

DISTRITO UNIVERSITARIO DE MÁLAGA
2014
MATEMÁTICAS (Mayores de 25 años).

Ejercicio 1.-

a) **[5 puntos]** Sabiendo que $\log(a) = \frac{1}{2}$, $\log(b) = \frac{2}{3}$ y $\log(c) = \frac{3}{4}$, halla $\log\left(\frac{a^3}{b^2c}\right)$

b) **[5 puntos]** De un rectángulo sabemos que el área vale **192 metros cuadrados** y que uno de sus lados mide 16 metros. Calcula cuanto mide la diagonal

a)

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{a^3}{b^2c}\right) &= \log(a^3) - \log(b^2c) = 3 \cdot \log(a) - [\log(b^2) + \log(c)] = 3 \cdot \frac{1}{2} - \log(b^2) - \log(c) = \\ &= \frac{3}{2} - 2 \cdot \log(b) - \frac{3}{4} = \frac{3}{2} - 2 \cdot \frac{2}{3} - \frac{3}{4} = \frac{3}{2} - \frac{4}{3} - \frac{3}{4} = \frac{18 - 16 - 9}{12} = -\frac{7}{12}\end{aligned}$$

b) Siendo el lado L el que no conocemos tendremos

$$192 = 16 \cdot L \Rightarrow L = \frac{192}{16} = 12 \text{ m} \Rightarrow \text{Diagonal} = \sqrt{16^2 + L^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{196 + 144} = \sqrt{400} = 20 \text{ m}$$

Ejercicio 2.-

a) **[5 puntos]** Halla el valor de **m** que el valor numérico del polinomio

$$P(x) = x^4 + 3x^3 + 2mx^2 - m^2x + 1, \text{ vale } -2 \text{ cuando } x = -1$$

b) **[5 puntos]** Halla la ecuación de una circunferencia que es concéntrica con la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$ y que pase por el punto **P(2, 2)**

a)

$$P(-1) = -2 \Rightarrow (-1)^4 + 3 \cdot (-1)^3 + 2m \cdot (-1)^2 - m^2 \cdot (-1) + 1 = -2 \Rightarrow 1 - 3 + 2m + m^2 + 1 + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$m^2 + 2m + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

b)

$$\text{Coordenadas del centro} \Rightarrow \begin{cases} -2a = -2 \Rightarrow a = 1 \\ -2b = -4 \Rightarrow b = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Distancia centro a P} \Rightarrow \overrightarrow{CP} = (2, 2) - (1, 2) = (1, 0) \Rightarrow$$

$$\text{Radio} = |\overrightarrow{CP}| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 1 \Rightarrow$$

$$C \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$$

Ejercicio 3.-

a) [5 puntos] Resuelve la ecuación y comprueba las soluciones $x + \sqrt{x-4} = 24$,

b) [5 puntos] Estudia las asíntotas de la función dadas por $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

a)

$$\sqrt{x-4} = 24 - x \Rightarrow (\sqrt{x-4})^2 = (24-x)^2 \Rightarrow x-4 = 576 - 48x + x^2 \Rightarrow x^2 - 49x + 580 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = (-49)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 580 = 2401 - 2320 = 81 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{49 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{49+9}{2} = \frac{58}{2} = 29 \\ x = \frac{49-9}{2} = \frac{40}{2} = 20 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{Cuando} \Rightarrow \begin{cases} x = 29 \Rightarrow 29 + \sqrt{29-4} = 24 \Rightarrow 29 + \sqrt{25} = 24 \Rightarrow 29 + 5 = 24 \Rightarrow 34 \neq 24 \Rightarrow \text{No solución} \\ x = 20 \Rightarrow 20 + \sqrt{20-4} = 24 \Rightarrow 20 + \sqrt{16} = 24 \Rightarrow 20 + 4 = 24 \Rightarrow 24 = 24 \Rightarrow \text{Solución} \end{cases}$$

b)

Asíntotas verticales

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1^3}{1^2-1} = \frac{1}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow \text{Asíntota vertical} \\ f(-1) = \frac{(-1)^3}{(-1)^2-1} = -\frac{1}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow \text{Asíntota vertical} \end{cases}$$

Asíntotas horizontales

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{\infty^3}{\infty^2-1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3} - \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}} = \frac{1}{\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty}} = \frac{1}{0-0} = \frac{1}{0} \Rightarrow \text{Sin solución}$$

