

DISTRITO UNIVERSITARIO DE MÁLAGA
2007
MATEMÁTICAS (Mayores de 25 años).

Ejercicio 1.-

a) [5 puntos] Efectúa la siguiente operación simplificando al máximo el resultado

$$\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}}$$

b) [5 puntos] Calcula $f'(1)$ sabiendo que $f(x) = x\sqrt{2-x}$.

a)

$$\frac{(2 - \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} + \frac{4\sqrt{2}}{2} = \frac{(2 - \sqrt{2})^2}{4 - 2} + \frac{4\sqrt{2}}{2} = \frac{(2 - \sqrt{2})^2 + 4\sqrt{2}}{2} = \frac{4 - 4\sqrt{2} + 2 + 4\sqrt{2}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

b)

$$f'(x) = \sqrt{2-x} + \frac{(-1)}{2\sqrt{2-x}}x = \frac{2-x-x}{2\sqrt{2-x}} = \frac{2-2x}{2\sqrt{2-x}} = \frac{2(1-x)}{2\sqrt{2-x}} = \frac{1-x}{\sqrt{2-x}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1-1}{\sqrt{2-1}} = \frac{0}{1} = 0$$

Ejercicio 2.-

a) [5 puntos] Desarrolla $(x-1)^3$.

b) [5 puntos] Halla la distancia del origen de coordenadas a la recta $y = x + 1$.

a)

$$(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 \cdot 1^1 + 3x \cdot 1^2 - 1^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

b)

$$\begin{cases} r \equiv x - y + 1 = 0 \\ O(0, 0) \end{cases} \Rightarrow d(O, r) = \frac{|0 - 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} u$$

Ejercicio 3.-

a) [5 puntos] Calcula el valor de x sabiendo que $\log_x 32 = -\frac{5}{3}$.

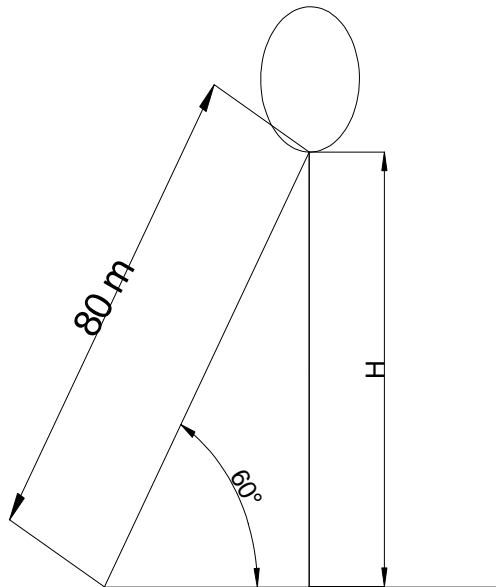
b) [5 puntos] Un globo está sujeto al suelo con un cordel de 80 m. de largo, que forma un ángulo de 60° con el suelo horizontal. Suponiendo que el cordel está recto, ¿cual será la altura del globo?

a)

$$\log_x 32 = -\frac{5}{3} \Rightarrow x^{-\frac{5}{3}} = 32 \Rightarrow \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}} = 32 \Rightarrow 32 \cdot x^{\frac{5}{3}} = 1 \Rightarrow x^{\frac{5}{3}} = \frac{1}{32} \Rightarrow \sqrt[3]{x^5} = \frac{1}{2^5} \Rightarrow x^5 = \left(\frac{1}{2^5}\right)^3 \Rightarrow x^5 = \frac{1}{2^{15}} \Rightarrow$$

$$x = \sqrt[5]{\frac{1}{2^{15}}} = \frac{1}{2^{\frac{15}{5}}} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

b)



$$\text{sen } 60 = \frac{H}{80} \Rightarrow H = 80 \cdot \text{sen } 60^\circ = 80 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 40 \cdot \sqrt{3} = 69'282 \text{ m.}$$

Ejercicio 4.- [10 puntos]

Halla los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = x^3 - 9x$. Determina también en qué intervalos es creciente la función y donde es decreciente.

$$f'(x) = 3x^2 - 9 = 3(x^2 - 3) \Rightarrow \text{Sabido que } x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$f'(x) = 3(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \Rightarrow \text{Creciente} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow 3(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) > 0 \Rightarrow \begin{cases} 3 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ x - \sqrt{3} > 0 \Rightarrow x > \sqrt{3} \\ x + \sqrt{3} > 0 \Rightarrow x > -\sqrt{3} \end{cases}$$

	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	∞
$3 > 0$	(+)	(+)	(+)	(+)
$x > -\sqrt{3}$	(-)	(+)	(+)	(+)
$x > \sqrt{3}$	(-)	(-)	(+)	(+)
Solución	(+)	(-)	(+)	(+)

Creciente $\forall x \in (x < -\sqrt{3}) \cup (x > \sqrt{3})$

Decreciente $\forall x \in -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$

Máximo relativo $x = -\sqrt{3} \Rightarrow f(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^3 - 9 \cdot (-\sqrt{3}) = -3\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

De Creciente pasa a Decreciente

Mínimo relativo $x = \sqrt{3} \Rightarrow f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^3 - 9 \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3} - 9\sqrt{3} = -6\sqrt{3}$

De Decreciente pasa a Creciente

Ejercicio 5.-

a) [5 puntos] Halla todos los valores de x para los que $\frac{2x+3}{x-2} \leq 0$.

b) [5 puntos] Halla la ecuación de una circunferencia sabiendo que uno de sus diámetros tiene por extremos los puntos A(-1, 4) y B(7, -2).

a)

$$\frac{2x+3}{x-2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x+3 > 0 \Rightarrow 2x > -3 \Rightarrow x > -\frac{3}{2} \\ x-2 > 0 \Rightarrow x > 2 \end{cases}$$

	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	2	∞
$x > -\frac{3}{2}$	(-)	(+)	(+)	(+)
$x > 2$	(-)	(-)	(+)	(+)
Solución	(+)	(-)	(+)	(+)

Sera Solución la que nos da la parte negativa ya que $\frac{2x+3}{x-2} \leq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / -\frac{3}{2} \leq x \leq 2$

Continuación del Ejercicio 5

b) El punto medio **C** del vector **AB** es el centro de la circunferencia y el diámetro es la mitad del módulo del vector **AB**

$$\begin{cases} x_c = \frac{(-1)+7}{2} = 3 \\ y_c = \frac{4+(-2)}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Centro } C(3, 1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (7, -2) - (-1, 4) = (8, -6) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$R = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\text{Ecuación} \Rightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 - 25 = 0 \Rightarrow C \equiv x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$$

Ejercicio 6.- [10 puntos]

Halla el valor de m sabiendo que la recta $y = mx + 3$ pasa por el punto de intersección de las rectas $y = 2x + 1$ e $y = x + 5$.

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x - y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ -x + y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow 4 - y + 5 = 0 \Rightarrow y = 9 \Rightarrow \text{Punto } (4, 9) \Rightarrow$$

$$9 = m \cdot 4 + 3 \Rightarrow 4m = 6 \Rightarrow m = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$