Expulsión de lava de una erupción volcánica. Advierta las trayectorias parabólicas de las brasas proyectadas al aire. Todos los proyectiles siguen una trayectoria parabólica en ausencia de resistencia del aire. (© Arndt/Premium Stock/PictureQuest)

4.1 Vectores de posición, velocidad y aceleración

4.2 Movimiento en dos dimensiones con aceleración constante

4.3 Movimiento de proyectil

4.4 Partícula en movimiento circular uniforme

4.5 Aceleraciones tangencial y radial

4.6 Velocidad y aceleración relativas

4 Movimiento en dos dimensiones

En este capítulo se explora la cinemática de una partícula que se mueve en dos dimensiones. Conocer lo básico del movimiento bidimensional permitirá, en futuros capítulos, examinar una diversidad de movimientos que van desde el movimiento de satélites en órbita al movimiento de electrones en un campo eléctrico uniforme. Primero se estudia, con detalle, la naturaleza vectorial de posición, velocidad y aceleración. A continuación se considera el movimiento de proyectiles y el movimiento circular uniforme como casos especiales de movimiento en dos dimensiones. También se discute el concepto del movimiento relativo, que muestra por qué los observadores en diferentes marcos de referencia pueden medir posiciones y velocidades distintas para una partícula conocida.

4.1 Vectores de posición, velocidad y aceleración

En el capítulo 2 se mostró que el movimiento de una partícula a lo largo de una línea recta se conoce por completo si se conoce su posición como función del tiempo. Ahora esta idea se amplía al movimiento bidimensional de una partícula en el plano xy. Se comienza por describir la posición de la partícula mediante su **vector de posición** $\vec{\mathbf{r}}$, que se dibuja desde el origen de algún sistema coordenado a la posición de la partícula en el plano xy, como en la figura 4.1 (página 72). En el tiempo t_i, la partícula está en el punto Ⓐ, descrito por el vector de posición $\vec{\mathbf{r}}_i$. En un tiempo posterior t_f, está en el punto Ⓑ, descrito por su vector de posición $\vec{\mathbf{r}}_f$. La trayectoria de Ⓐ a Ⓑ no necesariamente es una línea recta. Conforme la partícula se mueve de Ⓐ a Ⓑ en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$, su vector de posición cambia de $\vec{\mathbf{r}}_i$ a $\vec{\mathbf{r}}_f$. Como aprendió en el capítulo 2, el desplazamiento es un vector, y el desplazamiento de la partícula es la diferencia entre su posición final y su posición inicial. Ahora se define el **vector desplazamiento** $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ para una partícula, véase la que se muestra en la figura 4.1, como la diferencia entre su vector de posición final y su vector de posición inicial:

Vector desplazamiento ►

$$\Delta\vec{\mathbf{r}} \equiv \vec{\mathbf{r}}_f - \vec{\mathbf{r}}_i \tag{4.1}$$

En la figura 4.1 se indica la dirección de $\Delta\vec{\mathbf{r}}$. Como se ve en la figura, la magnitud de $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ es *menor* que la distancia recorrida a lo largo de la trayectoria curva que sigue la partícula.

Como vio en el capítulo 2, con frecuencia es útil cuantificar el movimiento al obtener la relación de un desplazamiento, dividido entre el intervalo de tiempo durante el que ocurre dicho desplazamiento, que proporciona la relación de cambio de posición. La cinemática bidimensional (o tridimensional) es similar a la cinemática unidimensional, pero ahora se debe usar notación vectorial completa en lugar de signos positivos y negativos para indicar la dirección del movimiento.

La **velocidad promedio** $\vec{\mathbf{v}}_{\text{prom}}$ de una partícula durante el intervalo de tiempo Δt se define como el desplazamiento de la partícula dividido entre el intervalo de tiempo:

Velocidad promedio ►

$$\vec{\mathbf{v}}_{\text{prom}} \equiv \frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} \tag{4.2}$$

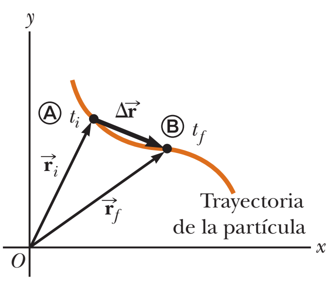


Figura 4.1 Una partícula que se mueve en el plano *xy* se ubica con el vector de posición $\vec{\mathbf{r}}$, que se dibuja desde el origen hasta la partícula. El desplazamiento de la partícula conforme se mueve de Ⓐ a Ⓑ en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$ es igual al vector $\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_f - \vec{\mathbf{r}}_i$.

Al multiplicar o dividir una cantidad vectorial por una cantidad escalar positiva como Δt sólo cambia la magnitud del vector, no su dirección. Puesto que el desplazamiento es una cantidad vectorial y el intervalo de tiempo es una cantidad escalar positiva, se concluye que la velocidad promedio es una cantidad vectorial dirigida a lo largo de $\Delta\vec{\mathbf{r}}$.

La velocidad promedio entre los puntos es *independiente de la trayectoria*; porque la velocidad promedio es proporcional al desplazamiento, que sólo depende de los vectores de posición inicial y final y no de la trayectoria seguida. Al igual que el movimiento unidimensional, si una partícula comienza su movimiento en algún punto y regresa a dicho punto a través de cualquier trayectoria, su velocidad promedio es cero para este viaje, porque su desplazamiento es cero. Considere de nuevo a los jugadores de basquetbol en la cancha de la figura 2.2 (página 21). En la ocasión anterior sólo se consideró su movimiento unidimensional de ida y vuelta entre las canastas. Sin embargo, en realidad, se mueven sobre una superficie bidimensional, y corren de ida y vuelta entre las canastas así como de izquierda a derecha a través del ancho de la cancha. Al iniciar desde una canasta, un jugador puede seguir una trayectoria bidimensional muy complicada. No obstante, hasta regresar a la canasta original, la velocidad promedio de un jugador es cero porque el desplazamiento del jugador para todo el viaje es cero.

Considere de nuevo el movimiento de una partícula entre dos puntos en el plano *xy* como se muestra en la figura 4.2. Conforme el intervalo de tiempo sobre el que se observa el mo-

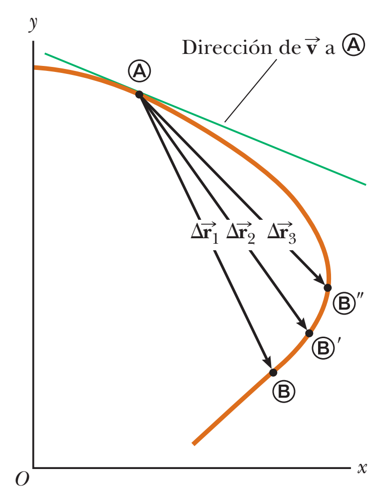


Figura 4.2 A medida que una partícula se mueve entre dos puntos, su velocidad promedio está en la dirección del vector desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{r}}$. Una vez que el punto final de la trayectoria se mueve de Ⓑ a Ⓑ′ a Ⓑ″, el desplazamiento respectivo y los correspondientes intervalos de tiempo se vuelven más y más pequeños. En el límite, cuando el punto final se aproxima a Ⓐ, Δt tiende a cero y la dirección de $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ tiende a la línea tangente a la curva en Ⓐ. Por definición, la velocidad instantánea en Ⓐ se dirige a lo largo de esta línea tangente.

vimiento se vuelve más y más pequeño (esto es, a medida que Ⓑ se mueve a Ⓑ′ y después a Ⓑ″, y así sucesivamente), la dirección del desplazamiento tiende a la línea tangente a la trayectoria en Ⓐ. La **velocidad instantánea** $\vec{\mathbf{v}}$ se define como el límite de la velocidad promedio $\Delta\vec{\mathbf{r}}/\Delta t$ conforme Δt tiende a cero:

$$\vec{\mathbf{v}} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \qquad \textbf{(4.3)}$$

◀ Velocidad instantánea

Esto es, la velocidad instantánea es igual a la derivada del vector de posición respecto del tiempo. La dirección del vector velocidad instantánea en cualquier punto en la trayectoria de una partícula es a lo largo de una línea tangente a la trayectoria en dicho punto y en la dirección del movimiento.

La magnitud del vector velocidad instantánea $v = |\vec{\mathbf{v}}|$ de una partícula se llama *rapidez* de la partícula, que es una cantidad escalar.

Conforme una partícula se mueve de un punto a otro a lo largo de cierta trayectoria, su vector velocidad instantánea cambia de $\vec{\mathbf{v}}_i$ en el tiempo t_i a $\vec{\mathbf{v}}_f$ en el tiempo t_f. Conocer la velocidad en dichos puntos permite determinar la aceleración promedio de la partícula. La **aceleración promedio** $\vec{\mathbf{a}}_{\text{prom}}$ de una partícula se define como el cambio en su vector velocidad instantánea $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ dividido por el intervalo de tiempo Δt durante el que ocurre dicho cambio:

$$\vec{\mathbf{a}}_{\text{prom}} \equiv \frac{\vec{\mathbf{v}}_f - \vec{\mathbf{v}}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} \qquad \textbf{(4.4)}$$

◀ Aceleración promedio

Puesto que $\vec{\mathbf{a}}_{\text{prom}}$ es la relación de una cantidad vectorial $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ y una cantidad escalar positiva Δt, se concluye que la aceleración promedio es una cantidad vectorial dirigida a lo largo de $\Delta\vec{\mathbf{v}}$. Como se indica en la figura 4.3, la dirección de $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ se encuentra al sumar el vector $-\vec{\mathbf{v}}_i$ (el negativo de $\vec{\mathbf{v}}_i$) al vector $\vec{\mathbf{v}}_f$ porque, por definición, $\Delta\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_f - \vec{\mathbf{v}}_i$.

