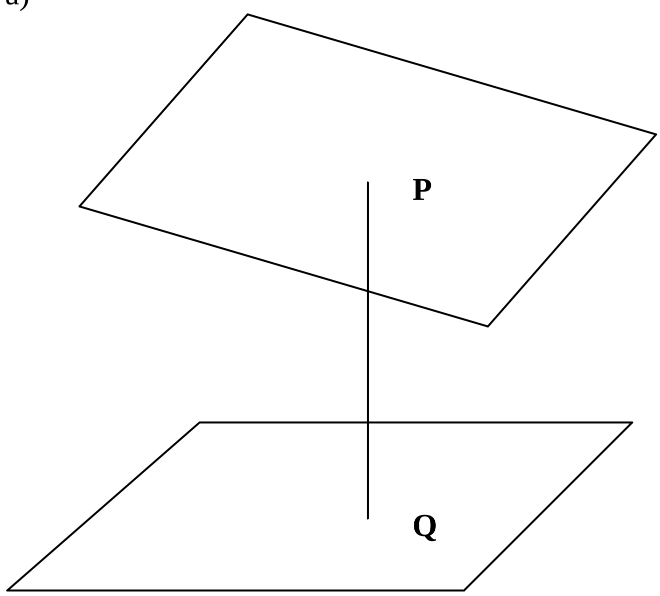
Con las dos ecuaciones de la recta y el plano, podemos formar un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, y para que la recta esté contenida en el plano, se tiene que cumplir que $R(A) = R(M) = 2$

$$\left.\begin{aligned} x + y + mz &= 3 \\ x - y &= -1 \\ 2x - z &= -2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow R(M) = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \text{La recta no puede estar contenida en el plano}$$

Sean los planos $\pi_1 \equiv 2x+y-z+5=0$ y $\pi_2 \equiv x+2y+z+2=0$.
a) Calcula las coordenadas del punto *P* sabiendo que está en el plano π_1 y que su proyección ortogonal sobre el plano π_2 es el punto $(1,0,-3)$.
b) Calcula el punto simétrico de *P* respecto del plano π_2
MATEMÁTICAS II. 2005. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)



Con el vector normal del plano π_2, $\vec{n}=(1,2,1)$ y el punto $Q=(1,0,-3)$, calculamos la ecuación de la recta perpendicular a π_2 y que pasa por *Q*.

$$r=\begin{cases} x=1+t \\ y=2t \\ z=-3+t \end{cases}$$

El punto *P* será el punto de intersección de *r* con π_1, luego:

$$2(1+t)+(2t)-(-3+t)+5=0 \Rightarrow t=-\frac{10}{3}$$

$$P=(1+t,2t,-3+t)=\left(1-\frac{10}{3},2\cdot\left(-\frac{10}{3}\right),-3-\frac{10}{3}\right)=\left(-\frac{7}{3},-\frac{20}{3},-\frac{19}{3}\right)$$

b) El punto *Q*, es el punto medio del segmento *PP’*, siendo *P’* el simétrico del punto *P*, luego, si llamamos (*a*,*b*,*c*) a las coordenadas del punto *P'*, se debe verificar que:

$$\frac{-\frac{7}{3}+a}{2}=1; a=\frac{13}{3}\ ;\ \frac{-\frac{20}{3}+b}{2}=0; b=\frac{20}{3}\ ;\ \frac{-\frac{19}{3}+c}{2}=-3; c=\frac{1}{3}$$

El punto pedido es $P'=\left(\frac{13}{3},\frac{20}{3},\frac{1}{3}\right)$