

**MATEMÁTICAS II**

**TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO**

- Junio, Ejercicio 3, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

Considera los vectores  $\vec{u} = (1,1,1)$ ,  $\vec{v} = (2,2,a)$  y  $\vec{w} = (2,0,0)$ .

a) Halla los valores de  $a$  para los que los vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  son linealmente independientes.

b) Determina los valores de  $a$  para los que los vectores  $\vec{u} + \vec{v}$  y  $\vec{u} - \vec{w}$  son ortogonales.

MATEMÁTICAS II. 2003. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

### R E S O L U C I Ó N

a) El determinante formado por los tres vectores tiene que ser distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & a \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2a - 4 = 0 \Rightarrow a = 2$$

Luego, son independientes para todos los valores de  $a \neq 2$ .

b) Calculamos los vectores:  $\vec{u} + \vec{v} = (3, 3, 1+a)$  y  $\vec{u} - \vec{w} = (-1, 1, 1)$ . Como son ortogonales, su producto escalar debe valer 0.

$$(3, 3, 1+a) \cdot (-1, 1, 1) = -3 + 3 + 1 + a = 0 \Rightarrow a = -1$$

Sabiendo que las rectas:  $r \equiv x = y = z$  y  $s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = -\mu \end{cases}$  se cruzan, halla los puntos  $A$  y  $B$ , de  $r$  y  $s$  respectivamente, que están a mínima distancia.  
MATEMÁTICAS II. 2003. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

### R E S O L U C I Ó N

Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 3 + s \\ z = -s \end{cases}$$

Cualquier punto de la recta  $r$  tendrá de coordenadas  $A = (t, t, t)$  y cualquier punto de la recta  $s$  tendrá de coordenadas  $B = (1 + s, 3 + s, -s)$

El vector  $\vec{AB}$  tendrá de coordenadas:  $\vec{AB} = (1 + s - t, 3 + s - t, -s - t)$

Como el vector  $\vec{AB}$  tiene que ser perpendicular a la recta  $r$  y  $s$  se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{u} = 0 &\Rightarrow 1 + s - t + 3 + s - t - s - t = 0 \\ \vec{AB} \cdot \vec{v} = 0 &\Rightarrow 1 + s - t + 3 + s - t + s + t = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo las dos ecuaciones, obtenemos que  $t = 1$  ;  $s = -1$

Luego, los puntos  $A$  y  $B$  que están a mínima distancia tienen de coordenadas

$$A = (1, 1, 1) ; B = (0, 2, 1)$$

Considera el plano  $\pi \equiv x - 2y + 1 = 0$  y la recta  $r \equiv \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x - y + az + 2 = 0 \end{cases}$

a) Halla el valor de  $a$  sabiendo que la recta está contenida en el plano.

b) Calcula el ángulo formado por el plano  $\pi$  y la recta  $s \equiv \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$

**MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.**

## R E S O L U C I Ó N

a) Si la recta está contenida en el plano, el rango de la matriz de los coeficientes del sistema formado por las ecuaciones de la recta y la ecuación del plano debe valer 2, luego:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3a - 2 + 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

b) Pasamos la recta a paramétricas

$$s \equiv \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x - y + z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 - t \\ y = -1 \\ z = t \end{cases}$$

Aplicamos la fórmula del ángulo de recta y plano.

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{|u_1 \cdot A + u_2 \cdot B + u_3 \cdot C|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 0 + 0 \cdot 1|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = 0'3162 \Rightarrow \alpha = 18'43^\circ$$

Considera el punto  $P(-2, 3, 0)$  y la recta  $r \equiv \begin{cases} x + y + z + 2 = 0 \\ 2x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$

a) Halla la ecuación del plano que pasa por  $P$  y contiene a la recta  $r$ .

b) Determina el punto de  $r$  más próximo a  $P$ .

MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

### R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación del haz de planos es:  $x + y + z + 2 + k(2x - 2y + z + 1) = 0$ .

