DISTRITO UNIVERSITARIO DE ANDALUCÍA
2015
MATEMÁTICAS (Mayores de 25 años).

Ejercicio 1.-

a) [5 puntos] Dado el polinomio $x^3 - x^2 - 4x + 4$, halla sus raíces y factorízalo. **[5 puntos]**

b) [5 puntos] Calcula $\int \frac{3x}{x^2+1}\,dx$

$a)$

$$\text{Posibles soluciones} \quad \pm 1,\, 2,\, 4$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -4 & 4 \\ 1 & & 1 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & \underline{|0} \end{array}$$

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-1)\cdot\left(x^2-4\right) = (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+2)$$

$$\text{Raices} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=1 \\ x=2 \end{cases}$$

$b)$

$$\int \frac{3x}{x^2+1}\,dx = 3\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = 3\int \frac{1}{t}\,\frac{dt}{2} = \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{3}{2}\ln t = \frac{3}{2}\ln\left(x^2+1\right) = \ln\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} = \ln\sqrt{\left(x^2+1\right)^3} * K$$

$$x^2+1 = t \Rightarrow 2x\,dx = dt \Rightarrow x\,dx = \frac{dt}{2}$$

Ejercicio 2.-

a) [5 puntos] Calcula $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n+2-\sqrt{n^2+n}\right)$

b) [5 puntos] Resuelve la ecuación $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}=5$

$a)$

$$\lim_{n\to\infty}\left(n+2-\sqrt{n^2+n}\right) = \infty-\infty = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(n+2-\sqrt{n^2+n}\right)\cdot\left(n+2+\sqrt{n^2+n}\right)}{n+2+\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2-\left(n^2+n\right)}{n+2+\sqrt{n^2+n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+4n+4-n^2-n}{n+2+\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{n+2+\sqrt{n^2+n}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty}\frac{3\frac{n}{n}+\frac{4}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{2}{n}+\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{4}{n}}{1+\frac{2}{n}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} =$$

$$= \frac{3+\frac{4}{\infty}}{1+\frac{2}{\infty}+\sqrt{1+\frac{1}{\infty}}} = \frac{3+0}{1+0+\sqrt{1+0}} = \frac{3}{2}$$

Continuación del Ejercicio 2
b)

$$\sqrt{x-4}=5-\sqrt{x+1}\Rightarrow\left(\sqrt{x-4}\right)^2=\left(5-\sqrt{x+1}\right)^2\Rightarrow x-4=25-10\sqrt{x+1}+x+1\Rightarrow 10\sqrt{x+1}=30\Rightarrow$$
$$\sqrt{x+1}=3\Rightarrow\left(\sqrt{x+1}\right)^2=3^2\Rightarrow x+1=9\Rightarrow x=8\Rightarrow\sqrt{8-4}+\sqrt{8+1}=5\Rightarrow 2+3=5\Rightarrow Comprobado$$
$$x=8$$

<u>Ejercicio 3.-</u>

a) **[5 puntos]** Sabiendo que α es un ángulo que cumple $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ y $sen\left(\alpha\right)=\frac{3}{5}$ calcula $\cos\left(\alpha\right)$ y sen (2α)
b) **[5 puntos]** Considera la recta **x + 2y - 3 = 0**. Calcula la recta paralela a ella que pasa por el punto (1 , -1)

$a)$

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-sen^2\left(\alpha\right)}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\pm\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\pm\sqrt{\frac{16}{25}}=\pm\frac{4}{5}\Rightarrow como\ \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{4}{5}$$
$$sen\left(2\alpha\right)=2\cdot sen\left(\alpha\right)\cdot\cos\left(\alpha\right)=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{24}{25}$$

b) La recta al ser paralela tiene la misma pendiente y es de la forma **x + 2y + D = 0**

