

**DISTRITO UNIVERSITARIO DE MÁLAGA
2012
MATEMÁTICAS (Mayores de 25 años).**

Ejercicio 1.-

a) [5 puntos] Sea x un número real positivo, exprese como un único radical la expresión,

$$4x\sqrt{x} + \sqrt[3]{8x\sqrt{x}} + 4\sqrt{x} + \sqrt{x^3}$$

y calcule el valor de la misma para $x = 2$

b) [5 puntos] Calcule el siguiente límite: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^6 + 26n^3} - n^3)$.

a)

$$\begin{aligned} 4x \cdot x^{\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{6}} + 4 \cdot x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}} &= 4x^{1+\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} + 4 \cdot x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}} = 4x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{2+1}{6}} + 4 \cdot x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}} = \\ &= 4x \cdot x^{\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{3}{6}} + 4 \cdot x^{\frac{1}{2}} + x \cdot x^{\frac{1}{2}} = 5x \cdot x^{\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + 4 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 5x \cdot x^{\frac{1}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} = (5x+6)x^{\frac{1}{2}} = (5x+6)\sqrt{x} = P(x) \end{aligned}$$

$$P(2) = (5 \cdot 2 + 6)\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^6 + 26n^3} - n^3) &= \infty - \infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^6 + 26n^3} - n^3)(\sqrt{n^6 + 26n^3} + n^3)}{\sqrt{n^6 + 26n^3} + n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6 + 26n^3 - n^6}{\sqrt{n^6 + 26n^3} + n^3} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{26n^3}{\sqrt{n^6 + 26n^3} + n^3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{26 \frac{n^3}{n^3}}{\sqrt{\frac{n^6}{n^6} + 26 \frac{n^3}{n^6} + \frac{n^3}{n^3}} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{26}{\sqrt{1 + \frac{26}{n^3}} + 1} = \frac{26}{\sqrt{1 + \frac{26}{\infty}} + 1} = \frac{26}{\sqrt{1+0} + 1} = 13 \end{aligned}$$

Ejercicio 2.-

a) [5 puntos] Sea $p(x)$ el polinomio $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. Resuelva la ecuación $p(x) = 0$, factorice $p(x)$ y resuelva la inecuación $p(x) > 0$. Represente gráficamente las soluciones de la inecuación sobre la recta real.

b) [5 puntos] Calcule el área del recinto limitado por la parábola $y = 3x - x^2$ y el eje OX .

a)

$$\text{Raíces del polinomio} \Rightarrow \pm 1, 2 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} 1 & -2 & -1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 \\ \hline 1 & -1 & -2 & \underline{0} \end{array} \Rightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(x^2 - x - 2)$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1+3}{2} = 2 \\ x = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{Soluc } -1, 1, 2$$

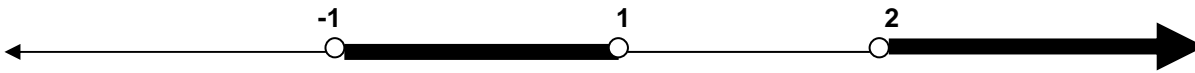
$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(x+1)(x-2) \Rightarrow \text{Si } p(x) > 0 \Rightarrow (x-1)(x+1)(x-2) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \\ x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \\ x-2 > 0 \Rightarrow x > 2 \end{cases}$$

Continuación del Ejercicio 2

a) Continuación

	$-\infty$	-1	1	2	∞
$x > -1$	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
$x > 1$	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)
$x > 2$	(-)	(-)	(-)	(+)	(+)
Solución	(-)	(+)	(-)	(+)	(+)

Solución $\forall x \in \mathbb{R} / (-1 < x < 1) \cup (x > 2)$



La solución es la parte en negrilla y gruesa

b)

$$\text{Puntos de corte con } OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 3x - x^2 = 0 \Rightarrow (3-x)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3-x=0 \Rightarrow x=3 \\ x=0 \end{cases}$$

$$2 \in [0, 3] \Rightarrow f(2) = 3 \cdot 2 - 2^2 = 6 - 2 = 4 > 0 \Rightarrow \text{Positivo}$$

$$A = \int_0^3 (3x - x^2) dx = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_0^3 - \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^3 = \frac{3}{2} \cdot (3^2 - 0^2) - \frac{1}{3} \cdot (3^3 - 0^3) = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{81 - 54}{6} = \frac{27}{6} u^2$$

Ejercicio 3.-

a) [5 puntos] Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales y compruebe si la solución obtenida

es correcta:
$$\begin{cases} -x + 2y + z = 3 \\ 2x - y - z = 1 \\ 3x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$$

b) [5 puntos] Sabiendo que en un triángulo rectángulo uno de sus ángulos mide $\frac{\pi}{6}$ (radianes) y que el cateto opuesto mide 5 cm., calcule el perímetro y el área del mismo.

