

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

- Junio, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción B

Calcula a sabiendo que los planos $ax + y - 7z = -5$ y $x + 2y + a^2z = 8$ se cortan en una recta que pasa por el punto $A(0, 2, 1)$ pero que no pasa por el punto $B(6, -3, 2)$.
MATEMÁTICAS II. 2001. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Si la recta pasa por el punto $A(0, 2, 1)$, este punto debe verificar la ecuación de dicha recta, luego:

$$x + 2y + a^2z = 8 \Rightarrow 0 + 2 \cdot 2 + a^2 \cdot 1 = 8 \Rightarrow a = \pm 2$$

Si $a = 2$, entonces:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y - 7z = -5 \\ x + 2y + 4z = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 6z - 6 \\ y = 7 - 5z \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \text{pasa por } B(6, -3, 2)$$

Si $a = -2$, entonces:

$$\left. \begin{array}{l} -2x + y - 7z = -5 \\ x + 2y + 4z = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{18 - 18z}{5} \\ y = \frac{11 - z}{5} \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \text{No pasa por } B(6, -3, 2)$$

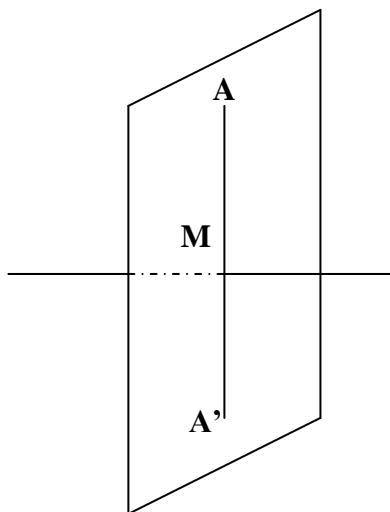
Luego, $a = -2$

Calcula las coordenadas del punto simétrico del $(1,-3,7)$ respecto de la recta dada por las ecuaciones $x-1 = y+3 = \frac{z-4}{2}$

MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

El punto A' simétrico del punto A respecto de una recta está situado en un plano que pasando por el punto A es perpendicular a dicha recta y además la distancia que hay desde el punto A a la recta es la misma que la que hay desde el punto A' hasta dicha recta.



Calculamos la ecuación del plano que pasando por el punto A es perpendicular a la recta. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego:

$$\text{Vector normal del plano} = \text{vector director de la recta} = (1,1,2)$$

La ecuación de todos los planos perpendiculares a dicha recta es: $x + y + 2z + D = 0$

Como nos interesa el que pasa por el punto $A(1,-3,7)$

$$1 - 3 + 2 \cdot 7 + D = 0 \Rightarrow D = -12$$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (M); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano:

$$1 \cdot (1+t) + 1 \cdot (-3+t) + 2 \cdot (4+2t) - 12 = 0 \Rightarrow t = 1$$

luego las coordenadas del punto M son: $x = 1+1 = 2$; $y = -3+1 = -2$; $z = 4+2 = 6$

Como el punto M es el punto medio del segmento AA' , si llamamos (a,b,c) a las coordenadas del punto A' , se debe verificar que:

$$\frac{1+a}{2} = 2; a = 3; \frac{-3+b}{2} = -2; b = -1; \frac{7+c}{2} = 6; c = 5$$

Halla la distancia entre el origen de coordenadas y la recta intersección de los planos de ecuaciones respectivas: $x + y + 2z = 4$; $2x - y + z = 2$
MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta a paramétricas.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + 2z = 4 \\ 2x - y + z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow B = (2 - t, 2 - t, t)$$

El vector $\vec{AB} = (2 - t, 2 - t, t)$ y el vector director de la recta $(-1, -1, 1)$, tienen que ser perpendiculares, luego:

$$\vec{AB} \cdot (-1, -1, 1) = 0 \Rightarrow -2 + t - 2 + t + t = 0 \Rightarrow t = \frac{4}{3}$$

La distancia viene dada por el módulo del vector $\vec{AB} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$, luego:

$$\text{Calculamos los vectores: } d = \left| \vec{AB} \right| = \sqrt{\frac{4 + 4 + 16}{9}} = \sqrt{\frac{8}{3}} = 1'63 \text{ u}$$

Calcula el punto de la recta de ecuaciones $x-1 = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-3}$ más cercano al punto $A(1,-1,1)$.

MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta a paramétricas.

$$x-1 = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-3} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+t \\ y = -2+2t \Rightarrow B = (1+t, -2+2t, -1-3t) \\ z = -1-3t \end{cases}$$

El vector $\vec{AB} = (t, -1+2t, -2-3t)$ y el vector director de la recta $(1, 2, -3)$, tienen que ser perpendiculares, luego:

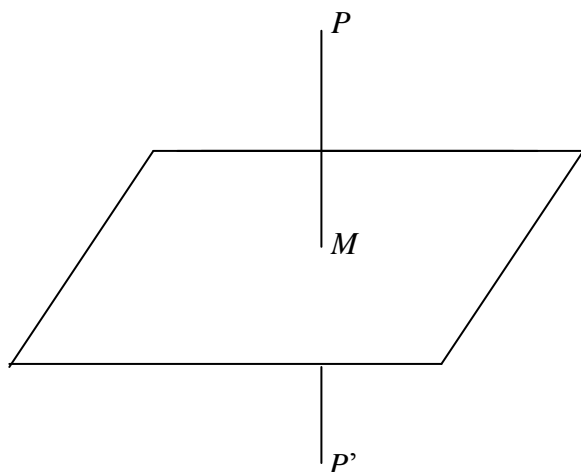
$$\vec{AB} \cdot (1, 2, -3) = 0 \Rightarrow t - 2 + 4t + 6 + 9t = 0 \Rightarrow t = -\frac{4}{14} = -\frac{2}{7}$$

