PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2002

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 1, Opción A
- Junio, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción A

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^{\frac{2x}{x^2+1}}$
a) Calcula las asíntotas de la gráfica de *f*.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos relativos de *f* (puntos donde se obtienen y valor que alcanzan).
MATEMÁTICAS II. 2002. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Asíntota vertical: No tiene.

Asíntota horizontal: $\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2x}=0\Rightarrow y=e^0=1.$

Asíntota oblicua: No tiene

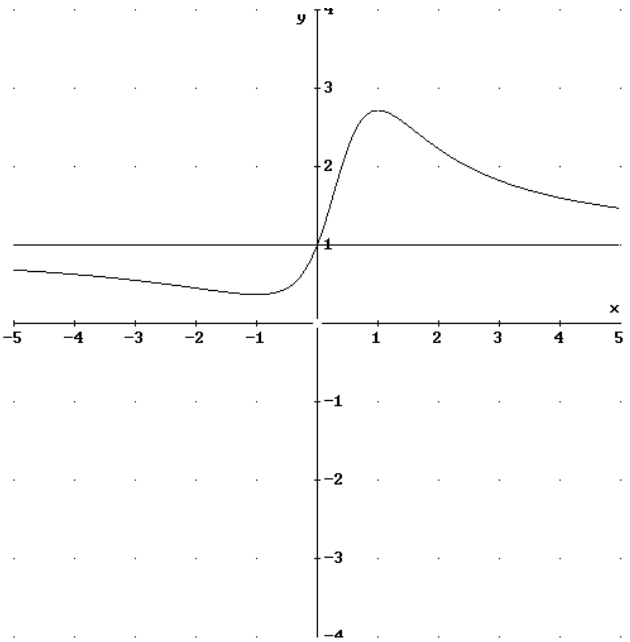
b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$y'=\frac{2\cdot(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}\cdot e^{\frac{2x}{x^2+1}}=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}\cdot e^{\frac{2x}{x^2+1}}=0\Rightarrow x=1\ ;\ x=-1$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
Signo y'	–	+	–
Función	D	C	D

$\downarrow$ $\downarrow$

mínimo $\left(-1,e^{-1}\right)$ Máximo $(1,e)$



Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{9x-3}{x^2-2x}$ para $x\neq 0$ y $x\neq 2$.
a) Calcula las asíntotas de la gráfica de f.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
c) Con los datos obtenidos, esboza la gráfica de f.
MATEMÁTICAS II. 2002. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Asíntota vertical: $x=0$ y $x=2$.

Asíntota horizontal: $\lim_{x\to\infty}\dfrac{9x-3}{x^2-2x}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{9}{2x-2}=0\Rightarrow y=0$.

Asíntota oblicua: No tiene

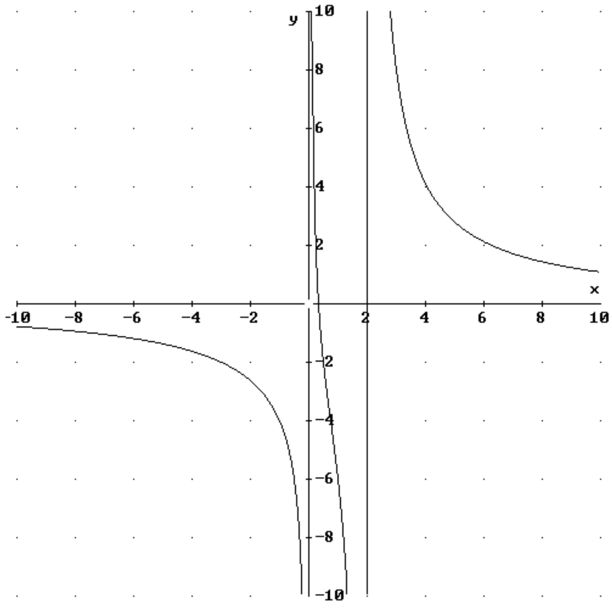
b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$y'=\frac{9\cdot(x^2-2x)-(2x-2)\cdot(9x-3)}{(x^2-2x)^2}=\frac{-9x^2+6x-6}{(x^2-2x)^2}=0\Rightarrow No$$

	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
Signo y'	$-$	$-$	$-$
Función	D	D	D

La función es decreciente en su dominio.

c)



Determina el valor de las constantes c y d sabiendo que la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3+3x^2+cx+d$ tiene como recta tangente en su punto de inflexión a la recta $y=3x+4$.
MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos el punto de inflexión de la función.