No hay asíntota horizontal cuando $x \rightarrow \infty$

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{(-\infty)^3}{(-\infty)^2-1} = \frac{-\infty^3}{\infty^2-1} = -\frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3} - \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}} = \frac{1}{\frac{1}{-\infty} - \frac{1}{-\infty}} = \frac{1}{0} \Rightarrow \text{Sin solución}$$

No hay asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$

Continuación del Ejercicio 3

b) Continuación

Asíntotas oblicuas

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1 - 0} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1}{\infty}}{1 - \frac{1}{\infty}} = \frac{0}{1 - 0} = 0$$

Existe una asíntota oblicua, $y = x$, cuando $x \rightarrow \infty$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\infty}} = \frac{1}{1 - 0} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{-\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1}{-\infty}}{1 - \frac{1}{\infty}} = \frac{0}{1 - 0} = 0$$

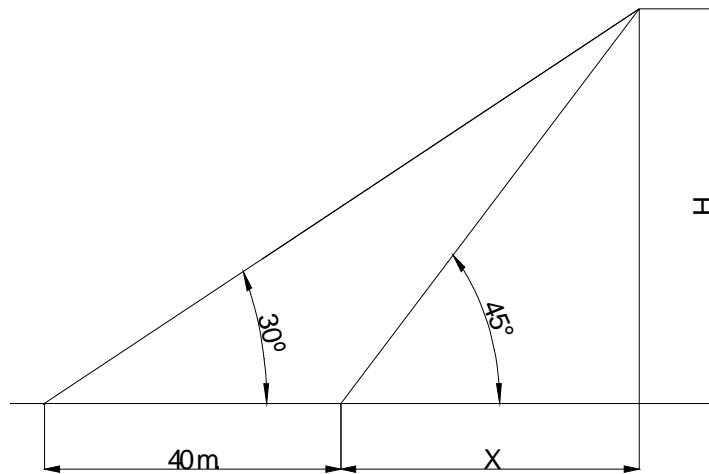
Existe una asíntota oblicua, $y = x$, cuando $x \rightarrow -\infty$

Ejercicio 4.-

a) [5 puntos] Al mirar la cima de una torre, lo hacemos bajo un ángulo de 45° con la horizontal. Como nos deslumbra el sol, nos alejamos 40 metros de la base de la torre y el ángulo se reduce a 30° . Calcula la distancia que nos separa de ella ahora que no nos deslumbra el sol.

b) [5 puntos] Calcula los valores **a** y **b**, sabiendo que la función $f(x) = 2x^3 + ax^2 - b$ tiene un extremo relativo en $x = 1$ de valor 3

a)



$$\begin{cases} \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{H}{X} \Rightarrow H = X \operatorname{tg} 45^\circ \\ \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{H}{X+40} \Rightarrow H = (X+40) \operatorname{tg} 30^\circ \end{cases} \Rightarrow X \operatorname{tg} 45^\circ = (X+40) \operatorname{tg} 30^\circ \Rightarrow X \cdot 1 = (X+40) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$$X = X \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow X - X \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow X \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\frac{40\sqrt{3}}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}} = \frac{40\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

$$\text{distancia a la torre} = 40 + \frac{40\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = 40 \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \right) = 40 \cdot \left(\frac{3-\sqrt{3}+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \right) = \frac{120}{3-\sqrt{3}} = 94'641 \text{ m.}$$

b)

$$f'(x) = 6x^2 + 2ax \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 3 \Rightarrow 2 \cdot 1^3 + a \cdot 1^2 - b = 3 \Rightarrow a - b = 1 \\ f'(1) = 0 \Rightarrow 6 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 = 0 \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow a = -3 \end{cases} \Rightarrow (-3) - b = 1 \Rightarrow$$

$$b = -3 - 1 = -4 \Rightarrow f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$$

