Problemas de M.A.S.

1.- Una partícula animada de m.a.s. inicia el movimiento en el extremo positivo de su trayectoria y tarda 0'25 s en llegar al centro de la misma. La distancia entre ambas posiciones es de 10 cm. Calcula: a) El periodo y la frecuencia del movimiento. b) El número de vibraciones que realiza en un minuto. c) La ecuación del movimiento. d) La posición de la partícula 0'5 s después de iniciado el movimiento

Datos: A = 10 cm = 0'1 m, $T_{¼}$ = 0'25 s, para t = 0, x = A

a) T = 4 · $T_{¼}$ = 4 · 0'25 = 1 s

La frecuencia, f, será: f = $\frac{1}{T}$ = 1 Hz

b) La frecuencia es el número de vibraciones (ciclos) que realiza el cuerpo en un segundo.
En un minuto = 60 s $\Rightarrow$ nº vibraciones en 60 s = 60 · f = 60 vibraciones

c) La ecuación del m.a.s. es: y = A · sen ($\omega t + \varphi_0$)

La frecuencia angular o pulsación: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ = 2 π rad/s

Cuando t = 0, x = A $\Rightarrow$ A = A · sen ($2\pi \cdot 0 + \varphi_0$) $\Rightarrow$ 1 = sen $\varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = \pi/2$ rad

En definitiva: y = 0'1 (sen 2π t + π /2)

d) Para t = 0'5 s: y = 0'1 (sen 2π · 0'5 + π /2) = 0'1 (sen 3π/2) m = -0'1m

La partícula se encuentra en el extremo opuesto al que estaba al iniciar el movimiento.

2.- Una partícula material tiene un m.a.s. dado por la ecuación y = 5 · sen (πt - $\frac{\pi}{2}$), donde y viene dado en centímetros cuando t se expresa en segundos. Determina: a) la amplitud, la pulsación, el periodo, la frecuencia y la fase inicial. b) La fase, la elongación y la velocidad para t = 1/4 s.

a) Comparando con la expresión general del m.a.s.: y = A · sen ($\omega t + \varphi_0$)

La amplitud, A = 5 cm
La pulsación, ω = π rad/s

La fase inicial, $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$ rad

El periodo, T = $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi}$ = 2 s

La frecuencia, f = $\frac{1}{T} = \frac{1}{2}$ = 0'5 Hz

b) La fase, $\varphi = \omega t + \varphi_0 = \pi t - \frac{\pi}{2} = \pi \cdot \frac{1}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$ rad

La elongación, y = 5 · sen ($-\frac{\pi}{4}$) = -3'54 cm

La velocidad, $v = \frac{dy}{dt} = 5\pi \cdot \cos\left(\pi \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) = 5\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = 5\pi \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ = 11'11 cm/s

3.- Una partícula de 250 g de masa vibra con m.a.s. de forma que, para t = 0, pasa por la posición de equilibrio en sentido negativo. Si tarda 1 minuto y 40 segundos en dar 125 oscilaciones completas y la distancia recorrida en una oscilación completa es de 6,48 m, calcula: a) Las constantes del movimiento; b) La ecuación del movimiento, expresada en seno y coseno; c) La velocidad y aceleración máximas.

Datos: m = 250 g, para t = 0, x = 0 (hacia el extremo negativo), para Δt =1 min 40s, nº oscilaciones = 125, distancia recorrida en una oscilación = 6,48 m.