Como queremos el plano que pasa por  $P(-2, 3, 0)$ , tenemos que:

$$-2 + 3 + 2 + k(2 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 + 1) = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

luego, el plano es:  $x + y + z + 2 + \frac{1}{3}(2x - 2y + z + 1) = 0 \Rightarrow 5x + y + 4z + 7 = 0$

b) Pasamos la recta a paramétricas:  $r \equiv \begin{cases} x + y + z + 2 = 0 \\ 2x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-5 - 3t}{4} \\ y = \frac{-3 - t}{4} \\ z = t \end{cases}$

Calculamos la ecuación del plano que pasando por el punto  $P$  es perpendicular a la recta. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos,

luego: Vector normal del plano = vector director de la recta =  $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, 1\right) = (-3, -1, 4)$

La ecuación de todos los planos perpendiculares a dicha recta es:  $-3x - y + 4z + D = 0$

Como nos interesa el que pasa por el punto  $P(-2, 3, 0)$

$$-3 \cdot (-2) - 3 + D = 0 \Rightarrow D = -3$$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano ( $M$ ); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano:

$$-3x - y + 4z - 3 = 0 \Rightarrow -3\left(\frac{-5 - 3t}{4}\right) - \left(\frac{-3 - t}{4}\right) + 4t - 3 = 0 \Rightarrow t = -\frac{3}{13}$$

luego las coordenadas del punto  $M$  son:  $x = \frac{-5 - 3 \cdot \left(\frac{-3}{13}\right)}{4} = -\frac{14}{13}$ ;  $y = \frac{-3 - \left(\frac{-3}{13}\right)}{4} = -\frac{9}{13}$ ;  $z = -\frac{3}{13}$

Considera una recta  $r$  y un plano  $\pi$  cuyas ecuaciones son, respectivamente;

$$\left. \begin{array}{l} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{array} \right\} (t \in \mathbb{R}) \quad \left. \begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{array} \right\} (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

a) Estudia la posición relativa de la recta  $r$  y el plano  $\pi$ .

b) Dados los puntos  $B(4,4,4)$  y  $C(0,0,0)$ , halla un punto  $A$  en la recta  $r$  de manera que el triángulo formado por los puntos  $A, B$  y  $C$  sea rectángulo en  $B$ .

**MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

a)

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{array} \right. \Rightarrow A = (0,0,0); \vec{u} = (1,1,0)$$

$$\pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{array} \right. \Rightarrow B = (0,0,0); \vec{v} = (1,1,0); \vec{w} = (0,0,1)$$

Vemos que la recta está contenida en el plano, ya que el punto  $A$  pertenece al plano y el rango de  $\left( \begin{array}{ccc} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{array} \right) = 2$

b) Cualquier punto  $A$  de la recta  $r$  tendrá de coordenadas:  $A = (t, t, 0)$ . Como el triángulo debe ser rectángulo en  $B$ , los vectores  $\vec{BA} = (4-t, 4-t, 4)$  y  $\vec{BC} = (4, 4, 4)$ , tienen que ser perpendiculares, luego su producto escalar debe valer 0.

$$(4-t, 4-t, 4) \cdot (4, 4, 4) = 16 - 4t + 16 - 4t + 16 = 0 \Rightarrow t = 6$$

Luego, el punto  $A$  será:  $A = (6, 6, 0)$

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto  $(3,1,-1)$ , es paralela al plano  $3x - y + z = 4$  y corta a la recta intersección de los planos  $x + z = 4$  y  $x - 2y + z = 1$ .  
**MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

Calculamos las coordenadas de un punto de la recta de corte de los dos planos.

$$\left. \begin{array}{l} x + z = 4 \\ x - 2y + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow B = \left(4 - t, \frac{3}{2}, t\right)$$

El vector  $\vec{AB} = \left(1 - t, \frac{1}{2}, t + 1\right)$ , tiene que ser perpendicular al vector normal del plano, luego su producto escalar debe valer 0.

$$3 \cdot (1 - t) + (-1) \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot (t + 1) = 0 \Rightarrow t = \frac{7}{4}$$

Luego,  $\vec{AB} = \left(1 - \frac{7}{4}, \frac{1}{2}, \frac{7}{4} + 1\right) = \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{11}{4}\right) = (-3, 2, 11)$ .