Cuando la aceleración promedio de una partícula cambia en el transcurso de diferentes intervalos de tiempo, es útil definir su aceleración instantánea. La **aceleración instantánea** $\vec{\mathbf{a}}$ se define como el valor límite de la proporción $\Delta\vec{\mathbf{v}}/\Delta t$ conforme Δt tiende a cero:

$$\vec{\mathbf{a}} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \qquad \textbf{(4.5)}$$

◀ Aceleración instantánea

En otras palabras, la aceleración instantánea es igual a la derivada del vector velocidad respecto del tiempo.

Cuando una partícula acelera ocurren varios cambios. Primero, la magnitud del vector velocidad (la rapidez) puede cambiar con el tiempo como en movimiento en línea recta (unidimensional). Segundo, la dirección del vector velocidad puede cambiar con el tiempo incluso si su magnitud (rapidez) permanece constante como en movimiento bidimensional a lo largo de una trayectoria curva. Por último, tanto la magnitud como la dirección del vector velocidad pueden cambiar simultáneamente.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 4.1

Suma vectorial

Aunque la suma vectorial discutida en el capítulo 3 involucra vectores *desplazamiento*, la suma vectorial se puede aplicar a *cualquier tipo* de cantidad vectorial. Por ejemplo, la figura 4.3 muestra la suma de vectores *velocidad* con el uso del enfoque gráfico.

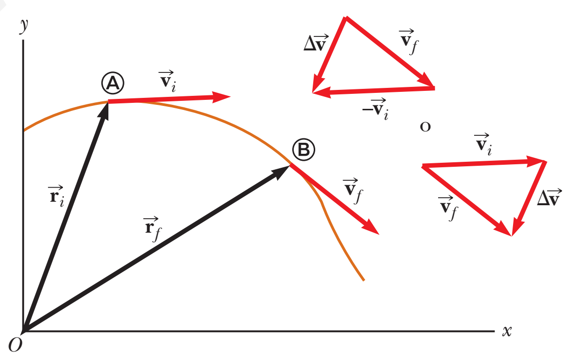


Figura 4.3 Una partícula se mueve de la posición Ⓐ a la posición Ⓑ. Su vector velocidad cambia de $\vec{\mathbf{v}}_i$ a $\vec{\mathbf{v}}_f$. Los diagramas vectoriales arriba a la derecha muestran dos formas de determinar el vector $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ de las velocidades inicial y final.

Pregunta rápida 4.1 Considere los siguientes controles en un automóvil: acelerador, freno, volante. ¿En esta lista cuáles son los controles que provocan una aceleración en el automóvil? a) los tres controles, b) el acelerador y el freno, c) sólo el freno, d) sólo el acelerador.

4.2 Movimiento en dos dimensiones con aceleración constante

En la sección 2.5 se investigó el movimiento unidimensional de una partícula bajo aceleración constante. Ahora considere el movimiento bidimensional durante el cual la aceleración de una partícula permanece constante tanto en magnitud como en dirección. Como se verá, este enfoque es útil para analizar algunos tipos comunes de movimiento.

Antes de embarcarse en esta investigación, es necesario enfatizar un punto importante en cuanto al movimiento bidimensional. Imagine un disco de hockey de aire que se mueve en línea recta a lo largo de una superficie perfectamente a nivel y libre de fricción de una mesa de hockey de aire. La figura 4.4a muestra un diagrama de movimiento desde arriba de este disco. Recuerde que en la sección 2.4 se vinculó la aceleración de un objeto con una fuerza sobre el objeto. Puesto que no hay fuerzas sobre el disco en el plano horizontal, se mueve con velocidad constante en la dirección x. Ahora suponga que sopla sobre el disco cuando pasa por su posición, con la fuerza de su soplido *exactamente* hacia la dirección y. Puesto que la fuerza de este soplido no tiene componente en la dirección x, no causa aceleración en la dirección x. Sólo una aceleración momentánea en la dirección y, lo que imprime al disco una componente de velocidad y constante una vez que la fuerza del soplido cesa. Después de soplar sobre el disco, su componente de velocidad en la dirección x no cambia, como se muestra en la figura 4.4b. La idea general de este experimento simple es que **el movimiento en dos dimensiones se puede representar como dos movimientos *independientes* en cada una de las dos direcciones perpendiculares asociadas con los ejes x y y. Esto es: cualquier influencia en la dirección y no afecta el movimiento en la dirección x y viceversa.**

El vector de posición para una partícula que se mueve en el plano xy se puede escribir

$$\vec{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} \tag{4.6}$$

donde x, y y $\vec{\mathbf{r}}$ cambian con el tiempo a medida que la partícula se mueve mientras los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$ permanecen constantes. Si se conoce el vector de posición, la velocidad de la partícula se puede obtener a partir de las ecuaciones 4.3 y 4.6, que dan

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}} = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} \tag{4.7}$$

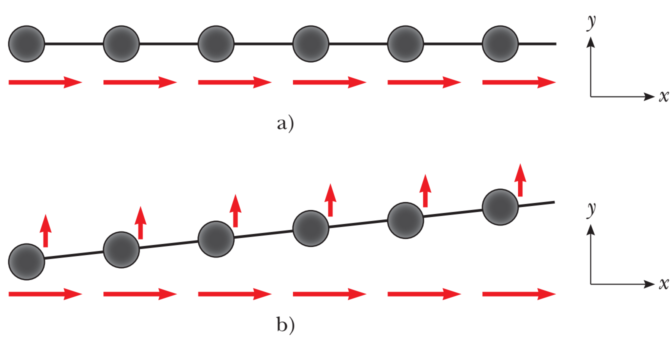


Figura 4.4 a) Un disco se mueve a través de una mesa de hockey de aire horizontal con velocidad constante en la dirección x. b) Después de aplicar al disco un soplido en la dirección y, el disco gana una componente y de velocidad, pero la componente x no es afectada por la fuerza en la dirección perpendicular. Observe que los vectores rojos horizontales, que representan la componente x de la velocidad, tienen la misma longitud en ambas partes de la figura, lo que demuestra que el movimiento en dos dimensiones se puede modelar como dos movimientos independientes en direcciones perpendiculares.

Puesto que la aceleración $\vec{\mathbf{a}}$ de la partícula se supone constante en esta discusión, sus componentes a_x y a_y también son constantes. Por lo tanto, se le puede representar como una partícula bajo aceleración constante independiente en cada una de las dos direcciones y aplicar las ecuaciones de cinemática por separado a las componentes x y y del vector velocidad. Al sustituir, de la ecuación 2.13, $v_{xf} = v_{xi} + a_x t$ y $v_{yf} = v_{yi} + a_y t$ en la ecuación 4.7 para determinar la velocidad final en cualquier tiempo t, se obtiene

$$\vec{\mathbf{v}}_f = (v_{xi} + a_x t)\hat{\mathbf{i}} + (v_{yi} + a_y t)\hat{\mathbf{j}} = (v_{xi}\hat{\mathbf{i}} + v_{yi}\hat{\mathbf{j}}) + (a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}})t$$

$$\vec{\mathbf{v}}_f = \vec{\mathbf{v}}_i + \vec{\mathbf{a}}t \qquad \textbf{(4.8)}$$

◀ Vector velocidad como función del tiempo

Este resultado establece que la velocidad de una partícula en algún tiempo t es igual a la suma vectorial de su velocidad inicial $\vec{\mathbf{v}}_i$ en el tiempo $t = 0$ y la velocidad adicional $\vec{\mathbf{a}}t$ adquirida en el tiempo t como resultado de aceleración constante. La ecuación 4.8 es la versión vectorial de la ecuación 2.13.