La frecuencia: $f = \frac{125}{100} = 1'25$ Hz

a) Las constantes del movimiento son: amplitud, A, frecuencia angular, ω, y fase inicial, φ_0.
En una oscilación completa se recorre una distancia igual a cuatro veces la amplitud, por tanto:

$A = \frac{6'48}{4} = 1'62$ m

La frecuencia angular es: $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 1'25 = 7'85$ rad/s

Para t = 0, y = 0 $\Rightarrow 0 = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot 0 + \varphi_0) \Rightarrow 0 = A \cdot (\text{sen}\ \varphi_0)$

Como $A \neq 0 \Rightarrow \text{sen}\ \varphi_0 = 0 \Rightarrow$ como la partícula inicia el movimiento dirigiéndose hacia el extremo negativo la fase inicial, $\varphi_0 = \pi$ rad (180º)

b) Ecuación del movimiento expresada en seno: $y = 1'62 \cdot \text{sen}(7'85t + \pi)$

Expresada en coseno: $y = 1'62 \cdot \text{sen}(7'85t + \pi - \frac{\pi}{2}) = 1'62 \cdot \text{sen}(7'85t + \frac{\pi}{2})$

c) La velocidad máxima es: $v = \pm A \cdot \omega = 1'62 \cdot 7'85 = \pm 12'72$ m/s

El valor el positivo corresponde al paso de la partícula hacia el extremo positivo y el valor negativo al paso por el mismo lugar en sentido negativo.
La aceleración: $\pm A \cdot \omega^2 = \pm 1'62 \cdot 7'85^2 = \pm 99'82$ m/s^2,

El valor positivo corresponde al paso de la partícula por el extremo negativo y el valor positivo al paso de la partícula por el extremo positivo.

4.- Un oscilador vibra de forma que para t=0 se encuentra a 4 cm de la posición de equilibrio con una velocidad v_0 = 87 cm/s. Si la frecuencia del movimiento es de 2 Hz, calcula: a) La fase inicial y la amplitud del movimiento; b) La elongación y la velocidad en el instante t = 0,5 s; c) El valor máximo de la velocidad.

Datos: para t = 0, y_0 = 4 cm = 0'04 m , v_0 = 87 cm/s = 0'7 m/s , f = 2 Hz

a) $\omega = 2\pi f = 4\pi$ rad/s

$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - y^2} \Rightarrow A = \pm\sqrt{\frac{v^2}{\omega^2} + y^2} = \pm\sqrt{\frac{0'87^2}{16\pi^2} + 0'04^2} = \pm 0'08$ m

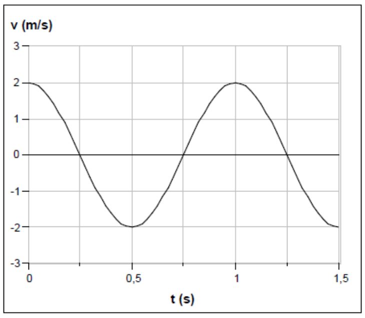
Para t =0, y_0 = 0'04 m $\Rightarrow 0'04 = 0'08 \cdot \text{sen}(4\pi \cdot 0 + \varphi_0) = 0'08 \cdot \text{sen}\ \varphi_0 \Rightarrow \text{sen}\ \varphi_0 = 0'5$ $\varphi_0 = 30º = \frac{\pi}{6}$ rad

b) $y = 0'08 \cdot \text{sen}(4\pi \cdot t + \frac{\pi}{6})$ Para t =0'5: $y = 0'08 \cdot \text{sen}(4\pi \cdot 0'5 + \frac{\pi}{6}) = 0'08 \cdot \text{sen}(2\pi + \frac{\pi}{6}) = 0'04$ m

$v = 0'08 \cdot 4\pi \cos(4\pi \cdot 0'5 + \frac{\pi}{6}) = 0'32\pi \cos(2\pi + \frac{\pi}{6}) = 0'87$ m/s

c) La velocidad máxima es: $v = \pm A \cdot \omega = \pm 0'08 \cdot 4\pi = 1$ m/s

5.- Una partícula de masa m = 10 g oscila armónicamente en la forma *x* = *A sen* ω*t*. En la figura se representa la velocidad de esta partícula en función del tiempo.
a) Determina la frecuencia angular y la amplitud de la oscilación.
b) Calcula la energía cinética de *m* en el instante t_1 = 0'5 s y la potencial en t_2 = 0'75 s.
¿Coinciden? ¿Por qué?