Por lo tanto, la ecuación de la recta pedida es:  $\frac{x-3}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{11}$

Considera la recta  $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y = 2 \end{cases}$  y el plano  $\pi \equiv x - 2y + z = 0$ .

a) Calcula el haz de planos que contiene a la recta  $r$ .

b) Halla el plano que contiene a la recta  $r$  y corta al plano  $\pi$  en una recta paralela al plano  $z = 0$ .

**MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación del haz de planos que contiene a la recta  $r$  es:

$$x + y - z - 1 + k(y - 2) = 0 \Rightarrow x + (1+k)y - z - 1 - 2k = 0$$

b) El vector director de la recta intersección de los planos:  $x + (1+k)y - z - 1 - 2k = 0$  y  $x - 2y + z = 0$  tiene que ser perpendicular al vector normal del plano  $z = 0$ .

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1+k & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1+k, -2, -3-k)$$

$$(-1+k, -2, -3-k) \cdot (0, 0, 1) = 0 \Rightarrow k = -3$$

Luego, el plano pedido es:  $x + (1-3)y - z - 1 - 2 \cdot (-3) = 0 \Rightarrow x - 2y - z + 5 = 0$



Se sabe que el plano  $\pi$  corta a los semiejes positivos de coordenadas en los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , siendo las longitudes de los segmentos  $OA$ ,  $OB$  y  $OC$  de 4 unidades, donde  $O$  es el origen de coordenadas.

a) Halla la ecuación del plano  $\pi$ .

b) Calcula el área del triángulo  $ABC$ .

c) Obtén un plano paralelo al plano  $\pi$  que diste 4 unidades del origen de coordenadas.

**MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

a) Los puntos serán:  $A = (4, 0, 0)$ ;  $B = (0, 4, 0)$  y  $C = (0, 0, 4)$ .

El plano viene definido por el punto  $A = (4, 0, 0)$  y los vectores  $\vec{AB} = (-4, 4, 0)$  y  $\vec{AC} = (-4, 0, 4)$ .

Luego, su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x-4 & -4 & -4 \\ y & 4 & 0 \\ z & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + y + z - 4 = 0.$$

b) Calculamos los vectores  $\vec{AB} = (-4, 4, 0)$  y  $\vec{AC} = (-4, 0, 4)$  y aplicamos la fórmula del área del triángulo.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (16, 16, 16)$$

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \wedge \vec{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{16^2 + 16^2 + 16^2} = \sqrt{192} = 13'85 \text{ u}^2$$

c) Cualquier plano paralelo a  $\pi$  tendrá de ecuación:  $x + y + z + D = 0$  y como dista 4 unidades del origen de coordenadas, tenemos:

$$4 = \frac{|D|}{\sqrt{3}} \Rightarrow D = \pm 4\sqrt{3}$$

Luego, el plano pedido tendrá de ecuación:  $x + y + z \pm 4\sqrt{3} = 0$

Halla la perpendicular común a las rectas:  $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = \alpha \\ z = -\alpha \end{cases}$  y  $s \equiv \begin{cases} x = \beta \\ y = 2 + 2\beta \\ z = 0 \end{cases}$

**MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

Cualquier punto de la recta  $r$  tendrá de coordenadas  $A = (1 + \alpha, \alpha, -\alpha)$  y cualquier punto de la recta  $s$  tendrá de coordenadas  $B = (\beta, 2 + 2\beta, 0)$ .

