PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2004

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 1, Opción B
- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción B

Se sabe que la función $f:(-1,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & si \quad -1<x<0 \\ \dfrac{x^2+a}{x+1} & si \quad x\geq 0 \end{cases}$ es continua en $(-1,+\infty)$.

a) Halla el valor de *a*. ¿Es *f* derivable en $x=0$?

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.

MATEMÁTICAS II. 2004. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Como la función es continua en $(-1,+\infty)$ debe serlo en $x=0$, luego:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} x^2-4x+3=3 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+a}{x+1}=\dfrac{a}{1}=a \end{array}\right\} \Rightarrow a=3$$

Vamos a ver si es derivable en $x=0$. Calculamos la función derivada:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-4 & si \quad -1<x<0 \\ \dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} & si \quad x>0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=-4 \\ f'(0^+)=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^-)\neq f'(0^+) \Rightarrow \text{ No derivable}$$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-4 & si \quad -1<x<0 \\ \dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} & si \quad x>0 \end{cases}$$

	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
Signo f'	–	–	+
Función	D	D	C

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)$.
a) Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$.
b) Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de *f*. ¿Tiene puntos de inflexión la gráfica de *f*?.
MATEMÁTICAS II. 2004. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación de la recta tangente será: $y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$

$$f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)=x^3-2x^2-x+2$$
$$f(1)=1^3-2\cdot 1^2-1+2=0$$
$$f'(x)=3x^2-4x-1\Rightarrow f'(1)=-2$$

luego, sustituyendo, tenemos que la recta tangente es: $y-0=-2\cdot(x-1)\Rightarrow y=-2x+2$

La ecuación de la normal será: $y-0=\frac{1}{2}\cdot(x-1)\Rightarrow y=\frac{x-1}{2}$

b) Calculamos la segunda derivada.

$$f''(x)=6x-4=0\Rightarrow x=\frac{2}{3}$$

	$\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3},\infty\right)$
Signo f''	–	+
Función	Cn	Cx

$\downarrow$

P.I. $\left(\frac{2}{3},\frac{20}{27}\right)$

Sea $f:[0,2\pi]\rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=e^{x}(\cos x+senx)$.
a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.
b) Halla los extremos relativos (locales) y absolutos (globales) de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a y b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $y'=2e^{x}\cos x=0\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}\ ;\ x=\dfrac{3\pi}{2}$

	$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$	$\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$
Signo y'	+	–	+
Función	C	D	C

$\downarrow$ $\downarrow$

Máximo $\left(\dfrac{\pi}{2},e^{\frac{\pi}{2}}\right)$ mínimo $\left(\dfrac{3\pi}{2},-e^{\frac{3\pi}{2}}\right)$

El máximo absoluto es $\left(2\pi,e^{2\pi}\right)$ y el mínimo absoluto es $\left(\dfrac{3\pi}{2},-e^{\frac{3\pi}{2}}\right)$

Se sabe que la función $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2-\dfrac{1}{2}x+c & si \quad -1<x<0 \\ \sqrt{1-x} & si \quad 0\le x<1 \end{cases}$$

es derivable en el intervalo $(-1,1)$.

a) Determina el valor de la constante c.

b) Calcula la función derivada *f* '.

c) Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de *f* que son paralelas a la recta de ecuación $y=-x$.

MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Si la función es derivable en $x=0$, primero tiene que ser continua en dicho punto, luego:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} 2x^2-\dfrac{1}{2}x+c=c \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{1-x}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow c=1$$

b) La función derivada es: $f'(x)=\begin{cases} 4x-\dfrac{1}{2} & si \quad -1<x<0 \\ \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} & si \quad 0\le x<1 \end{cases}$

c) Si son paralelas a la recta $y=-x\Rightarrow m=-1$, luego:

$$4x-\frac{1}{2}=-1\Rightarrow x=-\frac{1}{8} \ ; \ y=2x^2-\frac{1}{2}x+1=\frac{35}{32}$$

