

**DISTRITO UNIVERSITARIO DE MÁLAGA**  
**2013**  
**MATEMÁTICAS ( Mayores de 25 años).**

**Ejercicio 1.-**

**a) [5 puntos]** Simplifique la siguiente expresión y calcule su valor para  $x = 8$

$$x\sqrt{8x} + 3\sqrt{2x^3} + \frac{2x^2}{\sqrt{x}} - x\sqrt[6]{2^6 x^3}$$

**b) [5 puntos]** Resuelva la ecuación  $\ln(x+2) - 2\ln(x-1) = 2\ln(2)$ , donde  $\ln$  denota el logaritmo neperiano.

a)

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2} \cdot x \cdot x^{\frac{1}{2}} + 3\sqrt{2} \cdot x^{\frac{3}{2}} + 2 \cdot x^2 \cdot x^{-\frac{1}{2}} - 2x \cdot x^{\frac{3}{6}} &= 2\sqrt{2} \cdot x^{1+\frac{1}{2}} + 3\sqrt{2} \cdot x^{\frac{3}{2}} + 2 \cdot x^{2-\frac{1}{2}} - 2x \cdot x^{\frac{1}{2}} = \\ &= 2\sqrt{2} \cdot x^{\frac{3}{2}} + 3\sqrt{2} \cdot x^{\frac{3}{2}} + 2 \cdot x^{\frac{3}{2}} + 2x^{1+\frac{1}{2}} = 5\sqrt{2} \cdot x^{\frac{3}{2}} + 2 \cdot x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} = 5\sqrt{2} \cdot x^{\frac{3}{2}} = 5\sqrt{2x^3} = 5x\sqrt{2x} = P(x) \end{aligned}$$

$$P(8) = 5 \cdot 8 \cdot \sqrt{2 \cdot 8} = 40\sqrt{16} = 40 \cdot 4 = 160$$

b)

$$\ln(x+2) - \ln(x-1)^2 = \ln(2)^2 \Rightarrow \ln\left(\frac{x+2}{(x-1)^2}\right) = \ln 4 \Rightarrow \frac{x+2}{(x-1)^2} = 4 \Rightarrow x+2 = 4(x-1)^2 \Rightarrow$$

$$x+2 = 4(x^2 - 2x + 1) \Rightarrow x+2 = 4x^2 - 8x + 4 \Rightarrow 4x^2 - 9x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = 81 - 32 = 49 \geq 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9+7}{8} = 2 \\ x = \frac{9-7}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

**Ejercicio 2.-**

**a) [5 puntos]** Halle la mediatriz del segmento que une los puntos  $A(-1, 0)$  y  $B(0, 1)$ .

**b) [5 puntos]** Calcule el siguiente límite:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 3n} - n)$

a) Sea el punto  $P(x, y)$ , la distancia  $AP$  es igual a la distancia  $BP$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AP} = (x, y) - (-1, 0) = (x+1, y) \\ \overrightarrow{BP} = (x, y) - (0, 1) = (x, y-1) \end{cases} \Rightarrow |\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}| \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \Rightarrow$$

$$(x+1)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1 \Rightarrow 2x + 1 + 2y - 1 = 0 \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow$$

$$y = -x$$

Continuación del Ejercicio 2

b)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 3n} - n) &= \infty - \infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 - 3n} - n)(\sqrt{n^2 - 3n} + n)}{\sqrt{n^2 - 3n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3n - n^2}{\sqrt{n^2 - 3n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n}{\sqrt{n^2 - 3n} + n} = \frac{-\infty}{\infty} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3 \frac{n}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2} - 3 \frac{n}{n^2} + \frac{n}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3}{\sqrt{1 - \frac{3}{n} + 1}} = \frac{-3}{\sqrt{1 - \frac{3}{\infty} + 1}} = \frac{-3}{\sqrt{1 - 0 + 1}} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

**Ejercicio 3.-**

a) [5 puntos] Sabiendo que  $tg \alpha = -2$  y que  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ , calcule  $sen(2\alpha)$  y  $cos(2\alpha)$

b) [5 puntos] Sea la función  $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  definida por  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$ . Calcule sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Calcule sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) indicando si se trata de un máximo o de un mínimo.

a)

$$\begin{cases} \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + tg^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + tg^2 \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + tg^2 \alpha}} \\ \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \cot^2 \alpha}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{Como } \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \cot^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{4}}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{5}{4}}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{1 + tg^2 \alpha}} = -\sqrt{\frac{1}{1 + 2^2}} = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = -4 \cdot \frac{5}{25} = -\frac{4}{5} \\ \cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{5}{25} - \frac{4 \cdot 5}{25} = \frac{1}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

b)

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2+4}{2} = 3 \\ x = \frac{2-4}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f'(x) = 3(x-3)(x+1) \Rightarrow \text{Creciente} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \begin{cases} 3 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathfrak{R} \\ x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \\ x-3 > 0 \Rightarrow x > 3 \end{cases}$$

**Continuación del Ejercicio 3**

b) Continuación

$-\infty$	$-1$	$3$	$\infty$
$3 > 0$	$(+)$	$(+)$	$(+)$

$x > -1$	(-)	(+)	(+)
$x > 3$	(-)	(-)	(+)
<b>Solución</b>	(+)	(-)	(+)

**Creciente**  $\forall x \in \mathbb{R} / (x < -1) \cup (x > 3)$

**Decreciente**  $\forall x \in \mathbb{R} / -1 < x < 3$

**Máximo relativo**  $x = -1 \Rightarrow f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) - 5 = 1 - 3 + 9 - 5 = 2$