Luego, el punto más cercano es: $B = \left(1 - \frac{2}{7}, -2 - \frac{4}{7}, -1 + \frac{6}{7}\right) = \left(\frac{5}{7}, -\frac{18}{7}, -\frac{1}{7}\right)$

Halla las coordenadas del punto simétrico del punto $P(1,2,-2)$ respecto al plano de ecuación $3x + 2y + z - 7 = 0$.

MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N



Calculamos la ecuación de la recta que pasando por el punto P es perpendicular al plano. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego: Vector normal del plano = vector director de la recta = $(3, 2, 1)$.

La ecuación paramétrica de la recta será:
$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (M); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano: $3 \cdot (1 + 3t) + 2 \cdot (2 + 2t) + (-2 + t) - 7 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}$

Luego, las coordenadas del punto M son: $x = \frac{10}{7}; y = \frac{16}{7}; z = -\frac{13}{7}$

Como el punto M es el punto medio del segmento PP' , si llamamos (a, b, c) a las coordenadas del punto P' , se debe verificar que:

$$\frac{a+1}{2} = \frac{10}{7}; a = \frac{13}{7}; \frac{b+2}{2} = \frac{16}{7}; b = \frac{18}{7}; \frac{c-2}{2} = -\frac{13}{7}; c = -\frac{12}{7}$$

Luego, el punto simétrico es el $P' \left(\frac{13}{7}, \frac{18}{7}, -\frac{12}{7} \right)$

Halla la ecuación del plano cuyo punto más próximo al origen es $(-1, 2, 1)$.
MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

El vector normal del plano será $\vec{n} = (-1, 2, 1) - (0, 0, 0) = (-1, 2, 1)$. Por lo tanto, el plano será:

$$-x + 2y + z + D = 0$$

y como tiene que pasar por el punto $(-1, 2, 1)$, tenemos que:

$$-(-1) + 2 \cdot 2 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -6 \Rightarrow -x + 2y + z - 6 = 0$$

Determina los puntos de la recta de ecuaciones $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{2}$ que equidistan de los planos de ecuaciones $3x + 4y - 1 = 0$; $4x - 3z - 1 = 0$.

MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta a paramétricas.

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -2 + 2t \end{cases} \Rightarrow P = (1 + 2t, -1 + 3t, -2 + 2t)$$

$$\frac{3(1+2t) + 4(-1+3t) - 1}{\sqrt{9+16}} = + \frac{4(1+2t) - 3(-2+2t) - 1}{\sqrt{16+9}} \Rightarrow t = \frac{11}{16} \Rightarrow P = \left(\frac{19}{8}, \frac{17}{16}, -\frac{5}{8} \right)$$

$$\frac{3(1+2t) + 4(-1+3t) - 1}{\sqrt{9+16}} = - \frac{4(1+2t) - 3(-2+2t) - 1}{\sqrt{16+9}} \Rightarrow t = -\frac{7}{20} \Rightarrow P = \left(\frac{3}{10}, -\frac{41}{20}, -\frac{27}{10} \right)$$

Halla las ecuaciones de la recta que se apoya perpendicularmente en las rectas r y s definidas respectivamente por: $r \equiv x - 1 = y - 2 = \frac{z - 1}{-2}$; $s \equiv \frac{x - 4}{-1} = \frac{y + 1}{3} = \frac{z}{2}$
MATEMÁTICAS II. 2000. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Pasamos las dos rectas a paramétricas y calculamos un punto genérico de cada recta.

$$r \equiv x - 1 = y - 2 = \frac{z - 1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \Rightarrow A = (1 + t, 2 + t, 1 - 2t)$$
$$s \equiv \frac{x - 4}{-1} = \frac{y + 1}{3} = \frac{z}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - s \\ y = -1 + 3s \\ z = 2s \end{cases} \Rightarrow B = (4 - s, -1 + 3s, 2s)$$

Calculamos las coordenadas del vector $\vec{AB} = (3 - s - t, -3 + 3s - t, -1 + 2s + 2t)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{AB} \cdot (1, 1, -2) = 0 \Rightarrow -2s - 6t + 2 = 0 \\ \vec{AB} \cdot (-1, 3, 2) = 0 \Rightarrow 14s + 2t - 14 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow s = 1 ; t = 0$$

Luego, la perpendicular común es: $\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{0} = \frac{z - 1}{1}$

Calcula el volumen de un cubo sabiendo que dos de sus caras están, respectivamente, en los planos $2x - 2y + z - 1 = 0$ y $2x - 2y + z - 5 = 0$
MATEMÁTICAS II. 2000. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la distancia entre los dos planos. Como los dos planos son paralelos, calculamos la distancia entre un punto del primer plano, por ejemplo, el $A = (0,0,1)$ y el segundo plano.

$$d = \frac{|1-5|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{4}{3}$$

Como esta distancia coincide con la arista del cubo, su volumen será: $V = d^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} u^3$