

DISTRITO UNIVERSITARIO DE MÁLAGA
2011
MATEMÁTICAS (Mayores de 25 años).

Ejercicio 1.-

a) [5 puntos] Siendo x un número real positivo, exprese como un único radical la expresión,

$$4x\sqrt{3x} - \sqrt{108x^3} + 4\sqrt{3x} + \sqrt{12x^3} + \sqrt{243x}$$

y calcule el valor de la misma para $x = 3$

b) [5 puntos] Calcule $\operatorname{sen}(2\alpha)$ y $\operatorname{cos}(2\alpha)$ sabiendo que $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ y $\operatorname{sen}(\alpha) = -3 \operatorname{cos}(\alpha)$

a)

$$4\sqrt{3x} \cdot x^{\frac{1}{2}} - 6\sqrt{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + 4 \cdot \sqrt{3} \cdot x^{\frac{1}{2}} + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + 9\sqrt{3} \cdot x^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{3x} \cdot x^{\frac{1}{2}} - 6\sqrt{3} \cdot x \cdot x^{\frac{1}{2}} + 13 \cdot \sqrt{3} \cdot x^{\frac{1}{2}} + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot x \cdot x^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 0 \cdot \sqrt{3x} \cdot x^{\frac{1}{2}} + 13 \cdot \sqrt{3} \cdot x^{\frac{1}{2}} = 13 \cdot \sqrt{3x} = P(x)$$

$$P(3) = 13 \cdot \sqrt{3 \cdot 3} = 13 \cdot \sqrt{9} = 13 \cdot 3 = 39$$

b)

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{cos}(\alpha)} = -3 \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha) = -3 \Rightarrow \operatorname{cos}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{\operatorname{cos}^2 \alpha}{\operatorname{cos}^2 \alpha} + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{cos}^2 \alpha} = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \alpha} \Rightarrow$$

$$1 + (-3)^2 = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \alpha} \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \alpha} = 10 \Rightarrow \operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{1}{10} \Rightarrow \operatorname{cos} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{10}} \Rightarrow \text{Como } \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Rightarrow \operatorname{cos} \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \cdot \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \operatorname{cos} \alpha = 2 \cdot (-3) \cdot \operatorname{cos}(\alpha) \cdot \operatorname{cos} \alpha = (-6) \cdot \operatorname{cos}^2 \alpha = (-6) \cdot \frac{1}{10} = -\frac{3}{5}$$

$$\operatorname{cos}(2\alpha) = \operatorname{cos}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \operatorname{cos}^2 \alpha - (1 - \operatorname{cos}^2 \alpha) = 2\operatorname{cos}^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \frac{1}{10} - 1 = \frac{1}{5} - 1 = -\frac{4}{5}$$

Ejercicio 2.-

a) [5 puntos] Sea $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2 + 1}$. Determine los intervalos de

crecimiento y de decrecimiento de f . Halle los extremos relativos de la función f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) [5 puntos] Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-1, 2)$ y es perpendicular a la recta de ecuación: $x + 2y - 3 = 0$.

a)

$$f'(x) = 2x - \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} = 2x \left(1 - \frac{1}{(x^2 + 1)^2} \right) = 2x \left[\frac{(x^2 + 1)^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} \right] = 2x \cdot \frac{x^4 + 2x^2 + 1 - 1}{(x^2 + 1)^2} = 2x \cdot \frac{x^4 + 2x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 2x^3 \cdot \frac{x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

Continuación del Ejercicio 2

a) *Continuación*

$$Crecimiento \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow 2x^3 \cdot \frac{x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathfrak{R} \\ x^3 > 0 \Rightarrow x > 0 \\ x^2 + 2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathfrak{R} \\ (x^2 + 1)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathfrak{R} \end{cases}$$

2 > 0	(+)	(+)
x > 0	(-)	(+)
x²+2 > 0	(+)	(+)
(x + 1)² > 0	(+)	(+)
Solución	(-)	(+)