a) De la figura, deducimos que v_{max} = 2 m/s y que T = 1 s.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi = 6'28 \text{ rad/s}$$

$$v_{max} = \pm\omega A \Rightarrow 2 = 6'28 \cdot A \;\Rightarrow A\ \frac{2}{6'28} = 0'32\ m$$

b) En la gráfica vemos que, en el instante t_1 = 0'5 s, v_1 =-2 m/s y que, para t_2 = 0,75 s, la v_2 = 0 m/s, por lo que se encuentra en uno de los extremos de la oscilación ($x = \pm A$).

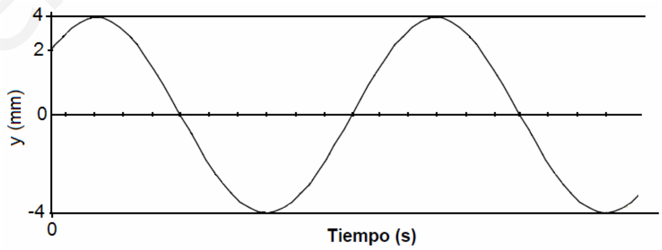
La constante de recuperación: $k = m\omega^2 = 0'01 \cdot 6'28^2 = 0'394$ N/m

$Ec_1 = 0'5 \cdot m \cdot v^2 = 0'5 \cdot 0'01 \cdot (-2)^2 = 0'02$ J

$Ep_2 = 0'5 \cdot k \cdot y^2 = 0'5 \cdot 0'394 \cdot 0'32^2 = 0'02$ J

Estos resultados coinciden porque, en el instante t_1, la partícula se encuentra en x = 0 y toda la energía mecánica es cinética, mientras que, en el instante t_2, toda la energía mecánica es potencial. Recuerda que la energía mecánica se conserva.

6.- Se tiene un cuerpo de masa m = 10 kg que realiza un movimiento armónico simple. La figura es la representación de su elongación, y, en función del tiempo, t . Calcula:



a) La ecuación matemática del movimiento armónico y(t) con los valores numéricos correspondientes que se tienen que deducir de la gráfica.
b) La velocidad de dicha partícula en función del tiempo y su valor concreto en t = 5 s.
Datos de la gráfica: Amplitud, A = 4 mm = $4 \cdot 10^{-3}$ m, Periodo, T = 12 s

a) La frecuencia angular: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ rad/s

La ecuación del movimiento armónico: $y = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$

Para t = 0 s y = 2mm: $2 = 4 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot 0 + \varphi_0\right) = 4 \cdot \text{sen}\,\varphi_0 \Rightarrow \text{sen}\,\varphi_0 = \frac{2}{4} \Rightarrow \varphi_0 = 30º = \frac{\pi}{6}$

Por tanto: $y(t) = 4 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot t + \frac{\pi}{6}\right)$ mm

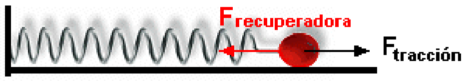
b) $v = \frac{dy}{dt} = 4\frac{\pi}{6} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t + \frac{\pi}{6}\right)$

Para t = 5 s: $v = \frac{2\pi}{3} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 5 + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3} \cdot \cos\pi = -\frac{2\pi}{3} = -2'09$ mm/s

7.- Cierto resorte tiene sujeto un cuerpo de 2 kg en su extremo libre y se requiere una fuerza de 8 N para mantenerlo a 20 cm del punto de equilibrio. Si el cuerpo realiza un m.a.s. al soltarlo, halla: a) la constante recuperadora del resorte; b) el periodo de su oscilación.