De igual modo, de la ecuación 2.16 se sabe que las coordenadas x y y de una partícula que se mueve con aceleración constante son

$$x_f = x_i + v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 \qquad y_f = y_i + v_{yi}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2$$

Al sustituir estas expresiones en la ecuación 4.6 (y etiquetar el vector de posición final $\vec{\mathbf{r}}_f$) se obtiene

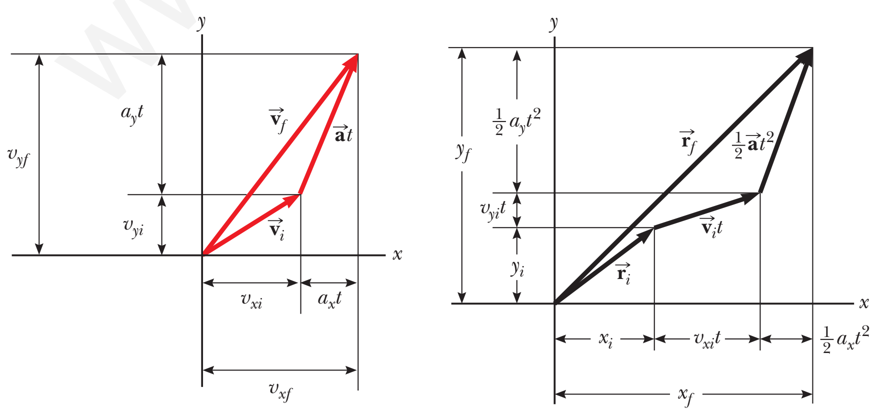
$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{r}}_f &= (x_i + v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2)\hat{\mathbf{i}} + (y_i + v_{yi}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2)\hat{\mathbf{j}} \\ &= (x_i\hat{\mathbf{i}} + y_i\hat{\mathbf{j}}) + (v_{xi}\hat{\mathbf{i}} + v_{yi}\hat{\mathbf{j}})t + \tfrac{1}{2}(a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}})t^2\end{aligned}$$

$$\vec{\mathbf{r}}_f = \vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{v}}_i t + \tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{a}}t^2 \qquad \textbf{(4.9)}$$

◀ Vector de posición como función del tiempo

que es la versión vectorial de la ecuación 2.16. La ecuación 4.9 dice que el vector de posición $\vec{\mathbf{r}}_f$ de una partícula es la suma vectorial de la posición original $\vec{\mathbf{r}}_i$, un desplazamiento $\vec{\mathbf{v}}_i t$ que surge de la velocidad inicial de la partícula y un desplazamiento $\tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{a}}t^2$ que resulta de la aceleración constante de la partícula.

En la figura 4.5 se muestran representaciones gráficas de las ecuaciones 4.8 y 4.9. Las componentes de los vectores de posición y velocidad también se ilustran en la figura. Note en la figura 4.5a que $\vec{\mathbf{v}}_f$ por lo general no está a lo largo de la dirección de $\vec{\mathbf{v}}_i$ o de $\vec{\mathbf{a}}$ porque la correspondencia entre dichas cantidades es una expresión vectorial. Por la misma justificación, de la figura 4.5b, se ve que $\vec{\mathbf{r}}_f$ por lo general no está a lo largo de la dirección de $\vec{\mathbf{v}}_i$ o de $\vec{\mathbf{a}}$. Por último, observe que $\vec{\mathbf{v}}_f$ y $\vec{\mathbf{r}}_f$ por lo común no están en la misma dirección.



a) b)

Figura 4.5 Representaciones y componentes vectoriales de a) la velocidad y b) la posición de una partícula que se mueve con una aceleración constante $\vec{\mathbf{a}}$.

EJEMPLO 4.1 Movimiento en un plano

Una partícula parte del origen en $t = 0$ con una velocidad inicial que tiene una componente x de 20 m/s y otra componente y de -15 m/s. La partícula se mueve en el plano xy sólo con una componente x de aceleración, dada por $a_x = 4.0\ \text{m/s}^2$.

A) Determine el vector velocidad total en cualquier tiempo.

SOLUCIÓN

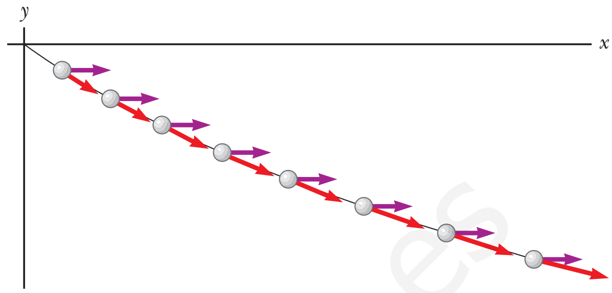


Figura 4.6 (Ejemplo 4.1) Diagrama de movimiento para la partícula.

Conceptualizar Las componentes de la velocidad inicial dicen que la partícula inicia su movimiento hacia la derecha y abajo. La componente x de velocidad comienza en 20 m/s y aumenta en 4.0 m/s cada segundo. La componente y de velocidad nunca cambia de su valor inicial de -15 m/s. En la figura 4.6 se bosqueja un diagrama de movimiento de la situación. Puesto que la partícula acelera en la dirección $+x$, su componente de velocidad en esta dirección aumenta y la trayectoria se curva como se muestra en el diagrama. Note que el espaciamiento entre imágenes sucesivas aumenta conforme pasa el tiempo, porque la rapidez aumenta. La colocación de los vectores aceleración y velocidad en la figura 4.6 ayuda a conceptualizar aún más la situación.

Categorizar Puesto que la velocidad inicial tiene componentes en las direcciones x y y, este problema se clasifica como uno que supone una partícula que se mueve en dos dimensiones. Dado que la partícula sólo tiene una componente x de aceleración, se representa como una partícula bajo aceleración constante en la dirección x y una partícula bajo velocidad constante en la dirección y.

Analizar Para comenzar el análisis matemático, se hace $v_{xi} = 20$ m/s, $v_{yi} = -15$ m/s, $a_x = 4.0\ \text{m/s}^2$ y $a_y = 0$.

Aplique la ecuación 4.8 para el vector velocidad:

$$\vec{\mathbf{v}}_f = \vec{\mathbf{v}}_i + \vec{\mathbf{a}}t = (v_{xi} + a_x t)\,\hat{\mathbf{i}} + (v_{yi} + a_y t)\,\hat{\mathbf{j}}$$

Sustituya valores numéricos:

$$\vec{\mathbf{v}}_f = [20\ \text{m/s} + (4.0\ \text{m/s}^2)t]\,\hat{\mathbf{i}} + [-15\ \text{m/s} + (0)t]\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$(1)\quad \vec{\mathbf{v}}_f = \boxed{[(20 + 4.0t)\,\hat{\mathbf{i}} - 15\hat{\mathbf{j}}]\ \text{m/s}}$$

Finalizar Note que la componente x de velocidad aumenta en el tiempo mientras la componente y permanece constante; este resultado es consistente con lo predicho.

B) Calcule la velocidad y la rapidez de la partícula en $t = 5.0$ s.

SOLUCIÓN

Analizar

Evalúe el resultado de la ecuación (1) en $t = 5.0$ s:

$$\vec{\mathbf{v}}_f = [(20 + 4.0(5.0))\,\hat{\mathbf{i}} - 15\hat{\mathbf{j}}]\ \text{m/s} = \boxed{(40\hat{\mathbf{i}} - 15\hat{\mathbf{j}})\ \text{m/s}}$$

Determine el ángulo θ que $\vec{\mathbf{v}}_f$ forma con el eje x en $t = 5.0$ s:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{yf}}{v_{xf}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-15\ \text{m/s}}{40\ \text{m/s}}\right) = \boxed{-21°}$$

Evalúe la rapidez de la partícula como la magnitud de $\vec{\mathbf{v}}_f$:

$$v_f = |\vec{\mathbf{v}}_f| = \sqrt{v_{xf}^2 + v_{yf}^2} = \sqrt{(40)^2 + (-15)^2}\ \text{m/s} = \boxed{43\ \text{m/s}}$$

Finalizar El signo negativo para el ángulo θ indica que el vector velocidad se dirige a un ángulo de 21° abajo del eje x positivo. Note que, si se calcula v_i a partir de las componentes x y y de $\vec{\mathbf{v}}_i$, se encuentra que $v_f > v_i$. ¿Esto es consistente con la predicción?

C) Determine las coordenadas x y y de la partícula en cualquier tiempo t y su vector de posición en este tiempo.

SOLUCIÓN

Analizar

Aplique las componentes de la ecuación 4.9 con $x_i = y_i = 0$ en $t = 0$:

$$x_f = v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 = \boxed{(20t + 2.0t^2)\ \text{m}}$$

$$y_f = v_{yi}t = \boxed{(-15t)\ \text{m}}$$

Exprese el vector de posición de la partícula en cualquier tiempo t: $\vec{\mathbf{r}}_f = x_f\hat{\mathbf{i}} + y_f\hat{\mathbf{j}} = \boxed{[(20t + 2.0t^2)\hat{\mathbf{i}} - 15t\hat{\mathbf{j}}]\text{ m}}$

Finalizar Considere ahora un caso límite para valores muy grandes de t.

¿Y si...? ¿Qué ocurriría si se espera un tiempo considerable y después se observa el movimiento de la partícula? ¿Cómo describiría el movimiento de la partícula para valores considerables de tiempo?

Respuesta Al observar la figura 4.6 es claro que la trayectoria de la partícula se curva hacia el eje x. No hay razón para suponer que esta tendencia cambiará, lo que sugiere que la trayectoria se volverá más y más paralela al eje x conforme crezca el tiempo. En términos matemáticos, la ecuación 1) muestra que la componente y de velocidad permanece constante mientras la componente x crece linealmente con t. Por lo tanto, cuando t es muy grande, la componente x de velocidad será mucho mayor que la componente y, lo que sugiere que el vector velocidad se volverá cada vez más paralelo al eje x. Tanto x_f como y_f continúa creciendo con el tiempo, aunque x_f crece mucho más rápido.