Creciente $\forall x \in \mathfrak{R} / x > 0$

Decreciente $\forall x \in \mathfrak{R} / x < 0$

Máximo relativo $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^2 + \frac{1}{0^2 + 1} = 1$ **de Creciente pasa a Decreciente**

b) El vector director de la recta pedida es el valor negativo de la inversa del vector director de la dada

$$2y = -x + 3 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \Rightarrow m = -\frac{1}{2} \Rightarrow m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow y - 2 = 2 \cdot (x + 1) \Rightarrow y - 2 = 2x + 2 \Rightarrow$$

$$y = 2x + 4 \Rightarrow 2x - y + 4 = 0$$

Ejercicio 3.-

a) **[5 puntos]** Determine la ecuación de la circunferencia de centro **P(-1, 3)** que pasa por el punto **Q(-4, 7)**. Halle los puntos de corte de dicha circunferencia con el eje **OX**.

b) **[5 puntos]** Calcule el siguiente límite: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 - 5n + 4\sqrt{n} - 7}{3n} - n + 2 \right)$

a) El módulo del vector **PQ** es el radio de la circunferencia.

La ecuación del eje **OX** es **y = 0**

$$\vec{PQ} = (-4, 7) - (-1, 3) = (-3, 4) \Rightarrow |\vec{PQ}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 5^2 \Rightarrow$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 - 25 = 0 \Rightarrow C \equiv x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$$

$$Si y = 0 \Rightarrow x^2 + 0^2 + 2x - 6 \cdot 0 - 15 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \Rightarrow \Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 4 + 60 = 64 \geq 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-2 + 8}{2} = 3 \\ x = \frac{-2 - 8}{2} = -5 \end{cases} \Rightarrow \text{Puntos de corte con OX} \Rightarrow \begin{cases} (-5, 0) \\ (3, 0) \end{cases}$$

Continuación del Ejercicio 3

b)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 - 5n + 4\sqrt{n} - 7}{3n} - n + 2 \right) &= \infty - \infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 - 5n + 4\sqrt{n} - 7 - 3n^2 + 6n}{3n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 4\sqrt{n} - 7}{3n} = \\ &= \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n} + 4\sqrt{\frac{n}{n^2}} - \frac{7}{n}}{3 \frac{n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 4\sqrt{\frac{1}{n}} - \frac{7}{n}}{3} = \frac{1 + 4\sqrt{\frac{1}{\infty}} - \frac{7}{\infty}}{3} = \frac{1 + 4\sqrt{0} - 0}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

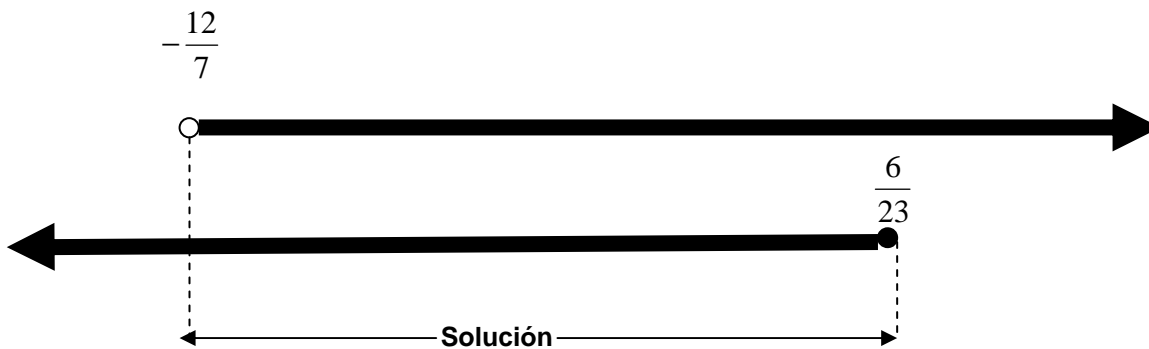
Ejercicio 4.-

a) Resuelva el siguiente sistema de inecuaciones $\begin{cases} 8x - 4 < 15x + 8 \\ \frac{2x + 6}{5} \leq \frac{6 - 3x}{4} \end{cases}$ y represente gráficamente las

soluciones sobre la recta real.