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 9 & 5 & 11 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -10 \end{array} \right) \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow$$

$$\text{Sistema Compatible Determinado} \Rightarrow 2z = -10 \Rightarrow z = -\frac{10}{2} = -5 \Rightarrow 3y - 5 = 7 \Rightarrow 3y = 12 \Rightarrow y = \frac{12}{3} = 4$$

$$-x + 2 \cdot 4 - 5 = 3 \Rightarrow -x + 3 = 3 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = (0, 4, -5)$$

b)

$$\text{sen } \frac{\pi}{6} = \frac{5}{H} \Rightarrow H = \frac{5}{\text{sen } \frac{\pi}{6}} = \frac{5}{\frac{1}{2}} = 10 \text{ cm} \Rightarrow 10 = \sqrt{5^2 + C^2} \Rightarrow 100 = 25 + C^2 \Rightarrow C^2 = 75 \Rightarrow C = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

$$\text{Perímetro} = 5 + C + H = 5 + 5\sqrt{3} + 10 = 15 + 5\sqrt{3} = 5(3 + \sqrt{3}) \text{ cm} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot C = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5\sqrt{3} = \frac{25\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$$

Ejercicio 4.-

a) [5 puntos] Resuelva la ecuación: $\ln \sqrt{x+3} + 2 \ln \frac{1}{x+3} = \ln(e^{\frac{3}{2}})$, donde \ln indica el logaritmo neperiano.

b) [5 puntos] Comprueba que la recta que pasa por los puntos $(-2, 1)$ y $(6, -3)$ es perpendicular a la recta de ecuación $y = 2x - 5$ y determina el punto de corte entre ambas rectas.

a)

$$\ln \sqrt{x+3} + 2 \cdot [\ln 1 - \ln(x+3)] = \ln \left(e^{\frac{3}{2}} \right) \Rightarrow \ln \sqrt{x+3} + 2 \cdot [0 - \ln(x+3)] = \ln \left(e^{\frac{3}{2}} \right) \Rightarrow$$

$$\ln \sqrt{x+3} - 2 \cdot \ln(x+3) = \ln \left(e^{\frac{3}{2}} \right) \Rightarrow \ln \sqrt{x+3} - \ln(x+3)^2 = \ln \left(e^{\frac{3}{2}} \right) \Rightarrow \ln \frac{\sqrt{x+3}}{(x+3)^2} = \ln \left(e^{\frac{3}{2}} \right) \Rightarrow$$

$$\ln \frac{(x+3)^{\frac{1}{2}}}{(x+3)^2} = \ln \left(e^{\frac{3}{2}} \right) \Rightarrow \ln \left[(x+3)^{\frac{1}{2}} (x+3)^{-2} \right] = \ln \left(e^{\frac{3}{2}} \right) \Rightarrow \ln \left[(x+3)^{\frac{1}{2}-2} \right] = \ln \left(e^{\frac{3}{2}} \right)$$

$$\Rightarrow \ln \left[(x+3)^{-\frac{3}{2}} \right] = \ln \left(e^{\frac{3}{2}} \right) \Rightarrow (x+3)^{-\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{1}{(x+3)^{\frac{3}{2}}} = e^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \left(\frac{1}{x+3} \right)^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{1}{x+3} = e \Rightarrow$$

$$ex + 3e = 1 \Rightarrow ex = 1 - 3e \Rightarrow x = \frac{1-3e}{e}$$

b) Si son perpendiculares el producto escalar de sus vectores directores es nulo

$$\text{Ecuación de } r \Rightarrow \frac{y-1}{x+2} = \frac{1-(-3)}{-2-6} \Rightarrow \frac{y-1}{x+2} = \frac{4}{-8} \Rightarrow \frac{y-1}{x+2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x+2 = -2y+2 \Rightarrow x+2y=0$$

$$\begin{cases} r \equiv x+2y=0 \Rightarrow \vec{v}_r = (-2, 1) \\ s \equiv 2x-y-5=0 \Rightarrow \vec{v}_s = (1, 2) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = (-2, 1) \cdot (1, 2) = -2+2=0 \Rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{v}_s$$

Punto de corte P

$$\begin{cases} x+2y=0 \\ 4x-2y-10=0 \end{cases} \Rightarrow 5x-10=0 \Rightarrow 5x=10 \Rightarrow x=\frac{10}{5}=2 \Rightarrow 2+2y=0 \Rightarrow 2y=-2 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow P(2, -1)$$