Luego, la recta tangente es: $y-\dfrac{35}{32}=-1\left(x+\dfrac{1}{8}\right)\Rightarrow 32x+32y-31=0$

$$\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}=-1\Rightarrow x=\frac{3}{4} \ ; \ y=\sqrt{1-x}=\frac{1}{2}$$

Luego, la recta tangente es: $y-\dfrac{1}{2}=-1\left(x-\dfrac{3}{4}\right)\Rightarrow 4x+4y-5=0$

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ que es paralela a la recta $-4x + y + 3 = 0$.
b) Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la parábola $y = x^2$ que pasan por el punto $(2,0)$.
MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación de la recta tangente será: $y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$

Como tiene que ser paralela a la recta $-4x + y + 3 = 0 \Rightarrow m = f'(x_0) = 4 = 2x_0 \Rightarrow x_0 = 2$, y $f(x_0) = 2^2 = 4$, luego, sustituyendo, tenemos que la recta tangente es:

$$y - 4 = 4\cdot(x - 2) \Rightarrow y = 4x - 4$$

b) La ecuación de todas las rectas tangentes será: $y - a^2 = 2a\cdot(x - a)$; y como queremos que pasen por el punto $(2,0)$, tenemos:

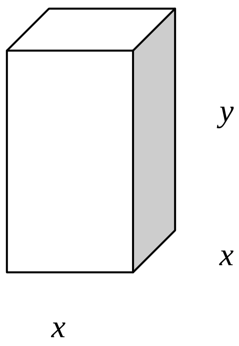
$$0 - a^2 = 2a\cdot(2 - a) \Rightarrow a^2 + 4a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -4 \end{cases}$$

$a = 0 \Rightarrow y - 0 = 2\cdot 0\cdot(x - 0) \Rightarrow y = 0$

$a = -4 \Rightarrow y - 16 = 2\cdot 4\cdot(x - 4) \Rightarrow y = 8x - 16$

Se quiere fabricar una caja abierta de chapa con base cuadrada y con 32 litros de capacidad. Halla las dimensiones de la caja que precisa la menor cantidad de chapa.
MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



a) La función que queremos que sea mínimo es: $Superficie_{\min} = x^2 + 4 \cdot x \cdot y$

b) Relación entre las variables: $32 = x^2 \cdot y \Rightarrow y = \dfrac{32}{x^2}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$Superficie_{\min} = x^2 + 4 \cdot x \cdot \frac{32}{x^2} = x^2 + \frac{128}{x} = \frac{x^3 + 128}{x}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S' = \frac{3x^3 - x^3 - 128}{x^2} = \frac{2x^3 - 128}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{64} = 4$$

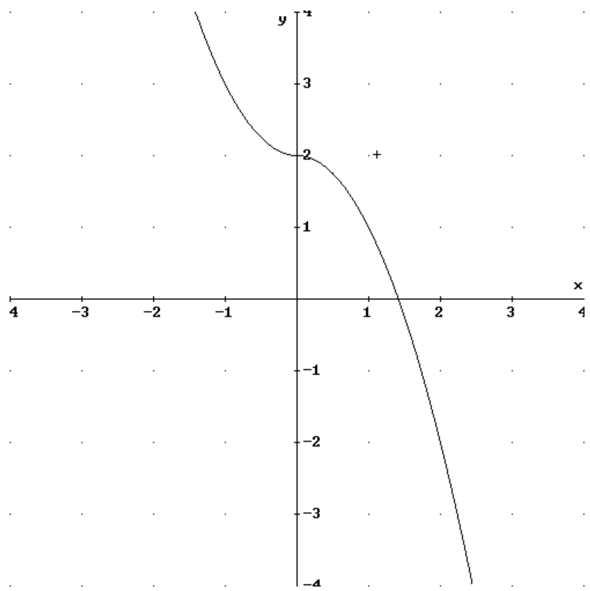
Luego, las dimensiones son: $x = 4\,dm$; $y = 2\,dm$

Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=2-x|x|$.
a) Esboza la gráfica de *f*.
b) Estudia la derivabilidad de *f* en $x=0$.
c) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=2$.
MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Lo primero que hacemos es abrir la función y dibujarla

$$f(x)=2-x|x|=\begin{cases}2+x^2 & si \quad x<0\\ 2-x^2 & si \quad x\geq 0\end{cases}$$



b) Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases}2x & si \quad x<0\\ -2x & si \quad x>0\end{cases}$

Vamos a estudiar la derivabilidad en $x=0$

$$\left.\begin{array}{l}f'(0^-)=0\\ f'(0^+)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \text{Si es derivable en } x=0$$

c) La ecuación de la recta tangente será: $y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2)$

$f(2)=-2$
$f'(2)=-4$

luego, sustituyendo, tenemos que la recta tangente es: $y+2=-4\cdot(x-2)\Rightarrow y=-4x+6$

Se sabe que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{a}{2x}\right)$ es finito. Determina el valor de *a* y calcula el límite.

MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{a}{2x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to 0}\frac{2x-ae^x+a}{2x(e^x-1)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2-ae^x}{2(e^x-1)+2xe^x}\Rightarrow 2-ae^x=0\Rightarrow a=2$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{a}{2x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to 0}\frac{2x-ae^x+a}{2x(e^x-1)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2-ae^x}{2(e^x-1)+2xe^x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{-ae^x}{2e^x+2e^x+2xe^x}=\frac{-a}{4}=-\frac{1}{2}$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^2\cdot e^{-x^2}$
a) Halla las asíntotas de la gráfica de *f*.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f* y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).
c) Esboza la gráfica de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) La función $f(x)=x^2\cdot e^{-x^2}$, no tiene asíntota vertical ya que su dominio es $\mathbb{R}$.

Vamos a ver si tiene asíntota horizontal

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x\cdot e^{x^2}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}}=\frac{2}{\infty}=0$$

Por lo tanto, la asíntota horizontal es $y=0$.

Como tiene asíntota horizontal, no puede tener asíntota oblicua.

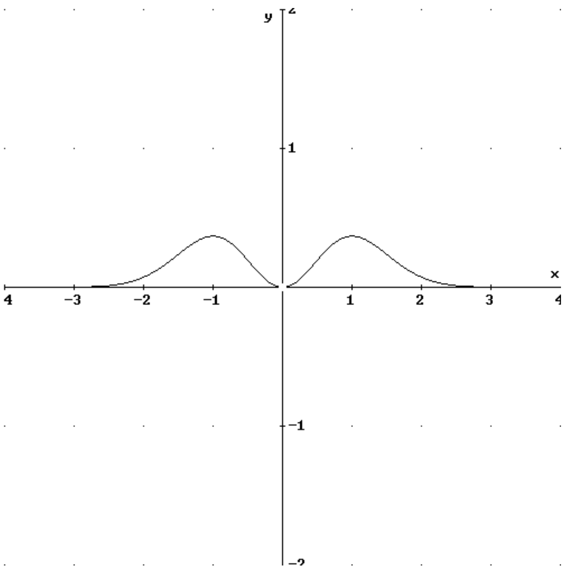
b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$y'=\frac{2x\cdot e^{x^2}-2x\cdot e^{x^2}\cdot x^2}{(e^{x^2})^2}=\frac{2x-2x^3}{e^{x^2}}=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=1\ ;\ x=-1$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
Signo y'	+	–	+	–
Función	C	D	C	D

Máximo $\left(-1,\frac{1}{e}\right)$ mínimo $(0,0)$ Máximo $\left(1,\frac{1}{e}\right)$

c)



Halla una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que su gráfica pase por el punto $M(0,1)$, que la tangente en el punto M sea paralela a la recta $2x-y+3=0$ y que $f''(x)=3x^2$.
MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

La función que queremos averiguar será de la forma: $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

Calculamos la primera y segunda derivada.

$$f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d \quad ; \quad f''(x)=12ax^2+6bx+2c$$

Aplicamos las condiciones del problema:

$$f''(x)=12ax^2+6bx+2c=3x^2 \Rightarrow \begin{cases} 12a=3 \Rightarrow a=\dfrac{1}{4} \\ 6b=0 \Rightarrow b=0 \\ 2c=0 \Rightarrow c=0 \end{cases}$$