De **crecimiento** pasa a **decrecimiento**

**Mínimo relativo**  $x = 3 \Rightarrow f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 - 5 = 27 - 27 - 27 - 5 = -32$

De **decrecimiento** pasa a **crecimiento**

#### Ejercicio 4.-

a) [5 puntos] Resuelva el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - 2y + z = -3 \\ 2x + y + 2z = 6 \\ x + 3y + z = 9 \end{cases}$$

b) [5 puntos] Halle la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto  $(1, -1)$  y pasa por el origen de coordenadas.

a)

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 9 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 12 \\ 0 & 5 & 0 & 12 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 2 < \text{Numero incógnitas}$$

*Sistema Compatible Determinado*  $\Rightarrow$

$$5y = 12 \Rightarrow y = \frac{12}{5} \Rightarrow x - 2 \cdot \frac{12}{5} + z = -3 \Rightarrow x = \frac{24}{5} - 3 - z = \frac{9}{5} - z \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = \left( \frac{9}{5} - \lambda, \frac{12}{5}, \lambda \right)$$

b) El radio de la circunferencia es el módulo del vector **O** (centro de la circunferencia) y el punto dado **P**

$$\overline{OP} = (1, -1) - (0, 0) = (1, -1) \Rightarrow R = |\overline{OP}| = \sqrt{1^2 - (-1)^2} = \sqrt{2} \Rightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 = (\sqrt{2})^2 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow C \equiv x^2 + y^2 - 2 = 0$$

**Ejercicio 5.-**

a) [5 puntos] Resuelva la inecuación  $\frac{-3x+9}{2x-8} \leq 0$  y represente las soluciones sobre la recta real.

b) [5 puntos] Calcule  $\int \frac{1}{x^2-3x+2} dx$

a)

$$\frac{-3x+9}{2x-8} > 0 \Rightarrow \begin{cases} -3x+9 > 0 \Rightarrow -3x > -9 \Rightarrow 3x < 9 \Rightarrow x < \frac{9}{3} \Rightarrow x < 3 \\ 2x-8 > 0 \Rightarrow 2x > 8 \Rightarrow x > \frac{8}{2} \Rightarrow x > 4 \end{cases}$$

	$-\infty$	<b>2</b>	<b>3</b>	$\infty$
$x > 2$		(-)	(+)	(+)
$x < 3$		(+)	(+)	(-)
<b>Solución</b>		(-)	(+)	(-)

**Solución**  $\forall x \in \mathbb{R} / (x \leq 2) \cup (x \geq 3)$



**Solución en línea gruesa**

b)

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3+1}{2} = 2 \\ x = \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x-2)}{(x-2)(x-1)} \Rightarrow A(x-1)+B(x-2)=1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \text{Si } x=1 \Rightarrow A(1-1)+B(1-2)=1 \Rightarrow -B=1 \Rightarrow B=-1 \\ \text{Si } x=2 \Rightarrow A(2-1)+B(2-2)=1 \Rightarrow A=1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{x-2} + \frac{(-1)}{x-1}$$

$$\int \frac{1}{x^2-3x+2} dx = \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{dx}{x-1} = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{du}{u} = \ln t - \ln u = \ln \frac{t}{u} = \ln \frac{x-2}{x-1} + K$$

$$\begin{cases} x-2=t \Rightarrow dx=dt \\ x-1=u \Rightarrow dx=du \end{cases}$$

**Ejercicio 6.-**

a) [5 puntos] Sea el polinomio  $p(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$ . Resuelva  $p(x) = 0$  y factorice  $p(x)$ .

b) [5 puntos] Calcule el área del triángulo de vértices  $A(7, -7)$ ,  $B(1, -5)$  y  $C(3, 1)$ .

a) Las posibles raíces del polinomio son los divisores de 5  $\Rightarrow \pm 1, 5$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & -9 & -5 \\ 1 & & 1 & -2 & -11 \\ \hline & 1 & -2 & -11 & \underline{-16} \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & -9 & -5 \\ -1 & & -1 & 4 & 5 \\ \hline & 1 & -4 & -5 & \underline{0} \end{array} \Rightarrow x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = (x+1) \cdot (x^2 - 4x - 5)$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 16 + 20 = 36 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4+6}{2} = 5 \\ x = \frac{4-6}{2} = -1 \end{cases}$$

$$\text{Solución} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow p(x) = (x+1)^2(x-5)$$

b) El área del triángulo es el producto del módulo del segmento  $\overline{AB}$  por la distancia del punto  $C$  a la recta  $\overline{AB}$  que es la altura del triángulo

$$\text{Ecuación de la recta } AB \Rightarrow \frac{y+7}{x-7} = \frac{-7-(-5)}{7-1} \Rightarrow \frac{y+7}{x-7} = \frac{-7+5}{6} \Rightarrow \frac{y+7}{x-7} = \frac{-2}{6} \Rightarrow \frac{y+7}{x-7} = \frac{-1}{3} \Rightarrow$$

$$-x+7 = 3y+21 \Rightarrow r \equiv x+3y+14=0$$

$$\overline{AB} = (1, -5) - (7, -7) = (-6, 2) \Rightarrow |\overline{AB}| = \sqrt{(-6)^2 + 2^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$d(C, r) = \frac{|3+3 \cdot 1+14|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{|20|}{\sqrt{10}} = \frac{20\sqrt{10}}{10} = 2\sqrt{10} \Rightarrow$$

$$A = |\overline{AB}| \cdot d(C, r) = 2\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{10} = 400 \text{ u}^2$$