4.3 Movimiento de proyectil

Quien haya observado una pelota de beisbol en movimiento observó movimiento de proyectil. La bola se mueve en una trayectoria curva y regresa al suelo. El **movimiento de proyectil** de un objeto es simple de analizar a partir de dos suposiciones: 1) la aceleración de caída libre es constante en el intervalo de movimiento y se dirige hacia abajo[1] y 2) el efecto de la resistencia del aire es despreciable.[2] Con estas suposiciones, se encuentra que la *trayectoria* de un proyectil *siempre* es una parábola, como se muestra en la figura 4.7. **A lo largo de este capítulo se usan estas suposiciones.**

La expresión para el vector de posición del proyectil como función del tiempo se sigue directamente de la ecuación 4.9, con $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{g}}$:

$$\vec{\mathbf{r}}_f = \vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{v}}_i t + \tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{g}}t^2 \tag{4.10}$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 4.2

Aceleración en el punto más alto

Como se discutió en la prevención de riesgos ocultos 2.8, muchas personas afirman que la aceleración de un proyectil en el punto más alto de su trayectoria es cero. Este error surge de la confusión entre velocidad vertical cero y aceleración cero. Si el proyectil experimentara aceleración cero en el punto más alto, su velocidad en dicho punto no cambiaría; sucedería que, ¡desde ese momento el proyectil se movería horizontalmente con rapidez constante! Sin embargo, esto no ocurre, porque la aceleración *no* es cero en parte alguna de la trayectoria.

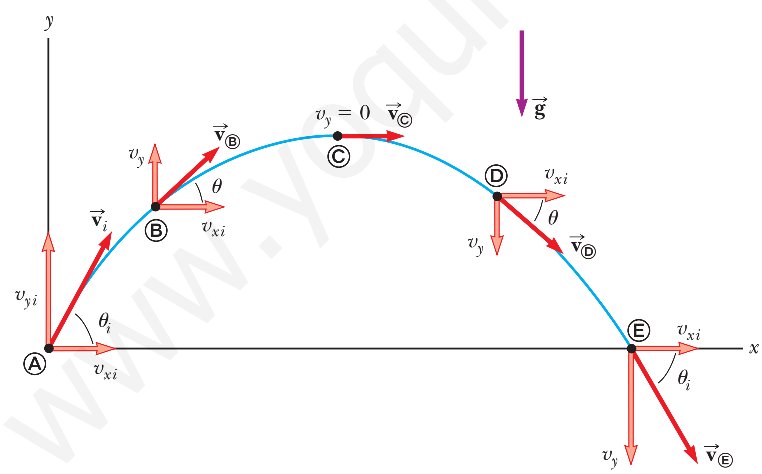


Figura 4.7 Trayectoria parabólica de un proyectil que sale del origen con velocidad $\vec{\mathbf{v}}_i$. El vector velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ cambia con el tiempo tanto en magnitud como en dirección. Este cambio es el resultado de la aceleración en la dirección y negativa. La componente x de velocidad permanece constante en el tiempo porque no hay aceleración a lo largo de la dirección horizontal. La componente y de velocidad es cero en el pico de la trayectoria.

[1] Esta suposición es razonable en tanto el alcance del movimiento sea pequeño en comparación con el radio de la Tierra (6.4×10^6 m). En efecto, esto equivale a suponer que la Tierra es plana en el intervalo considerado del movimiento.

[2] Dicha suposición, por lo general, *no* está justificada, en especial a velocidades altas. Además, cualquier giro impartido a un proyectil, como el que se aplica cuando un pitcher lanza una bola curva, origina algunos efectos muy interesantes asociados con fuerzas aerodinámicas, que se discutirán en el capítulo 14.

Un soldador perfora hoyos en una pesada viga de construcción con un soplete. Las chispas generadas en el proceso siguen trayectorias parabólicas.

donde las componentes x y y de la velocidad inicial del proyectil son:

$$v_{xi} = v_i \cos \theta_i \qquad v_{yi} = v_i \operatorname{sen} \theta_i \tag{4.11}$$

La expresión en la ecuación 4.10 se grafica en la figura 4.8, para un proyectil lanzado desde el origen, de modo que $\vec{\mathbf{r}}_i = 0$. La posición final de una partícula se considera como la superposición de su posición inicial $\vec{\mathbf{r}}_i$, el término $\vec{\mathbf{v}}_i t$, que es su desplazamiento si no hubiese aceleración presente; y el término $\frac{1}{2}\vec{\mathbf{g}}t^2$ que surge de su aceleración debida a la gravedad. En otras palabras, si no hubiera aceleración gravitacional, la partícula continuaría moviéndose a lo largo de una ruta recta en la dirección $\vec{\mathbf{v}}_i$. En consecuencia, la distancia vertical $\frac{1}{2}\vec{\mathbf{g}}t^2$ desde la que "cae" la partícula en línea recta, es la misma distancia desde la que caería un objeto que se deja caer desde el reposo durante el mismo intervalo de tiempo.

En la sección 4.2 se estableció que el movimiento en dos dimensiones con aceleración constante se puede analizar como una combinación de dos movimientos independientes en las direcciones x y y, con aceleraciones a_x y a_y. El movimiento de proyectiles también se maneja de esta forma, con aceleración cero en la dirección x y una aceleración constante en la dirección y, $a_y = -g$. Por lo tanto, **cuando se analice el movimiento de un proyectil, debe representarlo como la sobreposición de dos movimientos: 1) movimiento de una partícula bajo velocidad constante en la dirección horizontal y 2) movimiento de una partícula bajo aceleración constante (caída libre) en la dirección vertical.** Las componentes horizontal y vertical del movimiento de un proyectil son completamente independientes una de otra y se manejan por separado, con el tiempo t como la variable común para ambas componentes.

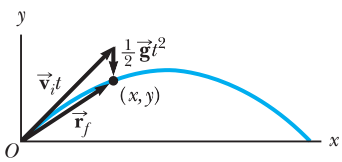


Figura 4.8 Vector de posición $\vec{\mathbf{r}}_f$ de un proyectil lanzado desde el origen, cuya velocidad inicial en el origen es $\vec{\mathbf{v}}_i$. El vector $\vec{\mathbf{v}}_i t$ sería el desplazamiento del proyectil si no hubiera gravedad, y el vector $\frac{1}{2}\vec{\mathbf{g}}t^2$ es su desplazamiento vertical de una trayectoria recta debido a su aceleración gravitacional descendente.

Pregunta rápida 4.2 **i)** A medida que un proyectil lanzado hacia arriba se mueve en su trayectoria parabólica (como en la figura 4.8), ¿en qué punto a lo largo de su trayectoria los vectores velocidad y aceleración del proyectil son mutuamente perpendiculares? a) en ninguna parte, b) en el punto más alto, c) en el punto de lanzamiento. **ii)** Con las mismas opciones, ¿en qué punto son paralelos los vectores velocidad y aceleración del proyectil?

Alcance horizontal y altura máxima de un proyectil

Considere que un proyectil es lanzado desde el origen en $t_i = 0$ con una componente v_{yi} positiva, como se muestra en la figura 4.9, y regresa al mismo nivel horizontal. Dos puntos son de especial interés para analizar: el punto máximo Ⓐ, que tiene coordenadas cartesianas $(R/2, h)$, y el punto Ⓑ, que tiene coordenadas $(R, 0)$. La distancia R se llama *alcance horizontal* del proyectil, y la distancia h es su *altura máxima*. Encuentre h y R matemáticamente a partir de v_i, θ_i y g.

Se puede determinar h al notar que, en el máximo, $v_{yⒶ} = 0$. Debido a esto, se puede usar la componente y de la ecuación 4.8 para determinar el tiempo $t_Ⓐ$ en que el proyectil alcanza el pico:

$$v_{yf} = v_{yi} + a_y t$$

$$0 = v_i \operatorname{sen} \theta_i - g t_Ⓐ$$

$$t_Ⓐ = \frac{v_i \operatorname{sen} \theta_i}{g}$$

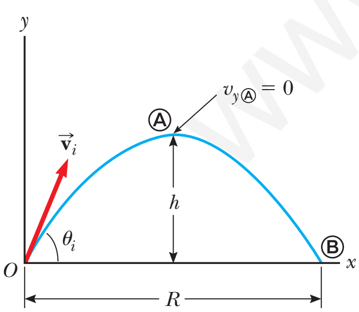


Figura 4.9 Proyectil lanzado sobre una superficie plana desde el origen en $t_i = 0$ con una velocidad inicial $\vec{\mathbf{v}}_i$. La altura máxima del proyectil es h y el alcance horizontal es R. En Ⓐ, el máximo de la trayectoria, la partícula tiene coordenadas $(R/2, h)$.

