

DISTRITO UNIVERSITARIO DE MÁLAGA
2010
MATEMÁTICAS (Mayores de 25 años).

Ejercicio 1.-

a) [5 puntos] Simplifica la expresión $\sqrt[3]{\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{16} + \frac{1}{2}\sqrt{32} - \sqrt{50} - \sqrt{98}$.

b) [5 puntos] Calcula el área de la región del plano limitada por las gráficas de la parábola de ecuación $y = 4 - x^2$ y la recta de ecuación $y = -5$.

a)

$$\begin{aligned} \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{4}{3}} + 2^{-1} \cdot 2^{\frac{5}{2}} - 5 \cdot 2^{\frac{1}{2}} - 7 \cdot 2^{\frac{1}{2}} &= 2^{\frac{1}{6}} \cdot 2^{\frac{4}{3}} + 2^{\frac{5}{2}-1} - 12 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{6}+\frac{4}{3}} + 2^{\frac{3}{2}} - 12 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{9}{6}+\frac{4}{3}} + 2^{\frac{3}{2}} - 12 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = \\ &= 2^{\frac{3}{2}} - 10 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} - 10 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = -8 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = -8\sqrt{2} \end{aligned}$$

b)

$$\text{Puntos de corte con OX} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases} \\ -5 \neq 0 \Rightarrow \text{No hay solución} \end{cases}$$

$$\text{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow 4 - x^2 = -5 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$$

Las funciones son simétricas

$$1 \in (0, 2) \Rightarrow \begin{cases} 4 - 1^2 = 3 > 0 \\ -5 < 0 \end{cases} \quad \frac{5}{2} \in (2, 3) \Rightarrow \begin{cases} 4 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 4 - \frac{25}{4} = -\frac{9}{4} > 0 \\ -5 < 0 \end{cases}$$

Hallaremos la mitad del área

$$A = \int_0^2 (4 - x^2) dx + \left| \int_0^2 (-5) dx \right| + \left| \int_2^3 (-5) dx \right| - \left| \int_2^3 (4 - x^2) dx \right| = \int_0^2 (4 - x^2) dx + 5 \int_0^2 dx - 5 \int_2^3 dx + \int_2^3 (4 - x^2) dx =$$

$$A = \int_0^3 (4 - x^2) dx + 5 \int_0^2 dx - 5 \int_2^3 dx = 4 \cdot [x]_0^3 - \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^3 + 5 \cdot [x]_0^2 - 5 \cdot [x]_2^3 =$$

$$A = 4 \cdot (3 - 0) - \frac{1}{3} \cdot (3^3 - 0^3) + 5 \cdot (2 - 0) - 5 \cdot (3 - 2) = 12 - \frac{27}{3} + 10 - 5 = 12 - 9 + 5 = 8 u^2$$

$$\text{Área total} = 2A = 2 \cdot 8 = 16 u^2$$

Ejercicio 2.-

a) [5 puntos] Resuelve la inecuación $\frac{5x-2}{3} - \frac{x-8}{4} > \frac{x+14}{2} - 2$.

b) [5 puntos] Calcula el siguiente límite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4-1} - 3n^2}{2n^2+n}$.

a

a)

$$4 \cdot (5x-2) - 3 \cdot (x-8) > 6 \cdot (x+14) - 24 \Rightarrow 20x - 8 - 3x + 24 > 6x + 84 - 24 \Rightarrow 17x + 16 > 6x + 60 \Rightarrow$$

$$17x - 6x + 16 - 60 > 0 \Rightarrow 11x - 44 > 0 \Rightarrow 11x > 44 \Rightarrow x > \frac{44}{11} \Rightarrow x > 4$$

Solución $\Rightarrow \forall x \in \mathfrak{R} / x > 4$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4-1} - 3n^2}{2n^2+n} &= \frac{\infty - \infty}{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^4-1} - 3n^2)(\sqrt{n^4-1} + 3n^2)}{(2n^2+n)(\sqrt{n^4-1} + 3n^2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - 1 - 9n^4}{(2n^2+n)(\sqrt{n^4-1} + 3n^2)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-8n^4 - 1}{(2n^2+n)(\sqrt{n^4-1} + 3n^2)} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-8 \frac{n^4}{n^4} - \frac{1}{n^4}}{\left(2 \frac{n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2}\right) \left(\sqrt{\frac{n^4}{n^4} - \frac{1}{n^4}} + 3 \frac{n^2}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-8 - \frac{1}{n^4}}{\left(2 + \frac{1}{n}\right) \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n^4}} + 3\right)} = \\ &= \frac{-8 - \frac{1}{\infty}}{\left(2 + \frac{1}{\infty}\right) \left(\sqrt{1 - \frac{1}{\infty}} + 3\right)} = \frac{-8 - 0}{(2+0)(\sqrt{1-0}+3)} = \frac{-8}{2(1+3)} = \frac{-8}{8} = -1 \end{aligned}$$