$$1+2\cdot\left(-1\right)+D=0\Rightarrow 1-2+D=0\Rightarrow D=1\Rightarrow x+2y+1=0$$
$$H^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2=L^2\Rightarrow H^2=L^2-\frac{L^2}{4}\Rightarrow H^2=\frac{3L^2}{4}\Rightarrow L^2=\frac{4}{3}H^2\Rightarrow L=\pm\sqrt{\frac{4}{3}H^2}=\pm\frac{2H}{\sqrt{3}}\Rightarrow$$
$$L=\frac{2\sqrt{3}H}{3}\Rightarrow L=\frac{2\sqrt{3}\cdot 3}{3}=2\sqrt{3}\ cm\Rightarrow Área=\frac{1}{2}L\cdot H=\frac{1}{2}\frac{2H}{\sqrt{3}}\cdot H=\frac{H^2}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}H^2}{3}=\frac{\sqrt{3}\cdot 3^2}{3}=3\sqrt{3}\ cm^2$$

<u>Ejercicio 4.-</u>
a) [5 puntos] La altura de un triángulo equilátero mide **3 cm**. Calcula cuanto mide un lado y el área del triángulo.
b) **[5 puntos]** Halla los valores de **a** y **b** sabiendo que la recta **y = ax + b** pasa por los puntos de intersección de las parábolas de ecuaciones **y = x² - 3x - 1 , y = -x² - 3x + 1**

a) Siendo **L** el lado del triángulo y **H** la altura

$$H^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2=L^2\Rightarrow H^2=L^2-\frac{L^2}{4}\Rightarrow H^2=\frac{3L^2}{4}\Rightarrow L^2=\frac{4}{3}H^2\Rightarrow L=\pm\sqrt{\frac{4}{3}H^2}=\pm\frac{2H}{\sqrt{3}}\Rightarrow$$
$$L=\frac{2\sqrt{3}H}{3}\Rightarrow L=\frac{2\sqrt{3}\cdot 3}{3}=2\sqrt{3}\ cm\Rightarrow Área=\frac{1}{2}L\cdot H=\frac{1}{2}\frac{2H}{\sqrt{3}}\cdot H=\frac{H^2}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}H^2}{3}=\frac{\sqrt{3}\cdot 3^2}{3}=3\sqrt{3}\ cm^2$$

Continuación del Ejercicio 4

$b)$

$$x^2-3x-1=-x^2-3x+1 \Rightarrow 2x^2-2=0 \Rightarrow 2x^2=2 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=-1 \Rightarrow f(-1)=(-1)^2-3\cdot(-1)-1=1+3-1=3 \Rightarrow 3=a\cdot(-1)+b \\ x=1 \Rightarrow g(1)=1^2-3\cdot 1+1=1-3+1=-1 \Rightarrow 1=a\cdot 1+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a+b=3 \\ a+b=1 \end{cases} \Rightarrow 2b=4 \Rightarrow b=2$$

$$a+2=1 \Rightarrow a=1 \Rightarrow y=x+2$$

Ejercicio 5.-

a) **[5 puntos]** Resuelve la ecuación $\log(5x+4)-\log(2)=\frac{1}{2}\log(x+4)$

b) [5 puntos] Halla los valores de **x** para los que se alcanzan los máximos y mínimos relativos de la función **f(x) = 4x³ - 8x² + 5x + 2**

$a)$

$$\log\left(\frac{5x+4}{2}\right)=\log(x+4)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{5x+4}{2}=\sqrt{x+4} \Rightarrow 5x+4=2\sqrt{x+4} \Rightarrow (5x+4)^2=\left(2\sqrt{x+4}\right)^2 \Rightarrow$$

$$25x^2+40x+16=4\cdot(x+4) \Rightarrow 25x^2+40x+16=4x+16 \Rightarrow 25x^2+36x=0 \Rightarrow x(25x+36)=0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=0 \\ 25x+36=0 \Rightarrow 25x=-36 \Rightarrow x=-\frac{36}{25} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow 5\cdot 0+4=2\sqrt{0+4} \Rightarrow 4=2\cdot 2 \Rightarrow Solución \Rightarrow x=0 \\ x=-\frac{36}{25} \Rightarrow 5\cdot\left(-\frac{36}{25}\right)+4=2\sqrt{-\frac{36}{25}+4} \Rightarrow -\frac{36}{5}+4=2\sqrt{\frac{64}{25}} \Rightarrow -\frac{16}{5}\neq\frac{2\cdot 8}{5} \Rightarrow No\ es\ solución \end{cases}$$