Al sustituir esta expresión para $t_Ⓐ$ en la componente y de la ecuación 4.9 y sustituir $y = y_Ⓐ$ con h, se obtiene una expresión para h en términos de la magnitud y dirección del vector velocidad inicial:

$$h = (v_i \operatorname{sen} \theta_i)\frac{v_i \operatorname{sen} \theta_i}{g} - \frac{1}{2} g\left(\frac{v_i \operatorname{sen} \theta_i}{g}\right)^2$$

$$h = \frac{v_i^2 \operatorname{sen}^2 \theta_i}{2g} \tag{4.12}$$

El alcance R es la posición horizontal del proyectil en el tiempo que es el doble del tiempo en el que alcanza su máximo, esto es, un tiempo $t_Ⓑ = 2t_Ⓐ$. Al usar la componente x

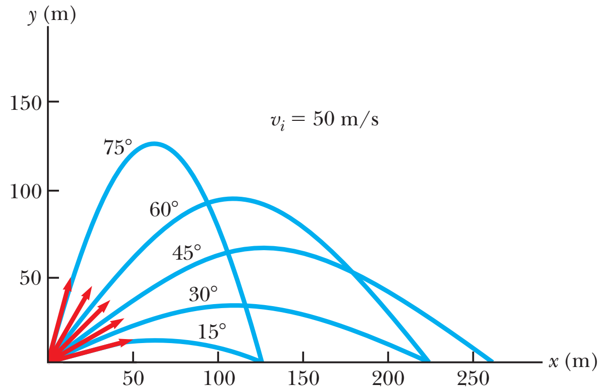


Figura 4.10 Un proyectil lanzado sobre una superficie plana desde el origen con una rapidez inicial de 50 m/s en varios ángulos de proyección. Note que valores complementarios de θ_i resultan en el mismo valor de R (alcance del proyectil).

de la ecuación 4.9, note que $v_{xi} = v_{x\text{Ⓑ}} = v_i \cos \theta_i$ y establezca $x_{\text{Ⓑ}} = R$ en $t = 2t_{\text{Ⓐ}}$, se encuentra que

$$R = v_{xi}t_{\text{Ⓑ}} = (v_i \cos \theta_i)2t_{\text{Ⓐ}}$$

$$= (v_i \cos \theta_i)\frac{2v_i \operatorname{sen} \theta_i}{g} = \frac{2v_i^2 \operatorname{sen} \theta_i \cos \theta_i}{g}$$

Al aplicar la identidad sen $2\theta = 2$ sen $\theta \cos \theta$ (véase el apéndice B.4) se puede escribir R en la forma más compacta

$$R = \frac{v_i^2 \operatorname{sen} 2\theta_i}{g} \qquad \textbf{(4.13)}$$

El valor máximo de R a partir de la ecuación 4.13 es $R_{\text{máx}} = v_i^2/g$. Este resultado tiene sentido porque el valor máximo de sen $2\theta_i$ es 1, lo que ocurre cuando $2\theta_i = 90°$. Debido a esto, R es un máximo cuando $\theta_i = 45°$.

La figura 4.10 ilustra varias trayectorias para un proyectil que tiene una rapidez inicial dada, pero se lanza a diferentes ángulos. Como puede ver, el alcance es máximo para $\theta_i = 45°$. Además, para cualquier θ_i distinto de 45°, se alcanza un punto con coordenadas cartesianas $(R, 0)$ al usar cualesquier valores complementarios de θ_i, como 75° y 15°. Desde luego, la altura máxima y el tiempo de vuelo para uno de estos valores de θ_i son diferentes a causa de la altura máxima y el tiempo de vuelo para el valor complementario.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 4.3
Las ecuaciones de altura y alcance

La ecuación 4.13 es útil para calcular R sólo para una trayectoria simétrica, como se muestra en la figura 4.10. Si la trayectoria no es simétrica, *no aplique esta ecuación*. Las expresiones generales conocidas por las ecuaciones 4.8 y 4.9 son los resultados *más importantes* porque proporcionan las componentes de posición y velocidad de *cualquier* partícula que se mueve en dos dimensiones en *cualquier* tiempo t.

Pregunta rápida 4.3 Ordene los ángulos de lanzamiento para las cinco trayectorias de la figura 4.10 respecto al tiempo de vuelo, desde el tiempo de vuelo más corto al más largo.

ESTRATEGIA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS **Movimiento de proyectil**

Cuando resuelva problemas de movimiento de proyectil, se sugiere el siguiente planteamiento:

1. *Conceptualizar.* Piense en lo que ocurre físicamente en el problema. Establezca la representación mental al imaginar el movimiento del proyectil a lo largo de su trayectoria.
2. *Categorizar.* Confirme que el problema supone una partícula en caída libre y que la resistencia del aire es despreciable. Seleccione un sistema coordenado con x en la dirección horizontal y y en la dirección vertical.
3. *Analizar.* Si se conoce el vector velocidad inicial, descompóngalo en componentes x y y. Trate el movimiento horizontal y movimiento vertical de manera independiente.

Analice el movimiento horizontal del proyectil como una partícula bajo velocidad constante. Examine el movimiento vertical del proyectil como una partícula bajo aceleración constante.

4. *Finalizar.* Una vez que determine su resultado, compruebe para ver si sus respuestas son consistentes con las representaciones mentales y gráficas y que sus resultados son realistas.

EJEMPLO 4.2 Salto de longitud

Un atleta que participa en salto de longitud (figura 4.11) deja el suelo a un ángulo de 20.0° sobre la horizontal y con una rapidez de 11.0 m/s.

Mike Powell/Allsport/Getty Images

Figura 4.11 (Ejemplo 4.2) Mike Powell, actual poseedor del récord mundial de salto de longitud de 8.95 m.

A) ¿Qué distancia salta en la dirección horizontal?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Los brazos y piernas de un atleta de salto de longitud se mueven en una forma compleja, pero este movimiento se ignorará. El movimiento del atleta se conceptualiza como equivalente al de un proyectil simple.

Categorizar Este ejemplo se clasifica como un problema de movimiento de proyectil. Puesto que se conocen la rapidez inicial y el ángulo de lanzamiento, y ya que la altura final es la misma que la altura inicial, se confirma que el problema satisface las condiciones para aplicar las ecuaciones 4.12 y 4.13. Este planteamiento es la forma más directa de analizar este problema, aunque los métodos generales descritos siempre darán la respuesta correcta.

Analizar

Aplique la ecuación 4.13 para encontrar el alcance del saltador:

$$R = \frac{v_i^2 \text{ sen } 2\theta_i}{g} = \frac{(11.0 \text{ m/s})^2 \text{ sen } 2(20.0°)}{9.80 \text{ m/s}^2} = \boxed{7.94 \text{ m}}$$

B) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?

SOLUCIÓN

Analizar

Encuentre la altura máxima alcanzada mediante la ecuación 4.12:

$$h = \frac{v_i^2 \text{ sen}^2\, \theta_i}{2g} = \frac{(11.0 \text{ m/s})^2(\text{sen } 20.0°)^2}{2(9.80 \text{ m/s}^2)} = \boxed{0.722 \text{ m}}$$

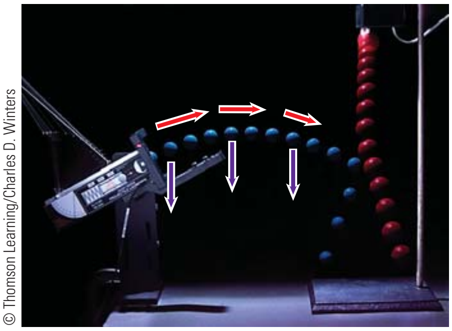
Finalizar Encuentre las respuestas a los incisos A) y B) con el uso del método general. Los resultados deben concordar. Tratar al atleta como partícula es una simplificación. No obstante, los valores obtenidos son consistentes con la experiencia en los deportes. Un sistema complicado, como el del atleta en salto de longitud, se puede representar como una partícula y aun así obtener resultados razonables.

EJEMPLO 4.3 Tiro que da en el objetivo en cada ocasión

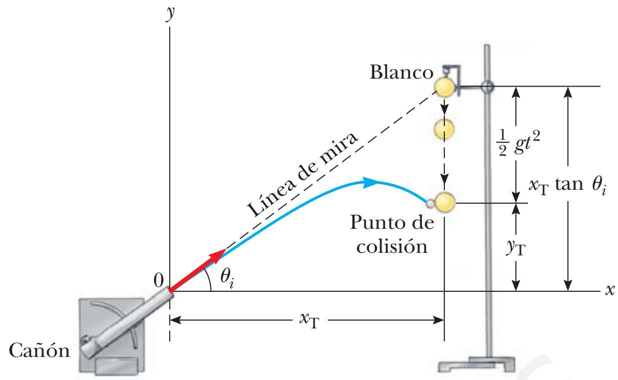
En una popular demostración, se dispara un proyectil a un objetivo en tal forma que el proyectil sale del cañón al mismo tiempo que el objetivo se suelta del reposo. Demuestre que, si el cañón se apunta inicialmente al objetivo fijo, el proyectil golpea al objetivo que cae como se muestra en la figura 4.12a.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Se forman conceptos del problema al estudiar la figura 4.12a. Note que el problema no pide valores numéricos. El resultado esperado debe involucrar un argumento algebraico.



a)



b)

Figura 4.12 (Ejemplo 4.3) a) Fotografía estroboscópica de la demostración proyectil–objetivo. Si el cañón se apunta directamente al objetivo y se dispara en el mismo instante cuando el objetivo comienza a caer, el proyectil golpeará el objetivo. Advierta que la velocidad del proyectil (flechas rojas) cambia en dirección y magnitud, mientras su aceleración descendente (flechas violetas) permanece constante. b) Diagrama esquemático de la demostración proyectil–objetivo.