Datos: m = 2 kg , $F_{tracción}$ = 8 N = $F_{recuperadora}$, A = 20 cm = 0'2 m

a) En el instante en que se suelta el muelle se puede aplicar la ley de Hooke: $F_{tracción} = F_{elastica}$



El módulo de la fuerza de tracción es igual al módulo de la fuerza recuperadora:

$F_{tracción} = 8 = k \cdot y$

$$k = \frac{F_{tracción}}{y} = \frac{8}{0'2} = 40 \text{ Nm}^{-1}$$

b) El periodo de vibración de un resorte viene dado por la expresión $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{40}} = 1'4$ s

8.- En una catedral hay una lámpara que cuelga desde el techo de una nave y que se encuentra a 2 m del suelo. Se observa que oscila levemente con una frecuencia de 0'1 Hz. ¿Cuál es la altura, h, de la nave? Dato: g = 9'8 m/s^2.

Datos: f = 0'1 Hz,

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0'1} = 10 \text{ s}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow L = \frac{T^2 \cdot g}{4\pi^2} = \frac{10^2 \cdot 9'8}{4 \cdot 3'14^2} = 24'82 \text{ m}$$

Como la lámpara está a 2 m del suelo: h = 2 + 24'82 = 26'82 m

9.- La bolita de un péndulo simple realiza una oscilación aproximadamente horizontal y armónica, en presencia del campo gravitatorio terrestre, con un periodo T = 2 s y una amplitud A= 2 cm. a) Obtén la ecuación de la velocidad de la bolita en función del tiempo y represéntala gráficamente. Toma origen de tiempo (t = 0) en el centro de la oscilación.
b) ¿Cuál sería el periodo de oscilación de este péndulo en la superficie de la Luna, donde la intensidad del campo gravitatorio es la sexta parte del terrestre?

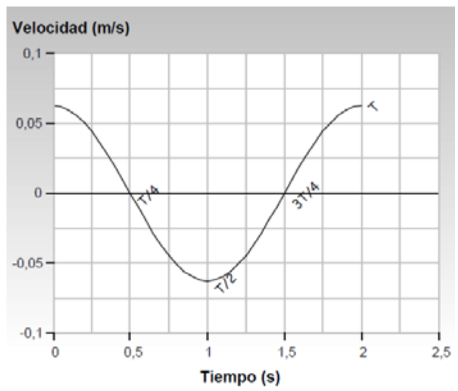
Datos: T = 2s, A = 2 cm = 0'02 m

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ rad/s}$$

a) $y = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow 0 = 0'02 \cdot \text{sen}(\pi \cdot 0 + \varphi_0) = 0'02 \cdot \text{sen}\,\varphi_0 \Rightarrow \text{sen}\,\varphi_0 = 0 \Rightarrow \varphi_0 = 0$ rad

$v = A \cdot \omega \cdot \cos\omega \cdot t = 0'02\,\pi \cos(\pi \cdot t)$

t (s)	0	0'5	1	1'5	2
v (m/s)	0'063	0	-0'063	0	0'063



b) El periodo del péndulo en la Luna: $T_{Luna} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_{Luna}}}$

Como $g_{Luna} = g/6$

$$T_{Luna} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{\frac{g_{Tierra}}{6}}} = 2\pi\sqrt{\frac{6 \cdot L}{g_{Tierra}}} = T_{Tierra} \cdot \sqrt{6} = 2 \cdot \sqrt{6} = 4'9 \text{ s}$$

La bolita oscilará más lentamente, ya que la fuerza de atracción lunar en menor que en la Tierra.

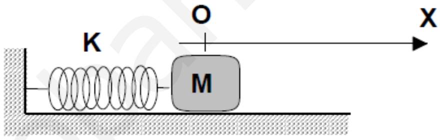
10.- Un péndulo simple está construido con una bolita suspendida de un hilo de longitud L=2m. Para pequeñas oscilaciones, su periodo de oscilación en un cierto lugar resulta ser T= 2'84 s. Determina la intensidad del campo gravitatorio en el lugar donde se ha medido el periodo.