b) [5 puntos] Factorice el polinomio $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$. Calcule el resto de dividir $p(x)$ entre $(x - 2)$.

$$\begin{cases} 8x - 4 - 15x - 8 < 0 \\ 8x + 24 \leq 30 - 15x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7x - 12 < 0 \\ 8x + 24 - 30 + 15x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7x < 12 \\ 23x - 6 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x > -12 \\ 23x \leq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{12}{7} \\ x \leq \frac{6}{23} \end{cases}$$



Solución $x \in \mathbb{R} / -\frac{12}{7} < x \leq \frac{6}{23}$

b) Los factores posibles son: $\pm 1, 2$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array} \Rightarrow x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x^2 + 2x + 3) \Rightarrow x^2 + 3x + 2 \Rightarrow \Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 \geq 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-3 + 1}{2} = -1 \\ x = \frac{-3 - 1}{2} = -2 \end{cases} \Rightarrow x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$$

$R = P(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 2 - 2 = 8 + 8 - 4 = 12$

Ejercicio 5.-

a) [5 puntos] Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = 9 \end{cases}$$

b) [5 puntos] Calcule el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y = 3x - x^2$ y el eje **OX**

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array} \right) \Rightarrow -5z = -15 \Rightarrow z = \frac{-15}{-5} = 3 \Rightarrow y - 2 \cdot 3 = -4 \Rightarrow$$

$$y - 6 = -4 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x + 2 + 3 = 6 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = (1, 2, 3)$$

b)

$$\text{Puntos de corte con OX} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 3x - x^2 = 0 \Rightarrow x(3 - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3 - x = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

$$2 \in (0, 3) \Rightarrow f(2) = 3 \cdot 2 - 2^2 = 2 > 0 \Rightarrow \text{Positivo}$$

$$A = \int_0^3 (3x - x^2) dx = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_0^3 - \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^3 = \frac{3}{2} \cdot (3^2 - 0^2) - \frac{1}{3} \cdot (3^3 - 0^3) = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{27}{2} - 9 = \frac{27 - 18}{2} = \frac{9}{2} u^2$$

Ejercicio 6.-

a) [5 puntos] Resuelva la ecuación: $\ln x - \frac{1}{2} \ln(3 - x) = \ln(2)$, donde **ln** indica el logaritmo neperiano.

b) [5 puntos] Calcule el área de un triángulo rectángulo sabiendo que uno de sus catetos es el doble que el otro y que la hipotenusa mide **10 cm**.

a)

$$\ln x - \ln(3 - x)^{\frac{1}{2}} = \ln(2) \Rightarrow \ln x - \ln \sqrt{3 - x} = \ln(2) \Rightarrow \ln \left(\frac{x}{\sqrt{3 - x}} \right) = \ln(2) \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{3 - x}} = 2 \Rightarrow$$

$$x = 2 \cdot \sqrt{3 - x} \Rightarrow x^2 = 4(3 - x) \Rightarrow x^2 = 12 - 4x \Rightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \Rightarrow \Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 16 + 48 = 64 \geq 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-4 + 8}{2} = 2 \Rightarrow 2 = 2 \cdot \sqrt{3 - 2} \Rightarrow 2 = 2 \cdot \sqrt{1} \Rightarrow \text{Es solución} \Rightarrow x = 2 \\ x = \frac{-4 - 8}{2} = -6 \Rightarrow -6 = 2 \cdot \sqrt{3 - (-6)} \Rightarrow -6 = 2 \cdot \sqrt{9} \Rightarrow -6 \neq 6 \Rightarrow \text{No es solución} \end{cases}$$

b)

$$10 = \sqrt{C^2 + (2C)^2} \Rightarrow 10 = \sqrt{5C^2} \Rightarrow 10 = \sqrt{5}C \Rightarrow C = \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5} \Rightarrow C' = 2C = 4\sqrt{5} \Rightarrow$$

$$A = \frac{C \cdot C'}{2} = \frac{2\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5}}{2} = \frac{8 \cdot 5}{2} = 20 \text{ cm}^2$$