Categorizar Porque ambos objetos sólo están subordinados a la gravedad, este problema se clasifica como uno que supone dos objetos en caída libre, el blanco en movimiento en una dimensión y el proyectil que se mueve en dos.

Analizar El objetivo T se representa como una partícula bajo aceleración constante en una dimensión. La figura 4.12b muestra que la coordenada y inicial y_{iT} del objetivo es $x_T \tan \theta_i$ y su velocidad inicial es cero. Cae con aceleración $a_y = -g$. El proyectil P se representa como una partícula bajo aceleración constante en la dirección y y una partícula bajo velocidad constante en la dirección x.

Escriba una expresión para la coordenada y del objetivo en cualquier momento después de liberarse y observe que su velocidad inicial es cero:

$$1)\quad y_T = y_{iT} + (0)t - \tfrac{1}{2}gt^2 = x_T \tan \theta_i - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Escriba una expresión para la coordenada y del proyectil en cualquier momento:

$$2)\quad y_P = y_{iP} + v_{yiP}t - \tfrac{1}{2}gt^2 = 0 + (v_{iP} \operatorname{sen} \theta_i)t - \tfrac{1}{2}gt^2 = (v_{iP} \operatorname{sen} \theta_i)t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Escriba una expresión para la coordenada x del proyectil en cualquier momento:

$$x_P = x_{iP} + v_{xiP}t = 0 + (v_{iP} \cos \theta_i)t = (v_{iP} \cos \theta_i)t$$

Resuelva esta expresión para el tiempo como función de la posición horizontal del proyectil:

$$t = \frac{x_P}{v_{iP} \cos \theta_i}$$

Sustituya esta expresión en la ecuación 2):

$$3)\quad y_P = (v_{iP} \operatorname{sen} \theta_i)\left(\frac{x_P}{v_{iP} \cos \theta_i}\right) - \tfrac{1}{2}gt^2 = x_P \tan \theta_i - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Compare las ecuaciones 1) y 3). Se ve que, cuando las coordenadas x del proyectil y el objetivo son las mismas (esto es, cuando $x_T = x_P$), sus coordenadas y conocidas por las ecuaciones 1) y 3) son las mismas y resulta una colisión.

Finalizar Note que una colisión sólo resulta cuando $v_{iP} \operatorname{sen} \theta_i \geq \sqrt{gd/2}$, donde d es la elevación inicial del objetivo arriba del suelo. Si $v_{iP} \operatorname{sen} \theta_i$ es menor que este valor, el proyectil golpea el suelo antes de alcanzar el objetivo.

EJEMPLO 4.4 ¡Vaya brazo!

Una piedra es lanzada hacia arriba desde lo alto de un edificio, a un ángulo de 30.0° con la horizontal, y con una rapidez inicial de 20.0 m/s, como se muestra en la figura 4.13. La altura del edificio es de 45.0 m.

A) ¿Cuánto tarda la piedra en llegar al suelo?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Estudie la figura 4.13, en la que se indican la trayectoria y varios parámetros del movimiento de la piedra.

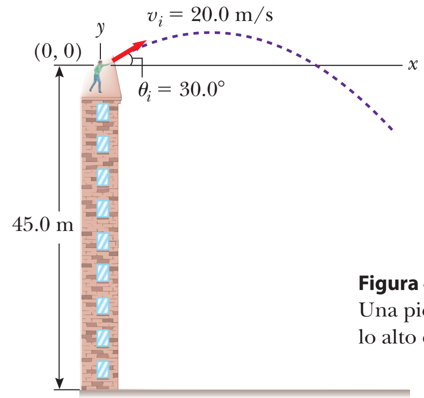


Figura 4.13 (Ejemplo 4.4) Una piedra es lanzada desde lo alto de un edificio.

Categorizar Este problema se clasifica como un problema de movimiento de proyectil. La piedra se modela como una partícula bajo aceleración constante en la dirección y y una partícula bajo velocidad constante en la dirección x.

Analizar Se tiene la información $x_i = y_i = 0$, $y_f = -45.0$ m, $a_y = -g$ y $v_i = 20.0$ m/s (el valor numérico de y_f es negativo porque se eligió lo alto del edificio como el origen).

Encuentre las componentes x y y iniciales de velocidad de la piedra:

$$v_{xi} = v_i \cos\theta_i = (20.0 \text{ m/s})\cos 30.0° = 17.3 \text{ m/s}$$

$$v_{yi} = v_i \operatorname{sen}\theta_i = (20.0 \text{ m/s})\operatorname{sen} 30.0° = 10.0 \text{ m/s}$$

Exprese la posición vertical de la piedra a partir de la componente vertical de la ecuación 4.9:

$$y_f = y_i + v_{yi}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2$$

Sustituya valores numéricos:

$$-45.0 \text{ m} = 0 + (10.0 \text{ m/s})t + \tfrac{1}{2}(-9.80 \text{ m/s}^2)t^2$$

Resuelva la ecuación cuadrática para t:

$$t = \boxed{4.22 \text{ s}}$$

B) ¿Cuál es la rapidez de la piedra justo antes de golpear el suelo?

SOLUCIÓN

Use la componente y de la ecuación 4.8 con $t = 4.22$ s para obtener la componente y de la velocidad de la piedra justo antes de golpear el suelo:

$$v_{yf} = v_{yi} + a_y t$$

Sustituya valores numéricos:

$$v_{yf} = 10.0 \text{ m/s} + (-9.80 \text{ m/s}^2)(4.22 \text{ s}) = -31.3 \text{ m/s}$$

Use esta componente con la componente horizontal $v_{xf} = v_{xi} = 17.3$ m/s para encontrar la rapidez de la piedra en $t = 4.22$ s:

$$v_f = \sqrt{v_{xf}^2 + v_{yf}^2} = \sqrt{(17.3 \text{ m/s})^2 + (-31.3 \text{ m/s})^2} = \boxed{35.8 \text{ m/s}}$$

Finalizar ¿Es razonable que la componente y de la velocidad final sea negativa? ¿Es razonable que la rapidez final sea mayor que la rapidez inicial de 20.0 m/s?

¿Y si...? ¿Qué sucedería si un viento horizontal sopla en la misma dirección en la que se lanza la piedra y hace que ésta tenga una componente de aceleración horizontal $a_x = 0.500$ m/s^2? ¿Cuál inciso de este ejemplo, A) o B), tendrá una respuesta diferente?

Respuesta Recuerde que los movimientos en las direcciones x y y son independientes. Por lo tanto, el viento horizontal no puede afectar el movimiento vertical. El movimiento vertical determina el tiempo del proyectil en el aire, así que la respuesta al inciso A) no cambia. El viento hace que la componente de velocidad horizontal aumente con el tiempo, de modo que la rapidez final será mayor en el inciso B). Al tomar $a_x = 0.500$ m/s^2, se encuentra $v_{xf} = 19.4$ m/s y $v_f = 36.9$ m/s.

EJEMPLO 4.5 El final del salto con esquíes

Una esquiadora deja la rampa y se desliza en la dirección horizontal con una rapidez de 25.0 m/s, como se muestra en la figura 4.14. El plano de aterrizaje bajo ella cae con una pendiente de 35.0°. ¿Dónde aterrizará en el plano?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Este problema permite formar ideas a partir de los recuerdos de las competencias de esquí en los juegos olímpicos de invierno. Se estima que la esquiadora está en el aire durante alrededor de 4 s y recorre una distancia horizontal de casi 100 m. Se espera que el valor de d, la distancia recorrida a lo largo del plano, sea del mismo orden de magnitud.

Categorizar El problema se clasifica como el de una partícula en movimiento de proyectil.

Analizar Es conveniente seleccionar el comienzo del salto como el origen. Las componentes de velocidad inicial son $v_{xi} = 25.0$ m/s y $v_{yi} = 0$. Del triángulo rectángulo de la figura 4.14, se ve que las coordenadas x y y de la esquiadora en el punto de aterrizaje se conocen mediante $x_f = d \cos 35.0°$ y $y_f = -d \operatorname{sen} 35.0°$.

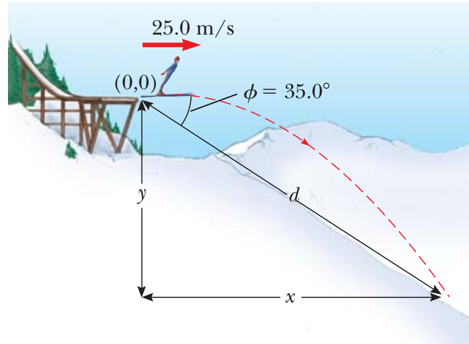


Figura 4.14 (Ejemplo 4.5) Una saltadora deja la rampa con movimiento en dirección horizontal.