Ejercicio 3.-

a) [5 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x^2-3}{e^x}$.

b) [5 puntos] Halla la ecuación de la circunferencia de centro $C(2,1)$ que pasa por el punto $P(4,3)$. Halla los puntos de corte de dicha circunferencia con el eje de abscisas.

a)

$$f'(x) = \frac{2x \cdot e^x - e^x(x^2-3)}{e^{2x}} = \frac{e^x(2x-x^2+3)}{e^{2x}} = -\frac{x^2-2x-3}{e^x} \Rightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2+4}{2} = 3 \\ x = \frac{2-4}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \frac{(-1)(x-3)(x+1)}{e^x} \Rightarrow \text{Crecimiento} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{(-1)(x-3)(x+1)}{e^x} > 0 \Rightarrow \begin{cases} -1 < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathfrak{R} \\ x-3 > 0 \Rightarrow x > 3 \\ x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \\ e^x > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathfrak{R} \end{cases}$$

Continuación Ejercicio 3

a) Continuación

	$-\infty$	-1	3	∞
$-1 < 0$		(-)	(-)	(-)
$e^x > 0$		(+)	(+)	(+)
$x > -1$		(-)	(+)	(+)
$x > 3$		(-)	(-)	(+)
Solución		(-)	(+)	(-)

Creciente $\forall x \in \mathbb{R} / -1 < x < 3$

Decreciente $\forall x \in \mathbb{R} / (x < -1) \cup (x > 3)$

Mínimo relativo en $x = -1 \Rightarrow f(-1) = \frac{(-1)^2 - 3}{e^{-1}} = -2e$ De decrecimiento pasa a crecimiento

Máximo relativo en $x = 3 \Rightarrow f(-1) = \frac{3^2 - 3}{e^3} = \frac{6}{e^3}$ De crecimiento pasa a decrecimiento

b) El módulo del vector **CP** es el radio de la circunferencia.

La ecuación del eje **OX** es $y = 0$

$$\overline{CP} = (4, 3) - (2, 1) = (2, 2) \Rightarrow R = |\overline{CP}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \Rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = (2\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 - 8 = 0 \Rightarrow C \equiv x^2 + y^2 - 4x - 2y - 3 = 0$$

$$Si y = 0 \Rightarrow x^2 + 0^2 - 4x - 2 \cdot 0 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16 + 12 = 28 \geq 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4 + 2\sqrt{7}}{2} = 2 + \sqrt{7} \\ x = \frac{4 - 2\sqrt{7}}{2} = 2 - \sqrt{7} \end{cases} \Rightarrow \text{Puntos de corte con OX} \Rightarrow \begin{cases} (2 + \sqrt{7}, 0) \\ (2 - \sqrt{7}, 0) \end{cases}$$

Ejercicio 4.-

a) [5 puntos] Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2. \end{cases}$$

b) [5 puntos] Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-1, -7)$ y $B(3, -4)$.

a)

