DISTRITO UNIVERSITARIO DE MÁLAGA
2008
MATEMÁTICAS (Mayores de 25 años).

Ejercicio 1.-

a) **[5 puntos]** Halla las raíces del polinomio $2x^3-5x^2-11x-4$ y factorízalo.

b) **[5 puntos]** Calcula $f'(1)$ sabiendo que $f(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x}}$.

a)

$$\text{Las posibles raices son } \pm 1\,,\,2\,,\,4\,,\,\frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & -11 & -4 \\ 1 & & 2 & -3 & -14 \\ \hline & 2 & -3 & -14 & \underline{|-18} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & -11 & -4 \\ -1 & & -2 & 7 & 4 \\ \hline & 2 & -7 & -4 & \underline{|0} \end{array}$$

$$2x^3-5x^2-11x-4=(x+1)\left(2x^2-7x-4\right)$$

$$2x^2-7x-4=0 \Rightarrow \Delta=(-7)^2-4\cdot 2\cdot(-4)=49+32=81\geq 0 \Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{81}}{2\cdot 2} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{7+9}{4}=4 \\ x=\dfrac{7-9}{4}=-\dfrac{2}{4}=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{Soluciones de } 2x^3-5x^2-11x-4=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-\dfrac{1}{2} \\ x=4 \end{cases}$$

$$2x^3-5x^2-11x-4=(x+1)(x-4)\left(x+\frac{1}{2}\right)=(x+1)(x-4)(2x+1)$$

b)

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(x+3)}{x}=\frac{\sqrt{x}-\dfrac{(x+3)}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{\dfrac{2x-(x+3)}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{2x-x-3}{2x\sqrt{x}}=\frac{x-3}{2x\sqrt{x}} \Rightarrow$$

$$f'(1)=\frac{1-3}{2\cdot 1\cdot\sqrt{1}}=\frac{-2}{2}=-1$$

.

Ejercicio 2.-

a) [**5 puntos**] Calcula todas las soluciones de la ecuación $2\log_{10} x - \log_{10}(x-16) = 2$.

b) [**5 puntos**] Calcula $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$.

$a)$

$$\log_{10} x^2 - \log_{10}(x-16) = \log_{10} 10^2 \Rightarrow \log_{10}\frac{x^2}{x-16} = \log_{10} 100 \Rightarrow \frac{x^2}{x-16} = 100 \Rightarrow x^2 = 100x - 1600$$

$$x^2 - 100x + 1600 = 0 \Rightarrow \Delta = (-100)^2 - 4\cdot 1\cdot 1600 = 10000 - 6400 = 3600 \Rightarrow x = \frac{100 \pm \sqrt{1600}}{2\cdot 1} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{100+40}{2} = 70 \\ x = \dfrac{100-40}{2} = 30 \end{cases}$$

$b)$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right) = \infty - \infty = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{\infty}{\infty} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}}+\frac{n}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\infty}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 3.-

a) [**5 puntos**] Sabiendo que α es un ángulo tal que $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ y cuya tangente vale $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, calcula $\cos\alpha$ y $\cos(2\alpha)$.

b) [**5 puntos**] Resuelve la inecuación $\frac{x-3}{2} + \frac{2x+6}{5} \leq \frac{x}{2} - \frac{3x-6}{4}$.

$a)$

$$\cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{1+tg^2\alpha} \Rightarrow$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{1+tg^2\alpha}} \Rightarrow En\ segundo\ cuadrante \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{\frac{1}{1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = -\sqrt{\frac{1}{1+\frac{3}{9}}} = -\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{3}}} =$$

$$\cos\alpha = -\sqrt{\frac{1}{\frac{4}{3}}} = -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos^2\alpha - sen^2\alpha = \cos(2\alpha) \Rightarrow \cos^2\alpha - \left(1-\cos^2\alpha\right) = \cos(2\alpha) \Rightarrow 2\cos^2\alpha - 1 = \cos(2\alpha) \Rightarrow$$

$$\cos(2\alpha) = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1 = \frac{2\cdot 3}{4} - 1 = \frac{6}{4} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

Continuación del Problema 3

$b)$

$$10\cdot(x-3)+4\cdot(2x+6)\le 10x-5\cdot(3x-6)\Rightarrow 10x-30+8x+24\le 10x-15x+30\Rightarrow 18x-6\le -5x+30\Rightarrow$$

$$23x-36\le 0\Rightarrow 23x\le 36\Rightarrow x\le\frac{36}{23}\Rightarrow Solución\Rightarrow \forall x\in\Re\,/\,x\le\frac{36}{23}$$