Exprese las coordenadas de la saltadora como función del tiempo:

1) $x_f = v_{xi}t = (25.0 \text{ m/s})t$

2) $y_f = v_{yi}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = -\frac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)t^2$

Sustituya los valores x_f y y_f en el punto de aterrizaje:

3) $d \cos 35.0° = (25.0 \text{ m/s})t$

4) $-d \operatorname{sen} 35.0° = -\frac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)t^2$

Resuelva la ecuación 3) para t y sustituya el resultado en la ecuación 4):

$$-d \operatorname{sen} 35.0° = -\frac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)\left(\frac{d \cos 35.0°}{25.0 \text{ m/s}}\right)^2$$

Resuelva para d:

$$d = 109 \text{ m}$$

Evalúe las coordenadas x y y del punto en el que aterriza la esquiadora:

$$x_f = d \cos 35.0° = (109 \text{ m})\cos 35.0° = \boxed{89.3 \text{ m}}$$

$$y_f = -d \operatorname{sen} 35.0° = -(109 \text{ m})\operatorname{sen} 35.0° = \boxed{-62.5 \text{ m}}$$

Finalizar Compare estos resultados con las expectativas. Se esperaba que la distancia horizontal estuviera en el orden de 100 m, y el resultado de 89.3 m de hecho está en este orden de magnitud. Puede ser útil calcular el intervalo de tiempo que la esquiadora está en el aire y compararlo con la estimación de aproximadamente 4 s.

¿Y si...? Suponga que todo en este ejemplo es igual, excepto que la rampa se curva de modo que la esquiadora se proyecta hacia arriba en un ángulo desde el extremo de la pista. ¿Este diseño es mejor en términos de maximizar la longitud del salto?

Respuesta Si la velocidad inicial tiene una componente hacia arriba, la esquiadora estará en el aire más tiempo y, debido a esto, deberá viajar más. Sin embargo, inclinar el vector velocidad inicial hacia arriba reducirá la componente horizontal de la velocidad inicial. En consecuencia, angular hacia arriba el extremo de la pista a un ángulo *más prolongado* en realidad puede *reducir* la distancia. Considere el caso extremo: ¡la esquiadora se proyecta a 90° con la horizontal y simplemente va arriba y abajo en el extremo de la pista! Este argumento sugiere que debe haber un ángulo óptimo entre 0° y 90° que represente un equilibrio entre hacer el tiempo de vuelo más largo y la componente de velocidad horizontal más pequeña.

Encuentre matemáticamente este ángulo óptimo. Las ecuaciones de la 1) a la 4) se modifican de la forma siguiente, si supone que la esquiadora se proyecta a un ángulo θ respecto a la horizontal sobre un plano de aterrizaje con pendiente con un ángulo arbitrario ϕ:

1) y 3) $\rightarrow$ $x_f = (v_i \cos \theta)t = d \cos \phi$

2) y 4) $\rightarrow$ $y_f = (v_i \operatorname{sen} \theta)t - \frac{1}{2}gt^2 = -d \operatorname{sen} \phi$

Al eliminar el tiempo t entre estas ecuaciones y aplicando derivación para maximizar d en términos de θ, se llega (después de varias etapas; véase el problema 62) a la siguiente ecuación para el ángulo θ que da el valor máximo de d:

$$\theta = 45° - \frac{\phi}{2}$$

Para el ángulo de pendiente en la figura 4.14, $\phi = 35.0°$; esta ecuación resulta en un ángulo de lanzamiento óptimo de $\phi = 27.5°$. Para un ángulo de pendiente de $\phi = 0°$, que representa un plano horizontal, esta ecuación da un ángulo de lanzamiento óptimo de $\theta = 45°$, como se esperaría (véase la figura 4.10).

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 4.4

Aceleración de una partícula en movimiento circular uniforme

Recuerde que en física la aceleración se define como un cambio en la *velocidad*, no un cambio en la *rapidez* (contrario a la interpretación cotidiana). En el movimiento circular, el vector velocidad cambia en dirección, de modo que de hecho hay una aceleración.

4.4 Partícula en movimiento circular uniforme

La figura 4.15a muestra un automóvil que se mueve en una trayectoria circular con *rapidez constante v*. Tal movimiento, llamado **movimiento circular uniforme**, ocurre en muchas situaciones. Puesto que ocurre con tanta frecuencia, este tipo de movimiento se reconoce como un modelo de análisis llamado **partícula en movimiento circular uniforme**. En esta sección se analiza dicho modelo.

Con frecuencia sorprende a los estudiantes encontrar que **aun cuando un objeto se mueva con rapidez constante en una trayectoria circular, todavía tiene una aceleración**. Para ver por qué, considere la ecuación que define la aceleración, $\vec{\mathbf{a}} = d\vec{\mathbf{v}}/dt$ (ecuación 4.5). Note que la aceleración depende del cambio en la *velocidad*. Puesto que la velocidad es una cantidad vectorial, una aceleración puede ocurrir en dos formas, como se mencionó en la sección 4.1: por un cambio en la *magnitud* de la velocidad y por un cambio en la *dirección* de la velocidad. La última situación ocurre para un objeto que se mueve con rapidez constante en una trayectoria circular. El vector velocidad siempre es tangente a la trayectoria del objeto y perpendicular al radio de la trayectoria circular.

Ahora se muestra que el vector aceleración en movimiento circular uniforme siempre es perpendicular a la trayectoria y siempre apunta hacia el centro del círculo. Si eso no fuera cierto, habría una componente de la aceleración paralela a la trayectoria y, debido a eso, paralela al vector velocidad. Tal componente de aceleración conduciría a un cambio en la rapidez de la partícula a lo largo de la trayectoria. Sin embargo, esta situación es inconsistente con la configuración de la situación: la partícula se mueve con rapidez constante a lo largo de la trayectoria. En consecuencia, para movimiento circular *uniforme*, el vector aceleración sólo puede tener una componente perpendicular a la trayectoria, que es hacia el centro del círculo.

Ahora encuentre la magnitud de la aceleración de la partícula. Considere el diagrama de los vectores de posición y velocidad de la figura 4.15b. La figura también muestra el vector que representa el cambio en posición $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ para un intervalo de tiempo arbitrario. La partícula sigue una trayectoria circular de radio r, de la que se muestra una parte mediante la curva discontinua. La partícula está en Ⓐ en el tiempo t_i y su velocidad en dicho tiempo es $\vec{\mathbf{v}}_i$; está en Ⓑ a algún tiempo ulterior t_f y su velocidad en dicho tiempo es $\vec{\mathbf{v}}_f$. Suponga también que $\vec{\mathbf{v}}_i$ y $\vec{\mathbf{v}}_f$ difieren sólo en dirección; sus magnitudes son las mismas (esto es, $v_i = v_f = v$ porque es movimiento circular *uniforme*).

En la figura 4.15c, los vectores velocidad de la figura 4.15b se volvieron a dibujar en un solo origen. El vector $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ conecta las puntas de los vectores, que representa la suma vectorial $\vec{\mathbf{v}}_f = \vec{\mathbf{v}}_i + \Delta\vec{\mathbf{v}}$. En las figuras 4.15b y 4.15c se identifican los triángulos que ayudan a analizar el movimiento. El ángulo $\Delta\theta$ entre los dos vectores de posición de la figura 4.15b es el mismo que el ángulo entre los vectores velocidad en la figura 4.15c, porque el vector velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ siempre es perpendicular al vector de posición $\vec{\mathbf{r}}$. Por lo tanto, los dos triángulos son *similares*. (Dos triángulos son similares si el ángulo entre cualquiera de los dos lados es el mismo para ambos triángulos y si la relación de las longitudes de dichos lados es la misma.) Ahora se puede escribir una correspondencia entre las longitudes de los lados para los dos triángulos de las figuras 4.15b y 4.15c:

$$\frac{|\Delta\vec{\mathbf{v}}|}{v} = \frac{|\Delta\vec{\mathbf{r}}|}{r}$$

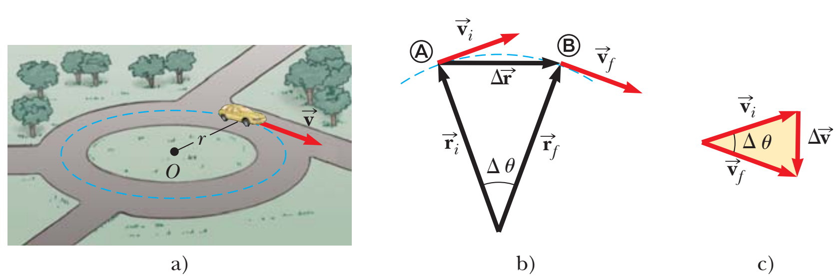


Figura 4.15 a) Un automóvil que se mueve en una trayectoria circular con rapidez constante experimenta movimiento circular uniforme. b) Conforme una partícula se mueve de Ⓐ a Ⓑ, su vector velocidad cambia de $\vec{\mathbf{v}}_i$ a $\vec{\mathbf{v}}_f$. c) Construcción para determinar la dirección del cambio en velocidad $\Delta\vec{\mathbf{v}}$, que es hacia el centro del círculo para $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ pequeños.