El vector  $\vec{AB}$  tendrá de coordenadas:  $\vec{AB} = (\beta - 1 - \alpha, 2 + 2\beta - \alpha, \alpha)$

Como el vector  $\vec{AB}$  tiene que ser perpendicular a la recta  $r$  y  $s$  se debe cumplir que:

$$\vec{AB} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \beta - 1 - \alpha + 2 + 2\beta - \alpha - \alpha = 0 \Rightarrow -3\alpha + 3\beta + 1 = 0$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \beta - 1 - \alpha + 4 + 4\beta - 2\alpha = 0 \Rightarrow -3\alpha + 5\beta + 3 = 0$$

Resolviendo las dos ecuaciones, obtenemos que  $\alpha = -\frac{2}{3}$  y  $\beta = -1$ .

Luego, la recta que nos piden pasa por el punto  $A = (1, 0, 0)$  y su vector director es el

$$\vec{AB} = \left( -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right) = (-2, 1, -1)$$

La perpendicular común tiene de ecuación:  $\frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$

Se sabe que los puntos  $A(1,0,-1)$ ,  $B(3,2,1)$  y  $C(-7,1,5)$  son vértices consecutivos de un paralelogramo  $ABCD$ .

a) Calcula las coordenadas de  $D$ .

b) Halla el área del paralelogramo.

MATEMÁTICAS II. 2003. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

### R E S O L U C I Ó N

a) El punto medio de la diagonal  $AC$  es:  $M = \left( \frac{1-7}{2}, \frac{0+1}{2}, \frac{-1+5}{2} \right) = \left( -3, \frac{1}{2}, 2 \right)$

El punto medio de la diagonal  $BD$ , también es  $M$ , luego si llamamos  $D(a,b,c)$ , se tiene que cumplir:

$$M = \left( \frac{3+a}{2}, \frac{2+b}{2}, \frac{1+c}{2} \right) = \left( -3, \frac{1}{2}, 2 \right) \Rightarrow D(-9, -1, 3)$$

b) Calculamos los vectores  $\vec{AB} = (2, 2, 2)$  y  $\vec{AD} = (-10, -1, 4)$ .

$$\begin{vmatrix} x-4 & -4 & -4 \\ y & 4 & 0 \\ z & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + y + z - 4 = 0.$$

b) Calculamos los vectores  $\vec{AB} = (-4, 4, 0)$  y  $\vec{AC} = (-4, 0, 4)$  y aplicamos la fórmula del área del triángulo.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ -10 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (10, -28, 18)$$

$$S = |\vec{AB} \wedge \vec{AD}| = \sqrt{10^2 + 28^2 + 18^2} = \sqrt{1208} = 34'75 \text{ u}^2$$

Los puntos  $A(1,1,0)$  y  $B(2,2,1)$  son vértices consecutivos de un rectángulo  $ABCD$ . Además, se sabe que los vértices  $C$  y  $D$  están contenidos en una recta que pasa por el origen de coordenadas. Halla  $C$  y  $D$ .  
MATEMÁTICAS II. 2003. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

### R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la ecuación de la recta que pasa por  $C$  y  $D$ .

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$$

Con el punto  $A(1,1,0)$  y el vector  $\vec{AB}(1,1,1)$  hallamos un plano perpendicular a la recta

$$x + y + z + D = 0 \Rightarrow 1 + 1 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = -2 \Rightarrow x + y + z - 2 = 0$$

Las coordenadas del punto  $D$ , son las coordenadas del punto de corte de la recta con este plano, luego:

$$x + y + z - 2 = 0 \Rightarrow t + t + t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{3} \Rightarrow D = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Con el punto  $B(2,2,1)$  y el vector  $\vec{AB}(1,1,1)$  hallamos un plano perpendicular a la recta

$$x + y + z + D = 0 \Rightarrow 2 + 2 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -5 \Rightarrow x + y + z - 5 = 0$$

Las coordenadas del punto  $C$  son las coordenadas del punto de corte de la recta con este plano, luego:

$$x + y + z - 5 = 0 \Rightarrow t + t + t - 5 = 0 \Rightarrow t = \frac{5}{3} \Rightarrow C = \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$$