Ejercicio 5.-

a) [5 puntos] Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^4 - 8x^2$. Calcule los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) [5 puntos] Halla la ecuación de una circunferencia sabiendo que uno de sus diámetros tiene por extremos los puntos $A(-1, 4)$ y $B(7, -2)$. Calcule los puntos de corte de esta circunferencia con la recta de ecuación $y = 1$.

a)

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 4x(x-2)(x+2) \Rightarrow \text{Creciente} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow 4x(x-2)(x+2) > 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ x > 0 \\ x-2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ x+2 > 0 \Rightarrow x > -2 \end{cases}$$

	$-\infty$	-2	0	2	∞
$4 > 0$		(+)	(+)	(+)	(+)
$x > -2$		(-)	(+)	(+)	(+)
$x > 0$		(-)	(-)	(+)	(+)
$x > 2$		(-)	(-)	(-)	(+)
Solución		(-)	(+)	(-)	(+)

Creciente $\forall x \in \mathbb{R} / (-2 < x < 0) \cup (x > 2)$ **Decreciente** $\forall x \in \mathbb{R} / (x < -2) \cup (0 < x < 2)$

Mínimo relativo $x = -2 \Rightarrow f(-2) = (-2)^4 - 8 \cdot (-2)^2 = 16 - 32 = -16$ **de Decreciente pasa a Creciente**

Máximo relativo $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^4 - 8 \cdot 0^2 = 0$ **de Creciente pasa a Decreciente**

Mínimo relativo $x = 2 \Rightarrow f(2) = 2^4 - 8 \cdot 2^2 = 16 - 32 = -16$ **de Decreciente pasa a Creciente**

b) El punto medio **O** del vector **AB** es el centro de la circunferencia y su módulo es el doble del radio de la circunferencia **C** buscada

$$\begin{cases} x_0 = \frac{(-1)+7}{2} = 3 \\ y_0 = \frac{4+(-2)}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow O(3, 1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (7, -2) - (-1, 4) = (8, -6) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10 \Rightarrow$$

$$R = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{2} = \frac{10}{2} = 5 \Rightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 - 25 = 0 \Rightarrow$$

$$C \equiv x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$$

$$\text{Si } y = 1 \Rightarrow x^2 + 1^2 - 6x - 2 \cdot 1 - 15 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x - 16 = 0 \Rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16) = 36 + 64 = 100$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{6+10}{2} = 8 \\ x = \frac{6-10}{2} = -2 \end{cases} \Rightarrow \text{Puntos de corte con } y = 1 \Rightarrow \begin{cases} (8, 1) \\ (-2, 1) \end{cases}$$

Ejercicio 6.-

a) [5 puntos] Calcule $\sin(\theta)$, $\cos(\theta)$ y θ sabiendo que $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ y $\cos(2\theta) = -\frac{1}{2}$.

b) [5 puntos] Determine las asíntotas de la gráfica de la función f , definida para $x \neq -1$, por

$$f(x) = \frac{3x^2}{x+1}.$$

a)

$$\begin{cases} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \\ \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos(2\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\cos^2 \theta = 1 + \cos(2\theta) \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \\ 2\sin^2 \theta = 1 - \cos(2\theta) \Rightarrow \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \cos^2 \theta = \frac{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Como } \pi < \theta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos \theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \\ \sin^2 \theta = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin \theta = \pm \sqrt{\frac{3}{4}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{Como } \pi < \theta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\theta = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \text{ rad} = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$$

b)

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = \frac{3 \cdot (-1)^2}{-1+1} = \frac{3}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow \text{Asíntota vertical en } x = -1$$

Asíntota horizontal

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x+1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \frac{x^2}{x^2}}{\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{3}{\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}} = \frac{3}{0+0} = \frac{3}{0} \Rightarrow \text{Sin solución}$$

No existe asíntota horizontal cuando $x \rightarrow \infty$

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x+1} = \frac{\infty}{-\infty} = \frac{\text{Utilizando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x}{1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 6x = 6 \cdot (-\infty) = -\infty$$

No existe asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$

Asíntotas oblicuas

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x^2+x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{3}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{3}{1+0} = 3$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2}{x+1} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 3x^2 - 3x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x}{x+1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3 \cdot \frac{x}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3}{1 + \frac{1}{x}} = -3$$

Existe una **asíntota oblicua**, $y = -3x + 3$, cuando $x \rightarrow \infty$

Continuación del Ejercicio 6

b) Continuación

Asíntotas oblicuas (Continuación)

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3x^2}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x^2+x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{\text{Utilizando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x}{2x+1} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{\text{Utilizando L'Hopital}}{\rightarrow} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{2} = 3$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^2}{x+1} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 3x^2 - 3x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{x+1} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{\text{Utilizando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{1}$$

$$n = -3$$

Existe asíntota oblicua, $y = 3x - 3$, cuando $x \rightarrow -\infty$