$b)$

$$f'(x)=12x^2-16x+5 \Rightarrow 12x^2-16x+5=0 \Rightarrow \Delta=(-16)^2-4\cdot 12\cdot 5=256-240=16\geq 0 \Rightarrow$$

$$x=\frac{16\pm\sqrt{16}}{2\cdot 12} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{16+4}{24}=\frac{20}{24}=\frac{5}{6} \\ x=\frac{16-4}{24}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f''(x)=24x-16 \Rightarrow \begin{cases} f''\left(\frac{5}{6}\right)=24\cdot\left(\frac{5}{6}\right)-16=20-16=4 \Rightarrow Min \\ f''\left(\frac{1}{2}\right)=24\cdot\left(\frac{1}{2}\right)-16=12-16=-4 \Rightarrow Max \end{cases}$$

$$Máximo\ relativo \Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3-8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+2=\frac{4}{8}-\frac{8}{4}+\frac{5}{2}+2=\frac{6}{2}=3$$

$$Mínimo\ relativo \Rightarrow x=\frac{5}{6} \Rightarrow f\left(\frac{5}{6}\right)=4\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3-8\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2+5\cdot\left(\frac{5}{6}\right)+2=\frac{500}{216}-\frac{200}{36}+\frac{25}{6}+2=\frac{632}{216}=\frac{79}{27}$$

Ejercicio 6.-

a) **[5 puntos]** Halla todos los valores de **x** para los que $\frac{x-2}{2x+3} \le 0$

b) **[5 puntos]** Halla la ecuación de una circunferencia sabiendo que uno de sus diámetros tiene por extremos los puntos **A(7 , - 2)** y **B(-1 , 4).**

$a)$

$$\frac{x-2}{2x+3} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2>0 \Rightarrow x>2 \\ 2x+3>0 \Rightarrow 2x>-3 \Rightarrow x>-\frac{3}{2} \end{cases}$$

	$-\infty$ a $-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$ a **2**	**2** a ∞
x > 2	**(-)**	**(-)**	**(+)**
x > $-\frac{3}{2}$	**(-)**	**(+)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**	**(+)**

Solución $\forall x \in \Re / -\frac{3}{2} \le x \le 2$

b) Hallaremos el centro **O** que es el punto medio de los puntos dados **A** y **B,** siendo el radio la mitad del módulo **AB**

$$\begin{cases} x_O = \frac{7+(-1)}{2} = 3 \\ y_O = \frac{(-2)+4}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow O(3\,,1)$$

$$\overrightarrow{AB} = (-1\,,4)-(7\,,-2) = (-8\,,6) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-8)^2+6^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10 \Rightarrow r = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|}{2} = \frac{10}{2} = 5 \Rightarrow$$

$$(x-3)^2+(y-1)^2 = 5^2 \Rightarrow x^2-6x+9+y^2-2y+1-25=0 \Rightarrow x^2+y^2-6x-2y-15=0$$

Continuación del Ejercicio 6

$$\text{Puntos de corte con } OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3x = 0 \Rightarrow (x-3)\,x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow x^2 - 3x = x \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow (x-4)\,x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$A = \left|\int_0^3 \left(x^2 - 3x\right) dx\right| + \int_0^3 x\,dx + \int_3^4 x\,dx - \int_3^4 \left(x^2 - 3x\right) dx = \int_0^3 \left(-x^2 + 3x\right) dx + \int_3^4 \left(-x^2 + 3x\right) dx + \int_0^4 x\,dx$$

$$A = \int_0^4 \left(-x^2 + 3x\right) dx + \int_0^4 x\,dx = \int_0^4 \left(-x^2 + 4x\right) dx = -\frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^4 + 4\cdot\frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^4 = -\frac{1}{3}\cdot\left(4^3 - 0^3\right) + 2\cdot\left(4^2 - 0^3\right)$$

$$A = -\frac{64}{3} + 32 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{96 - 64}{3} = \frac{32}{3}\,u^2$$