Ejercicio 5.-

a) [5 puntos] Calcula la distancia entre las rectas $-2x + 3y + 5 = 0$ y $2x - 3y + 6 = 0$

b) [5 puntos] Determinar el crecimiento y el decrecimiento de la función dada por

$$p(x) = 2x^3 - 15x^2 - 36x + 2$$

a) Solo si son rectas paralelas se podrá calcular la distancia entre ellas, para ello sus vectores directores son iguales o proporcionales

$$\begin{cases} r \equiv 2x - 3y - 5 = 0 \\ s \equiv 2x - 3y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{2} = \frac{-3}{-3} \Rightarrow d(r, s) = \frac{|(-5) - 6|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|-11|}{\sqrt{13}} = \frac{11\sqrt{13}}{13} u$$

b)

$$p'(x) = 6x^2 - 30x - 36 = 6(x^2 - 5x - 6) \Rightarrow$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 + 24 = 49 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5+7}{2} = 6 \\ x = \frac{5-7}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$p'(x) = 6(x-6)(x+1) \Rightarrow \text{Crecimiento} \Rightarrow p'(x) > 0 \Rightarrow \begin{cases} 6 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathfrak{R} \\ x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \\ x-6 > 0 \Rightarrow x > 6 \end{cases}$$

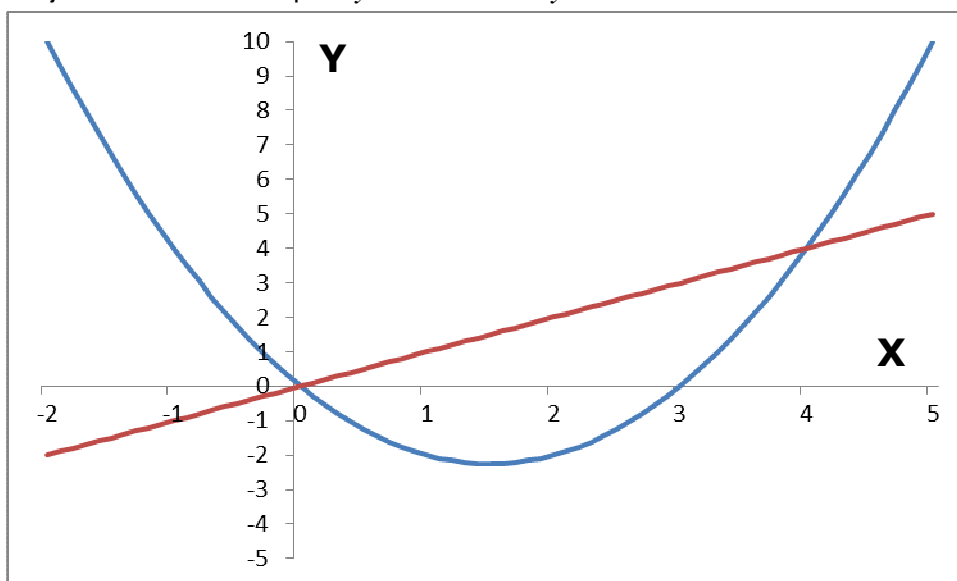
	$-\infty$	-1	6	∞
$6 > 0$	(+)	(+)	(+)	(+)
$x > -1$	(-)	(+)	(+)	(+)
$x > 6$	(-)	(-)	(+)	(+)
Solución	(+)	(-)	(+)	(+)

Creciente $\forall x \in \mathfrak{R} / (x < -1) \cup (x > 6)$

Decreciente $\forall x \in \mathfrak{R} / -1 < x < 6$

Ejercicio 6.-

[10 puntos] Dibuja el recinto limitado por $y = x^2 - 3x$ e $y = x$. Halla su área



Continuación del Ejercicio 6

$$\text{Puntos de corte con } OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3x = 0 \Rightarrow (x-3)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-3 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow x^2 - 3x = x \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow (x-4)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-4 = 0 \Rightarrow x = 4 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$A = \left| \int_0^3 (x^2 - 3x) dx \right| + \int_0^3 x dx + \int_3^4 x dx - \int_3^4 (x^2 - 3x) dx = \int_0^3 (-x^2 + 3x) dx + \int_3^4 (-x^2 + 3x) dx + \int_0^4 x dx$$

$$A = \int_0^4 (-x^2 + 3x) dx + \int_0^4 x dx = \int_0^4 (-x^2 + 4x) dx = -\frac{1}{3}[x^3]_0^4 + 4 \cdot \frac{1}{2}[x^2]_0^4 = -\frac{1}{3} \cdot (4^3 - 0^3) + 2 \cdot (4^2 - 0^2)$$

$$A = -\frac{64}{3} + 32 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{96 - 64}{3} = \frac{32}{3} u^2$$