Datos: L = 2 m, T = 2'84 s

El periodo de un péndulo simple es: $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{L}{g}}$

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 2}{2'84^2} = 9'79 \text{ m/s}^2$$

11.- El cuerpo de la figura tiene masa, m = 0'5 kg, está apoyado sobre una superficie horizontal sin rozamiento y sujeto al extremo de un resorte de constante recuperadora k = 20 N/m. Partiendo de la posición de equilibrio, x = 0, se desplaza el bloque 5 cm hacia la derecha y se libera con velocidad inicial nula, de forma que empieza a oscilar armónicamente en torno a dicha posición.



a) Calcula el periodo de oscilación.

b) Calcula las energías cinética y potencial de m en los extremos de su oscilación y cuando pasa por el centro de la misma.

c) Durante la oscilación, ¿es constante la energía mecánica de m? ¿Por qué?

Datos: m =0'5 kg, k = 20 N/m, A = 5 cm = 0'05 m, $v_I = 0$,

a) $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\dfrac{0'5}{20}} = 0'99$ s

b) En los extremos de la oscilación ($x = \pm A$), la energía cinética es nula y la energía potencial alcanza su máximo valor:

$Ep = 0'5 \cdot k \cdot A^2 = 0'5 \cdot 20 \cdot 0'05 = 0'025$ J

En el centro de la oscilación la energía potencial es nula y energía cinética tiene su valor máximo

Ec = 0'025 J.

c) La energía mecánica se conserva porque el cuerpo evoluciona sometido a la acción de una fuerza conservativa: la fuerza recuperadora del muelle. Los resultados del apartado anterior, corroboran este principio de conservación.

En los extremos de la oscilación toda la energía mecánica es potencial:

Em = Ec + Ep = 0 + 0'025 = 0'025 J

En el centro de la oscilación sólo existe energía cinética:

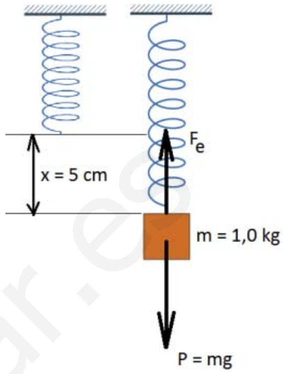
Em = Ec + Ep = 0'025 + 0 = 0'025 J

12.- Disponemos de un muelle que se alarga 5 cm cuando se cuelga de él una masa de 1,0 kg. Colocamos después este muelle unido a una masa de 500 g sobre una mesa horizontal sin rozamiento. La masa se separa 3 cm de su posición de equilibrio y se deja vibrar sobre el eje horizontal. Calcula: a) la constante de recuperación del resorte; b) la energía potencial en el punto de máxima deformación en horizontal; c) La energía cinética cuando x = 2 cm; d) la velocidad de la partícula en el punto mencionado en el apartado anterior.

Datos:

En vertical: y = 5 cm = 0'05 m, si m = 1 kg.

En horizontal: si m = 500 g = 0'5 kg , A = 3 cm = 0'03 m



a) En la figura adjunta se representa la situación en vertical. En primer lugar el muelle sin estirar, en posición de equilibrio. Luego la situación al colgar una masa de 1 kg, situación también de equilibrio en la que podemos establecer que el peso y la fuerza elástica (recuperadora) son iguales en módulo:

$P = F_{elástica}$

$$m \cdot g = k \cdot y \Rightarrow k = \frac{m \cdot g}{y} = \frac{1 \cdot 9'8}{0'05} = 196 \text{ N m}^{-1}$$

b) La máxima deformación se produce cuando x = A. En este punto la energía potencial elástica coincide con la energía mecánica de la partícula vibrante. Por tanto:

La energía mecánica será: $Ep = E_m = \frac{1}{2} kA^2 = 0'5 \cdot 196 \cdot 0'03^2 = 0'088$ J

c) Si y = 0'02 m, la energía cinética será: $Ec = \frac{1}{2} k \cdot (A^2 - y^2) = 0'5 \cdot 196\ (0'03^2 - 0'02^2) = 0'049$ J

d) La velocidad cuando la elongación vale 0'02 cm se pude calcular rápidamente si se conoce la energía cinética de la partícula en ese punto:

$$Ec = 0'5\ m\ v^2 \Rightarrow v = \pm\sqrt{\frac{Ec}{0'5 \cdot m}} = \pm\sqrt{\frac{0'049}{0'5 \cdot 0'5}} = \pm\ 0'443 \text{ m/s}$$

Problemas de Selectividad

1.- (Junio de 2006) a) Demuestre que en un oscilador armónico simple la aceleración es proporcional al desplazamiento pero de sentido contrario.
b) Una partícula realiza un movimiento armónico simple sobre el eje OX y en el instante inicial pasa por la posición de equilibrio. Escriba la ecuación del movimiento y razone cuándo es máxima la aceleración.

a) Un movimiento armónico simple es un movimiento oscilatorio periódico cuya elongación respecto a la posición de equilibrio viene dada por la expresión:

$$y(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

La ecuación de la velocidad se obtiene: $v = \dfrac{dy}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$

La ecuación de la aceleración se obtiene: $a = \dfrac{dv}{dt} = - A\,\omega^2 \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$

Comparando las ecuaciones de la posición y la aceleración se cumple la relación: $\boldsymbol{a = -\omega^2 \cdot y}$, con lo que concluimos que, efectivamente, la aceleración es directamente proporcional a la elongación (y) aunque de sentido contrario. Esto es, en posiciones positivas la aceleración es negativa y viceversa.

b) La expresión general de un m.a.s. viene dada por: $y(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$
Donde **y** (elongación) es la distancia a la posición de equilibrio.

Para t = 0, la partícula pasa por la posición de equilibrio, es decir, $y_0 = 0$:
$0 = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot 0 + \varphi_0) \Rightarrow 0 = A \cdot \text{sen}\,\varphi_0 \Rightarrow \text{sen}\,\varphi_0 = 0 \Rightarrow \varphi_0 = 0$ rad
Y la ecuación del movimiento quedará: $y = A \cdot \text{sen}(\omega t)$

Como la aceleración es proporcional a la elongación: $a = -\omega^2 y$

- La aceleración será nula en la posición de equilibrio (y = 0)
- Y máxima en los extremos ($y = \pm A$) en cuyo caso vale: $a = -\omega^2 A$

2.- (Junio 2007) Un cuerpo realiza un movimiento vibratorio armónico simple
a) Escriba la ecuación del movimiento si la aceleración máxima es de $5\pi^2$ cm·s^{-2}, el periodo de las oscilaciones 2 s y la elongación del cuerpo al iniciarse el movimiento 2'5 cm.
b) Represente gráficamente la elongación y la velocidad en función del tiempo y comente la gráfica.
Datos: $a_{max} = 5\pi^2$ cm·s^{-2}, T = 2 s, para t= 0 y = 2'5 cm

a) La ecuación general del oscilador armónico es: $y(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$

Derivando: $v = \dfrac{dy}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$

$a = \dfrac{dv}{dt} = - A\,\omega^2 \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0) = - \omega^2 \cdot y$

Como conocemos el periodo se puede calcular la pulsación: $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$ rad/s = 3'14 rad/s

Como $a_{max} = -A\,\omega^2 = 5\,\pi^2$ cm/s$^2 \Rightarrow A\,\omega^2 = 5\,\pi^2 \;\Rightarrow A = \dfrac{5\pi^2}{\pi^2} = 5$ cm = 0’05 m

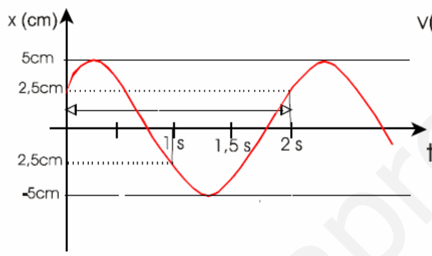
La φ_0 se obtiene sustituyendo en la ecuación general el dato de que y = 0'025 cm, para t = 0:

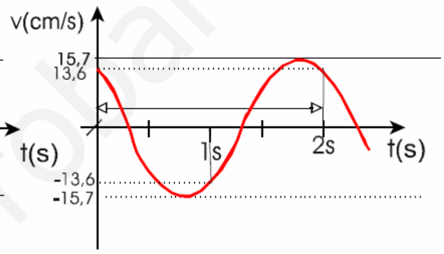
$0'025 = 0'05 \cdot \text{sen}\,\varphi_0 \;\Rightarrow \varphi_0 = \pi/6$ rad = 0'52 rad

La ecuación general será: $y = 0'05 \cdot \text{sen}\,(\pi\, t + \pi/6)$ m = $0'05 \cdot \text{sen}\,(3'14\, t + 0'52)$ m

Se ha considerado que, en el instante inicial, el oscilador se dirige hacia elongación máxima positiva, con velocidad inicial positiva y decreciente. Pero también se podría haber considerado que, en el instante inicial el movimiento fuese hacia el punto de equilibrio, con la velocidad inicial negativa y aumentando. En ese caso, φ_0 sería $5\,\pi/6$ rad = 2'6 rad

b) como T = 2 s, cada 2 s se repetirán periódicamente los valores de velocidad y elongación (y).
A = 5 cm, y_0 = 2'5 cm, $v_{max} = A\,\omega = 5\,\pi$ cm/s = 15'7 cm/s, $v_0 = 5\,\pi \cdot \cos(\pi/6)$ = 13'6 cm/s



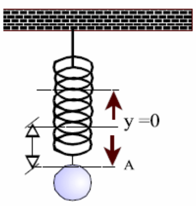


Gráfica x-t: en t = 0, sería y = + 2'5 cm, y a partir de ahí aumentaría hasta +5 cm, después diminuiría hasta – 5 cm, pasando por el punto de equilibrio, aumentaría hasta +5 pasando por cero y así sucesivamente. Volvería a pasar por el mismo valor de **y**, cada 2 s.

Gráfica v-t: para t = 0 v = +13'6 cm/s y, a partir, de ahí disminuirá al moverse hacia amplitud máxima, donde v = 0. El valor -13'5, se repetirá cuando la diferencia de fase sea π, esto es 1 s después. Cada 2 s el oscilador se localizará en y = 2'5 cm, con v = 13'6 cm/s, moviéndose hacia amplitud máxima positiva.

3.- (Junio 2008) a) Describa el movimiento armónico simple y comente sus características cinemáticas y dinámicas. b) Una masa oscila verticalmente suspendida de un muelle. Describa los tipos de energía que intervienen y sus respectivas transformaciones.

a) Ver teoría.



b) En cada oscilación, se producen cambios en la energía cinética, potencial gravitatoria y potencial elástica. Ahora bien, como las fuerzas que intervienen (gravitatoria y elástica) son ambas conservativas, la energía total del sistema permanece constante. Independientemente de donde se ponga el origen de energías potenciales gravitatorias se puede decir que:

- Cuando la masa se encuentra en el punto de equilibrio, tanto en el ascenso como en el descenso, no tiene energía potencial elástica. En el ascenso disminuye su energía cinética y aumenta la potencial gravitatoria y elástica. En el descenso disminuye su energía cinética y energía potencial gravitatoria y aumenta la energía potencial elástica.
- Cuando la masa va desde la máxima elongación negativa hacia el punto de equilibrio, disminuye la energía potencial elástica y aumenta la energía cinética y la energía potencial gravitatoria.
- Cuando la masa desciende desde la máxima elongación positiva, hacia el punto de equilibrio, disminuyen las energías potenciales gravitatoria y elástica y aumenta la energía cinética.