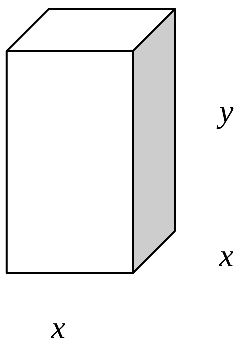
$$f'(0)=2 \Rightarrow 4a\cdot 0^3+3b\cdot 0^2+2c\cdot 0+d=2 \Rightarrow d=2$$

Pasa por $M(0,1) \Rightarrow f(0)=a\cdot 0^4+b\cdot 0^3+c\cdot 0^2+d\cdot 0+e=1 \Rightarrow e=1$

Luego, la función pedida será: $f(x)=\dfrac{x^4}{4}+2x+1$

Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada con una capacidad de 80 cm^3. Para la tapa y la superficie lateral se usa un material que cuesta 1€/cm^2 y para la base se emplea un material un 50% más caro. Halla las dimensiones de la caja para que su coste sea mínimo.
MATEMÁTICAS II. 2004. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea mínimo es: $Coste_{\min} = 1'5\cdot x^2 + 1\cdot x^2 + 1\cdot 4xy = 2'5\cdot x^2 + 4\cdot x\cdot y$

b) Relación entre las variables: $80 = x^2\cdot y \Rightarrow y = \dfrac{80}{x^2}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

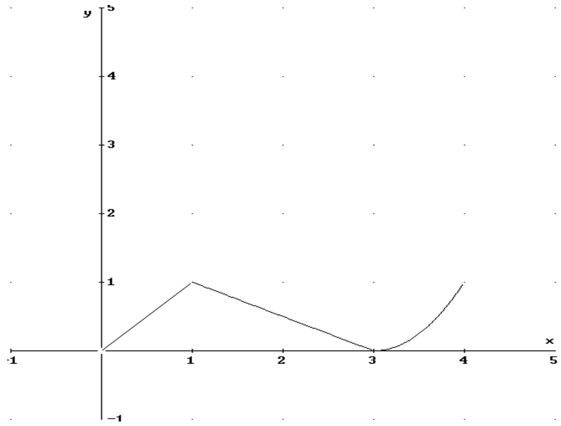
$$Coste_{\min} = 2'5\cdot x^2 + 4\cdot x\cdot \frac{80}{x^2} = 2'5\cdot x^2 + \frac{320}{x} = \frac{2'5\cdot x^3 + 320}{x}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$C' = \frac{7'5\cdot x^3 - 2'5\cdot x^3 - 320}{x^2} = \frac{5\cdot x^3 - 320}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{64} = 4$$

Luego, las dimensiones son: $x = 4\,cm$; $y = 5\,cm$

De una función $f:[0,4]\to\mathbb{R}$ se sabe que $f(1)=3$ y que la gráfica de su función derivada es la que aparece en el dibujo.



a) Halla la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*. ¿En qué punto alcanza la función su máximo absoluto.
c) Estudia la concavidad y convexidad de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2004. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) De la gráfica de la función $f'(x)$, vemos que $f'(1)=1$, luego, la ecuación de la tangente será:

$$y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)\Rightarrow y-3=1\cdot(x-1)\Rightarrow y=x+2$$

b) De la gráfica de la función $f'(x)$, vemos que siempre es positiva, luego, la función $f(x)$ es creciente en el intervalo $[0,4]$ y, por lo tanto no tiene máximos ni mínimos relativos. Como es creciente el máximo absoluto está en $x=4$.

c)

$(0,1)\Rightarrow f'(x)\ \textit{es creciente}\Rightarrow f''(x)>0\Rightarrow$ Convexa

$(1,3)\Rightarrow f'(x)\ \textit{es decreciente}\Rightarrow f''(x)<0\Rightarrow$ Cóncava

$(3,4)\Rightarrow f'(x)\ \textit{es creciente}\Rightarrow f''(x)>0\Rightarrow$ Convexa

Luego, $x=1$ y $x=3$ son puntos de inflexión.