$$f'(x)=3x^2+6x+c \quad ; \quad f''(x)=6x+6=0 \Rightarrow x=-1$$

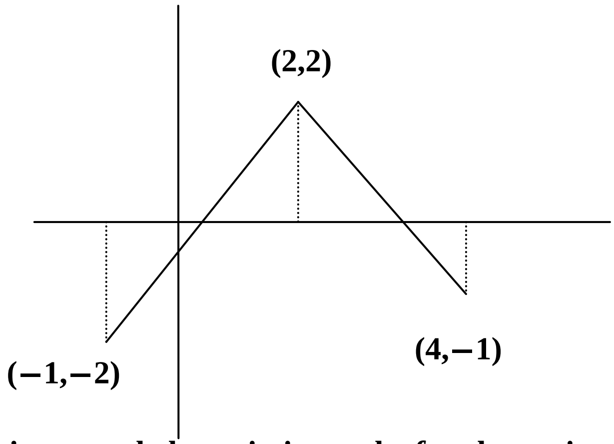
A continuación, aplicamos las condiciones del problema.

$$f'(-1)=3 \Rightarrow 3(-1)^2+6\cdot(-1)+c=3 \Rightarrow c=6$$

Pasa por $P(-1,1) \Rightarrow f(1)=1 \Rightarrow 1=(-1)^3+3\cdot(-1)^2+6\cdot(-1)+d \Rightarrow d=5$

Luego, la función será: $f(x)=x^3+3x^2+6x+5$.

Sea $f:[-1,4]\to\mathbb{R}$ R una función cuya derivada tiene por gráfica la de la figura.



a) Estudia el crecimiento y el decrecimiento de *f* y determina los valores donde alcanza sus extremos relativos.
b) Estudia la concavidad y convexidad de *f*.¿Tiene puntos de inflexión la gráfica de *f* ?.
MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la ecuación de la recta que pasa por $(2,2)$ y $(-1,-2)$.

$$\frac{x-2}{-1-2}=\frac{y-2}{-2-2}\Rightarrow y=\frac{4x-2}{3}$$, el punto de corte con el eje X es: $\left(\frac{1}{2},0\right)$

Calculamos la ecuación de la recta que pasa por $(2,2)$ y $(4,-1)$.

$$\frac{x-2}{4-2}=\frac{y-2}{-1-2}\Rightarrow y=\frac{-3x+10}{2}$$, el punto de corte con el eje X es: $\left(\frac{10}{3},0\right)$

	$\left(-1,\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2},\frac{10}{3}\right)$	$\left(\frac{10}{3},4\right)$
Signo y'	–	+	–
Función	D	C	D

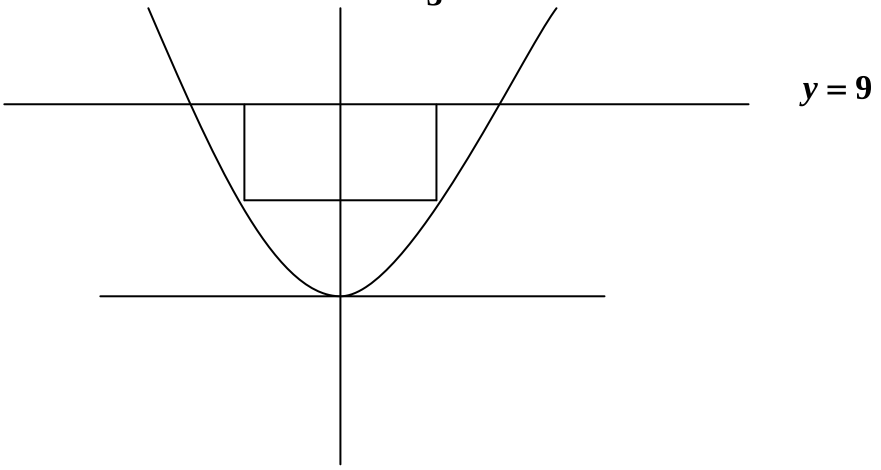
Máximo en $x=\frac{10}{3}$; mínimo en $x=\frac{1}{2}$

b) $$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{4x-2}{3} & si \quad -1\le x\le 2\\ \dfrac{-3x+10}{2} & si \quad 2<x\le 4\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{3} & si \quad -1\le x\le 2\\ \dfrac{-3}{2} & si \quad 2<x\le 4\end{cases}$$

	$(-1,2)$	$(2,4)$
Signo y''	+	–
Función	Cx	Cn

Luego, tiene un punto de inflexión en $x=2$

Considera el recinto limitado por la curva $y = \frac{1}{3}x^2$ y la recta $y = 9$



De entre los rectángulos situados como el de la figura, determina el que tiene área máxima.
MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La función que queremos que sea máxima es: $S_{\max} = 2x \cdot (9 - y)$

b) Relación entre las variables: $y = \dfrac{x^2}{3}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$S_{\max} = 2x \cdot (9 - \frac{x^2}{3}) = \frac{54x - 2x^3}{3}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S' = \frac{54 - 6x^2}{3} = 0 \Rightarrow x = 3$$