4.- (Junio 2011) a) Movimiento armónico simple. Características cinemáticas y dinámicas.
b) Razone si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: en un movimiento armónico simple la amplitud y la frecuencia aumentan si aumenta la energía mecánica.
a) Ver teoría.

b) Esta pregunta es un poco ambigua, porque no dice como se está aumentando la energía mecánica ni de qué tipo de m.a.s se trata.

Suponiendo que se trata de un movimiento armónico simple descrito por una masa unida a un resorte, en el que no se varía ni la masa ni la constante elástica, la frecuencia angular de oscilación es una característica propia del sistema (llamada frecuencia de oscilación natural). Y viene dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Por tanto la frecuencia de oscilación no variará si aumentamos la energía mecánica del sistema.

La energía mecánica del sistema m.a.s. se mantiene constante durante todo el movimiento, ya que solo actúan fuerzas conservativas. Coincide con la energía potencial máxima: $E_m = \frac{1}{2} k A^2$

Vemos que el aumento de energía mecánica se traduce en un aumento de la amplitud a del movimiento, ya que la constante elástica no cambiará.

5.- a) Explique el significado de las magnitudes que aparecen en la ecuación de un movimiento armónico simple e indique cuáles son sus respectivas unidades en el sistema internacional
b) Demuestre que en un oscilador armónico simple la aceleración es proporcional al desplazamiento de la posición de equilibrio pero de sentido contrario.

a) La posición, en función del tiempo del oscilador armónico respecto a la posición de equilibrio viene dada por la elongación, y su ecuación, si se utiliza la proyección sobre el eje Y, se trata de una función seno:

$$y(t) = A \cdot \text{sen}\,(\omega t + \varphi_0)$$

Si se utiliza la proyección sobre el eje X, se trata de una función coseno: $x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$

Elongación, (x o y): *posición, en cada instante, de la partícula que vibra respecto a la posición central de equilibrio o centro de oscilación O.* Es decir, es la distancia al centro de oscilación. Unidad: m.

Amplitud, A: *valor máximo de la elongación.* Unidad: m.

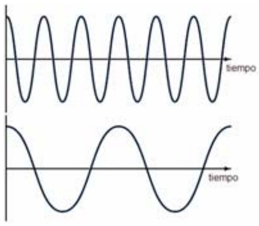
Frecuencia angular o pulsación, ω: *es el número de periodos comprendidos entre 2π unidades de tiempo.* Unidad: rad/s:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Posición angular inicial o fase inicial, φ_0 es la llamada también, constante de fase. La expresión $\varphi = (\omega t + \varphi_0)$ es la fase del movimiento. Unidad: radianes.

Otras magnitudes características del movimiento armónico simple.

Periodo, T, *tiempo empleado por la partícula en efectuar una oscilación completa*. Es decir, el tiempo que tarda el móvil en pasar dos veces consecutivas por el mismo sitio y en el mismo estado de movimiento (velocidad, aceleración,…). Unidad: s.



Frecuencia, f, *número de oscilaciones efectuadas en la unidad de tiempo*. Unidad: hercio (Hz). Equivale a: vibraciones/s = ciclos (s^{-1}).

$$f = \frac{1}{T}$$

b) Un movimiento armónico simple es un movimiento oscilatorio periódico cuya elongación respecto a la posición de equilibrio viene dada por la expresión:

$$y\ (t) = A \cdot \text{sen}\ (\omega t + \varphi_0)$$

La ecuación de la velocidad se obtiene: $v = \frac{dy}{dt} = A\omega \cos\ (\omega t + \varphi_0)$

La ecuación de la aceleración se obtiene: $a = \frac{dv}{dt} = - A\ \omega^2 \cdot \text{sen}\ (\omega t + \varphi_0)$

Comparando las ecuaciones de la posición y la aceleración se cumple la relación: $\boldsymbol{a = -\omega^2 \cdot y}$, con lo que concluimos que, efectivamente, la aceleración es directamente proporcional a la elongación (y) aunque de sentido contrario. Esto es, en posiciones positivas la aceleración es negativa y viceversa.