<u>Ejercicio 4.-</u>

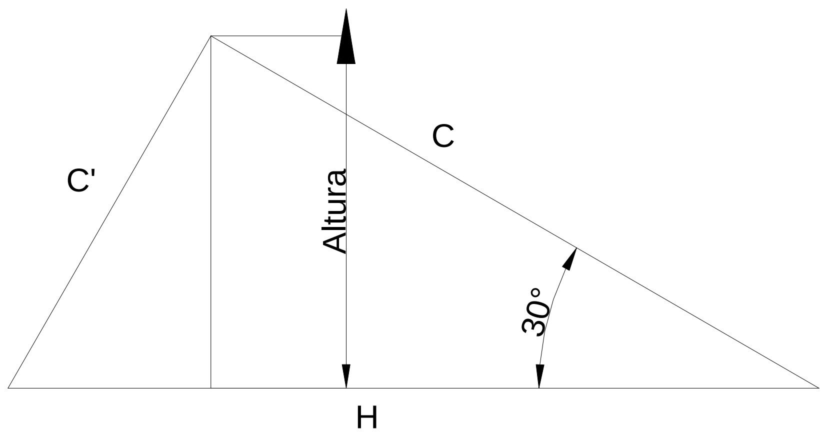
a) **[5 puntos]** Calcula el sumando que es constante en el desarrollo de la potencia $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^3$.

b) **[5 puntos]** De un triángulo rectángulo se sabe que tiene un ángulo de 30° y que la altura correspondiente a la hipotenusa mide $\sqrt{3}$ cm. Halla la longitud de la hipotenusa y el área del triángulo.

$a)$

$$\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^3=\left(x^2\right)^3-3\left(x^2\right)^2\frac{1}{x}+3\left(x^2\right)^1\left(\frac{1}{x}\right)^2-\left(\frac{1}{x}\right)^3=x^6-3x^3+3-\frac{1}{x^3}\Rightarrow El\ sumando\ pedido\ es\ 3$$

b)



$$\left\{\begin{array}{l} sen\ 30^{o}=\frac{Altura}{C}\Rightarrow C=\frac{Altura}{sen\ 30^{o}}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{3}\ cm \\ sen\ 60^{o}=\frac{Altura}{C'}\Rightarrow C'=\frac{Altura}{sen\ 60^{o}}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=2\ cm \end{array}\right.\Rightarrow H=\sqrt{C^2+C'^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2}=\sqrt{12+4}=4\ cm$$

$$A=\frac{1}{2}C\cdot C'=\frac{1}{2}2\sqrt{3}\cdot 2=2\sqrt{3}\ cm^2$$

Ejercicio 5.-

Dadas la recta r de ecuación $ax + 2y + 5 = 0$ y la recta s de ecuación $2x - 3y + 1 = 0$

a) [**5 puntos**] Halla el valor de la constante a sabiendo que r y s son paralelas.

b) [**5 puntos**] Halla la distancia del origen de coordenadas a la recta s.

a) Los vectores directores, de dos rectas paralelas, son iguales o proporcionales

$$\begin{cases} ax + 2y + 5 = 0 \\ 2x - 3y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{2}{-3} \Rightarrow -3a = 4 \Rightarrow a = -\frac{4}{3}$$

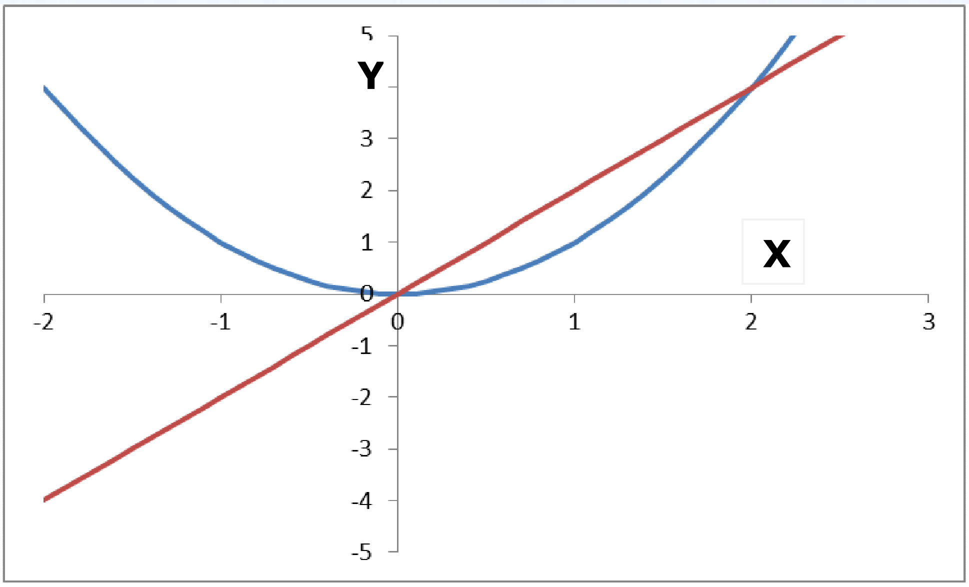
b)

$$O(0\,,0) \Rightarrow d(0\,,s) = \frac{|2\cdot 0 - 3\cdot 0 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|1|}{\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{13}$$

Ejercicio 6.-

a) [**5 puntos**] En un mismo gráfico, representa la parábola de ecuación $y = x^2$ y la recta de ecuación $y = 2x$.

b) [**5 puntos**] Halla el área del recinto limitado por las gráficas del apartado anterior.



b)

$$Puntos\ de\ corte\ entre\ funciones \Rightarrow x^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow (x-2)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

$$A = 2\int_0^2 x\,dx - \int_0^2 x^2\,dx = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^2 - \frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^2 = \left(2^2 - 0^2\right) - \frac{1}{3}\cdot\left(2^3 - 0^3\right) = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}\,u^2$$