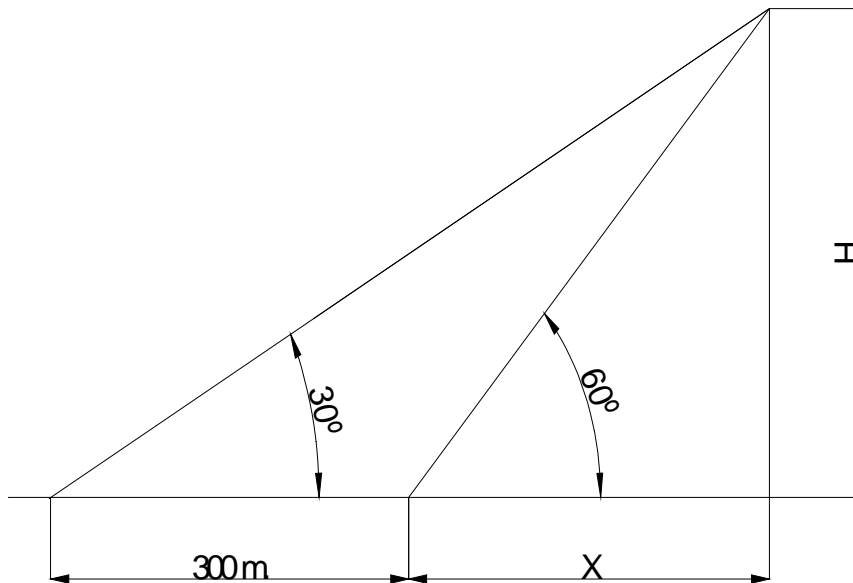
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 9 & -3 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow z = 1 \Rightarrow -y + 4 \cdot 1 = -2 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow x + 6 - 1 = 1 \Rightarrow$$

$$x = -4 \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = (-4, 6, 1)$$

b)

$$\frac{y - (-7)}{x - (-1)} = \frac{(-7) - (-4)}{(-1) - 3} \Rightarrow \frac{y + 7}{x + 1} = \frac{-3}{-4} \Rightarrow 4y + 28 = 3x + 3 \Rightarrow 3x - 4y - 25 = 0$$

EJERCICIO 5 [10 puntos] Desde un cierto punto del suelo, situado al oeste de una torre, vemos el punto más alto de la torre bajo un ángulo de 60° . Si nos alejamos 300 m, en dirección oeste, lo vemos bajo un ángulo de 30° . ¿Qué altura tiene la torre?



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{tg } 60^\circ = \frac{H}{X} \Rightarrow X = \frac{H}{\text{tg } 60^\circ} \\ \text{tg } 30^\circ = \frac{H}{X + 300} \Rightarrow X + 300 = \frac{H}{\text{tg } 30^\circ} \Rightarrow X = \frac{H}{\text{tg } 30^\circ} - 300 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{H}{\text{tg } 60^\circ} = \frac{H}{\text{tg } 30^\circ} - 300 \Rightarrow \frac{H}{\text{tg } 30^\circ} - \frac{H}{\text{tg } 60^\circ} = 300$$

$$H \left(\frac{1}{\text{tg } 30^\circ} - \frac{1}{\text{tg } 60^\circ} \right) = 300 \Rightarrow H \frac{\text{tg } 60^\circ - \text{tg } 30^\circ}{\text{tg } 30^\circ \cdot \text{tg } 60^\circ} = 300 \Rightarrow H = 300 \cdot \frac{\text{tg } 30^\circ \cdot \text{tg } 60^\circ}{\text{tg } 60^\circ - \text{tg } 30^\circ} = 300 \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow$$

$$H = \frac{300}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{150 \cdot 3}{\sqrt{3}} = \frac{150 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{3} = 150 \cdot \sqrt{3} = 259'807 \text{ m}$$

Ejercicio 6.-

a) [5 puntos] Calcula $\text{sen}(\alpha)$ y $\text{sen}(2\alpha)$ sabiendo que α es un ángulo del segundo cuadrante y $\text{cos}(\alpha) = -1/3$.

b) [5 puntos] Siendo $p(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, resuelve la ecuación $p(x) = 0$ y factoriza $p(x)$.

a)

$$\text{sen}^2(\alpha) + \text{cos}^2(\alpha) = 1 \Rightarrow \text{sen}^2(\alpha) = 1 - \text{cos}^2(\alpha) \Rightarrow \text{sen}(\alpha) = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \pm \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3} \Rightarrow$$

$$\text{Como es del } 2^\circ \text{ cuadrante} \Rightarrow \text{sen}(\alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \text{sen}(2\alpha) = 2 \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \text{cos}(\alpha) = 2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

Continuación del Ejercicio 6

b)

Los divisores son $\pm 1, 3$

$$1 \left| \begin{array}{cccc} 1 & -3 & -1 & 3 \\ & 1 & -2 & -3 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & | 0 \end{array} \right. \Rightarrow x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x-1)(x^2 - 2x - 3)$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2+4}{2} = 3 \\ x = \frac{2-4}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{Soluciones de } p(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ x = 3 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow p(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x-1)(x-3)(x+1)$$