Luego, las dimensiones son: $x = 3$; $y = 3$. $S_{\max} = 2x \cdot (9 - y) = 36u^2$

De entre todas las rectas que pasan por el origen de coordenadas, determina las que son tangentes a la curva de ecuación $y=\frac{1}{4}x^2+4x+4$. Calcula los puntos de tangencia correspondientes.
MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

La ecuación de todas las rectas tangentes será: $y-\frac{1}{4}a^2-4a-4=\left(\frac{a}{2}+4\right)\cdot(x-a)$; y como queremos que pasen por el punto $(0,0)$, tenemos:

$$0-\frac{1}{4}a^2-4a-4=\left(\frac{a}{2}+4\right)\cdot(0-a)\Rightarrow -a^2-16a-16=-2a^2-16a\Rightarrow a^2-16=0\Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ a=-4 \end{cases}$$

$$a=4\Rightarrow y-\frac{1}{4}4^2-4\cdot 4-4=\left(\frac{4}{2}+4\right)\cdot(x-4)\Rightarrow y=6x \ ; \ Punto\ (4,24)$$

$$a=-4\Rightarrow y-\frac{1}{4}(-4)^2-4\cdot(-4)-4=\left(\frac{-4}{2}+4\right)\cdot(x+4)\Rightarrow y=2x \ ; \ Punto\ (-4,-8)$$

Estudia la derivabilidad de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{sen\,x}{x} & si\ \ x>0\\ 1 & si\ \ x\le 0\end{cases}$.

MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Si la función es derivable en $x=0$, primero tiene que ser continua en dicho punto, luego:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{sen\,x}{x}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\cos x}{1}=1\\ \lim\limits_{x\to 0^-}1=1\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}=\lim\limits_{x\to 0^+}=1\Rightarrow \text{ Continua}$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos x-sen\,x}{x^2} & si\quad x>0\\ 0 & si\quad x<0\end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l}f'(0^-)=0\\ f'(0^+)=\dfrac{0}{0}=\dfrac{\cos x-x\,sen\,x-\cos x}{2x}=\dfrac{-x\,sen\,x}{2x}=\dfrac{0}{0}=\dfrac{-sen\,x-x\cos x}{2}=0\end{array}\right\}\Rightarrow f'(0^-)=f'(0^+)=0$$

Luego, la función es derivable.

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por: $f(x)=x^2\cdot e^{\frac{x}{2}}$.
a) Calcula: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
b) Calcula los intervalos de monotonía y los extremos locales de f (puntos donde se obtienen y valor que alcanzan).
MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\lim_{x\to-\infty} x^2\cdot e^{\frac{x}{2}}=\infty\cdot 0=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^{-\frac{x}{2}}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot e^{\frac{x}{2}}=\infty$$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$y'=2x\cdot e^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\cdot x^2=e^{\frac{x}{2}}\left(2x+\frac{1}{2}x^2\right)=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=-4$$

	$(-\infty,-4)$	$(-4,0)$	$(0,\infty)$
Signo y'	+	–	+
Función	C	D	C

$\downarrow$ $\downarrow$

Máximo $\left(-4,16e^{-2}\right)$ mínimo $(0,0)$

Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por: $f(x)=x^3-5x^2+5x+3$ y sea *r* la recta de ecuación $2x+y=6$.
a) Determina, si es posible, un punto de la gráfica de *f* en el que la recta tangente sea *r*.
b) ¿Hay algún punto de la gráfica de *f* en el que la recta normal a la gráfica sea *r*?. Justifica la respuesta.
MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Si *r* es tangente se tiene que cumplir que:

$$f'(x)=-2\Rightarrow 3x^2-10x+5=-2\Rightarrow 3x^2-10x+7=0\Rightarrow x=1\ ;\ x=\frac{8}{3}$$

Sólo el punto $(1,4)$, pertenece a la recta y a la curva.

b) La recta $2x+y=6$ corta a la función en el punto $(3,0)$, pero en ese punto la recta tangente tiene de pendiente 2 y no $\frac{1}{2}$, luego, no existe ese punto.

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por: $f(x)=\begin{cases} 3ax+b & si \quad x\le 0 \\ e^{x(ax+b)} & si \quad x>0 \end{cases}$. Determina a y b sabiendo que f es derivable.
MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Si la función es derivable en $x=0$, primero tiene que ser continua en dicho punto, luego:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} 3ax+b=b \\ \lim_{x\to 0^+} e^{x(ax+b)}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow b=1$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} 3a & si \quad x\le 0 \\ (2ax+b)\cdot e^{x(ax+b)} & si \quad x>0 \end{cases}$

Como es derivable en $x=0$, se cumple que:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=3a \\ f'(0^+)=b \end{array}\right\} \Rightarrow 3a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{3}$$

Considera la curva de ecuación $y = \dfrac{x^3+2x}{x^2-2x-3}$.
a) Determina sus asíntotas.
b) ¿Corta la curva a alguna de sus asíntotas en algún punto?. Justifica la respuesta.
MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos el dominio de la función:

$$x^2-2x-3=0 \Rightarrow x=-1 \ ; \ x=3 \Rightarrow D=\mathbb{R}-\{-1,3\}$$

a) Asíntota vertical: $x=-1$; $x=3$.

Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x}{x^2-2x-3}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2}{2x-2}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x}{2}=\infty \Rightarrow$ No tiene.

Asíntota oblicua: $y=x+2$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^3+2x}{x^2-2x-3}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x}{x^3-2x^2-3x}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3+2x}{x^2-2x-3}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3+2x-x^3+2x^2+3x}{x^2-2x-3}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2+5x}{x^2-2x-3}\right]=2$$

b) Calculamos el punto de corte de la asíntota oblicua con la función.

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{x^3+2x}{x^2-2x-3}\\ y&=x+2\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{x^3+2x}{x^2-2x-3}=x+2\Rightarrow 9x+6=0\Rightarrow\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$$

Estudia la derivabilidad de la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{3+x^2}-x & si\ \ 0<x\le 1\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{x^2}{4} & si\ \ x>1\end{cases}$$

Calcula la función derivada.
MATEMÁTICAS II. 2002. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Vamos a estudiar primero la continuidad en $x=1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{3+x^2}-x=1\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x}+\dfrac{x^2}{4}=\dfrac{5}{4}\end{array}\right\}\Rightarrow \text{No es continua en } x=1\text{, por lo tanto, no es derivable en } x=1$$

b) Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{3+x^2}}-1 & si\ \ 0<x<1\\ -\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{x}{2} & si\ \ x>1\end{cases}$

Considera la función *f* definida por $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$ para $x\neq 1$.
a) Calcula las asíntotas de la gráfica de *f*.
b) Estudia la posición de la gráfica de *f* respecto de sus asíntotas.
MATEMÁTICAS II. 2002. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Asíntota vertical es $x=1$.

Asíntota horizontal: $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{1}=\infty\Rightarrow$ No tiene.

Asíntota oblicua: $y=x-1$

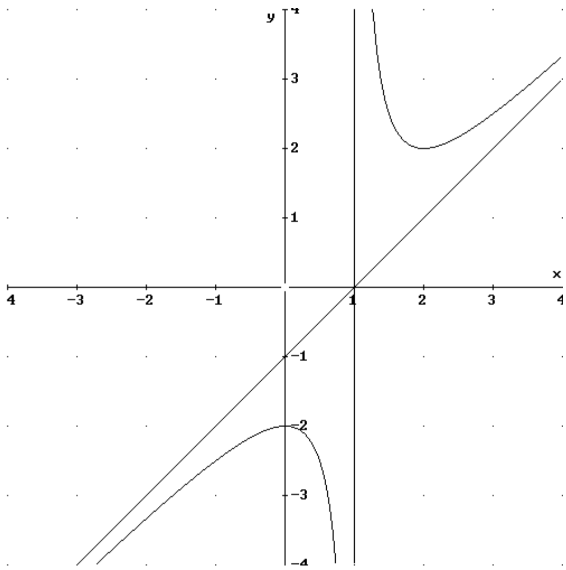
$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+2}{x^2-x}=1 \quad ;$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-2x+2}{x-1}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-2x+2-x^2+x}{x-1}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{-x+2}{x-1}\right]=-1$$

b) Calculamos la posición de la gráfica respecto de las asíntotas:

$\lim_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}-(x-1)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2-2x+2-x^2+2x-1}{x-1}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\dfrac{1}{x-1}\right]=0^+$ luego, $f(x)$ está por encima de la asíntota oblicua.

$\lim_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}-(x-1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x^2-2x+2-x^2+2x-1}{x-1}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\dfrac{1}{x-1}\right]=0^-$ luego, $f(x)$ está por debajo de la asíntota oblicua.



Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & t & 0 \\ t & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula los valores de t para los que el determinante de A es positivo y halla el mayor valor que alcanza dicho determinante.
MATEMÁTICAS II. 2002. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos el determinante

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & t & 0 \\ t & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-t^2+3t+4$$

Vemos que es una función cuadrática. Calculamos los puntos de corte con el eje X.

$$|A|=-t^2+3t+4=0 \Rightarrow t=-1 \ ; \ t=4$$

Luego, para todos los valores de $t\in(-1,4)\Rightarrow |A|$ es positivo.

Calculamos la derivada y la igualamos a cero.

$$-2t+3=0\Rightarrow t=\frac{3}{2}$$

Luego, el máximo se alcanza para $t=\dfrac{3}{2}$ y vale $|A|=\dfrac{25}{4}$