donde $v = v_i = v_f$ y $r = r_i = r_f$. Esta ecuación se resuelve para $|\Delta\vec{\mathbf{v}}|$ y la expresión obtenida se sustituye en la ecuación 4.4, $\vec{\mathbf{a}}_{\text{prom}} = \Delta\vec{\mathbf{v}}/\Delta t$, para dar la magnitud de la aceleración promedio sobre el intervalo de tiempo para que la partícula se mueva de Ⓐ a Ⓑ:

$$|\vec{\mathbf{a}}_{\text{prom}}| = \frac{|\Delta\vec{\mathbf{v}}|}{|\Delta t|} = \frac{v}{r}\frac{|\Delta\vec{\mathbf{r}}|}{\Delta t}$$

Ahora considere que los puntos Ⓐ y Ⓑ en la figura 4.15b se hacen extremadamente cercanos entre sí. Conforme Ⓐ y Ⓑ se aproximan uno a otro, Δt tiende a cero, $|\Delta\vec{\mathbf{r}}|$ se aproxima a la distancia recorrida por la partícula a lo largo de la trayectoria circular y la relación $|\Delta\vec{\mathbf{r}}|/\Delta t$ se aproxima a la rapidez v. Además, la aceleración promedio se convierte en la aceleración instantánea en el punto Ⓐ. Por tanto, en el límite $\Delta t \to 0$, la magnitud de la aceleración es

$$a_c = \frac{v^2}{r} \tag{4.14}$$

◀ Aceleración centrípeta

Una aceleración de esta naturaleza se llama **aceleración centrípeta** (*centrípeta* significa *hacia el centro*). El subíndice en el símbolo de aceleración recuerda que la aceleración es centrípeta.

En muchas situaciones es conveniente describir el movimiento de una partícula que se mueve con rapidez constante en un círculo de radio r en términos del **periodo** T, que se define como el intervalo de tiempo requerido para una revolución completa de la partícula. En el intervalo de tiempo T, la partícula se mueve una distancia de $2\pi r$, que es igual a la circunferencia de la trayectoria circular de la partícula. En consecuencia, puesto que su rapidez es igual a la circunferencia de la trayectoria circular dividida entre el periodo, o $v = 2\pi r/T$, se sigue que

$$T = \frac{2\pi r}{v} \tag{4.15}$$

◀ Periodo de movimiento circular

Pregunta rápida 4.4 Una partícula se mueve en una trayectoria circular de radio r con rapidez v. Luego aumenta su rapidez a $2v$ mientras viaja a lo largo de la misma trayectoria circular. **i)** ¿En qué factor cambió la aceleración centrípeta de la partícula (elija una)? a) 0.25, b) 0.5, c) 2, d) 4, e) imposible de determinar. **ii)** De las mismas opciones, ¿en qué factor cambió el periodo de la partícula?

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 4.5

La aceleración centrípeta no es constante

Al deducir la magnitud del vector aceleración centrípeta se encontró que es constante para el movimiento circular uniforme, pero *el vector aceleración centrípeta no es constante.* Siempre apunta hacia el centro del círculo, pero continuamente cambia de dirección conforme el objeto se mueve alrededor de la trayectoria circular.

EJEMPLO 4.6 Aceleración centrípeta de la Tierra

¿Cuál es la aceleración centrípeta de la Tierra a medida que se mueve en su órbita alrededor del Sol?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en una imagen mental de la Tierra en una órbita circular alrededor del Sol. La Tierra se representará como una partícula y su órbita se aproximará como circular (en realidad es ligeramente elíptica, como se explicará en el capítulo 13).

Categorizar El paso de formar ideas permite clasificar este problema como el de una partícula en movimiento circular uniforme.

Analizar No se conoce la rapidez orbital de la Tierra para sustituirla en la ecuación 4.14. Sin embargo, con ayuda de la ecuación 4.15, se da nueva forma a la ecuación 4.14 en términos del periodo de la órbita de la Tierra, que se sabe es un año, y el radio de la órbita de la Tierra alrededor del Sol, que es 1.496×10^{11} m.

Combine las ecuaciones 4.14 y 4.15:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\dfrac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

Sustituya valores numéricos:

$$a_c = \frac{4\pi^2(1.496 \times 10^{11}\text{ m})}{(1\text{ año})^2}\left(\frac{1\text{ año}}{3.156 \times 10^7\text{ s}}\right)^2 = \boxed{5.93 \times 10^{-3}\text{ m/s}^2}$$

Finalizar Esta aceleración es mucho más pequeña que la aceleración en caída libre sobre la superficie de la Tierra. Una cosa importante aprendida aquí es la técnica para sustituir la rapidez v en la ecuación 4.14 en términos del periodo T del movimiento.

4.5 Aceleraciones tangencial y radial

Considere el movimiento de una partícula a lo largo de una trayectoria curva uniforme, donde la velocidad cambia tanto en dirección como en magnitud, como se describe en la figura 4.16. En esta situación, el vector velocidad siempre es tangente a la trayectoria; sin embargo, el vector aceleración $\vec{\mathbf{a}}$ está a cierto ángulo con la trayectoria. En cada uno de los tres puntos Ⓐ, Ⓑ y Ⓒ en la figura 4.16, se dibujaron círculos discontinuos que representan la curvatura de la trayectoria real en cada punto. El radio de los círculos es igual al radio de curvatura de la trayectoria en cada punto.

Conforme la partícula se mueve a lo largo de la trayectoria curva en la figura 4.16, la dirección del vector aceleración total $\vec{\mathbf{a}}$ cambia de punto a punto. En cualquier instante, este vector se puede descomponer en dos componentes respecto a un origen en el centro del círculo discontinuo correspondiente a dicho instante: una componente radial a_r a lo largo del radio del círculo y una componente tangencial a_t perpendicular a este radio. El vector aceleración *total* $\vec{\mathbf{a}}$ se puede escribir como la suma vectorial de las componentes de los vectores:

Aceleración total ▶

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_r + \vec{\mathbf{a}}_t \qquad \textbf{(4.16)}$$

La componente de aceleración tangencial causa un cambio en la rapidez v de la partícula. Esta componente es paralela a la velocidad instantánea y su magnitud se conoce por

Aceleración tangencial ▶

$$a_t = \left|\frac{dv}{dt}\right| \qquad \textbf{(4.17)}$$

La componente de aceleración radial surge de un cambio en dirección del vector velocidad y se proporciona por

Aceleración radial ▶

$$a_r = -a_c = -\frac{v^2}{r} \qquad \textbf{(4.18)}$$

donde r es el radio de curvatura de la trayectoria en el punto en cuestión. La componente radial de la aceleración se reconoce como la aceleración centrípeta discutida en la sección 4.4. El signo negativo en la ecuación 4.18 indica que la dirección de la aceleración centrípeta es hacia el centro del círculo que representa el radio de curvatura. La dirección es opuesta a la del vector unitario radial $\hat{\mathbf{r}}$, que siempre apunta alejándose del origen en el centro del círculo.

Puesto que $\vec{\mathbf{a}}_r$ y $\vec{\mathbf{a}}_t$ son vectores componentes perpendiculares de $\vec{\mathbf{a}}$, se sigue que la magnitud de $\vec{\mathbf{a}}$ es $a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2}$. En una rapidez conocida, a_r es grande cuando el radio de curvatura es pequeño (como en los puntos Ⓐ y Ⓑ de la figura 4.16) y pequeña cuando r es grande (en el punto Ⓒ). La dirección de $\vec{\mathbf{a}}$ es en la misma dirección que $\vec{\mathbf{v}}$ (si v aumenta) u opuesta a $\vec{\mathbf{v}}$ (si v disminuye).

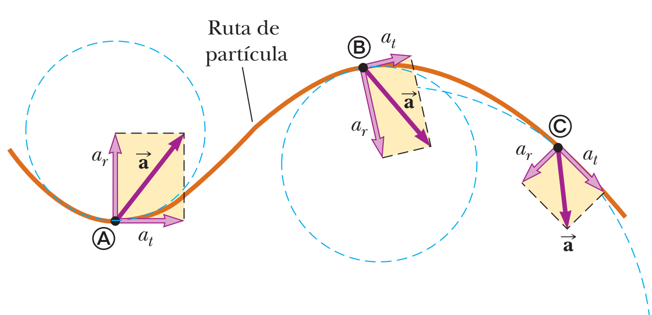


Figura 4.16 El movimiento de una partícula a lo largo de una trayectoria curva arbitraria que se encuentra en el plano xy. Si el vector velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ (siempre tangente a la trayectoria) cambia en dirección y magnitud, las componentes de la aceleración $\vec{\mathbf{a}}$ son una componente tangencial a_t y otra componente radial a_r.

En el movimiento circular uniforme, v es constante, $a_t = 0$ y la aceleración siempre es completamente radial, como se describe en la sección 4.4. En otras palabras, el movimiento circular uniforme es un caso especial de movimiento a lo largo de una trayectoria curva general. Además, si la dirección de $\vec{\mathbf{v}}$ no cambia, no existe aceleración radial y el movimiento es en una dimensión (en este caso, $a_r = 0$, pero a_t puede no ser cero.)

Pregunta rápida 4.5 Una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria y su rapidez aumenta con el tiempo. **i)** ¿En cuál de los siguientes casos sus vectores aceleración y velocidad son paralelos? a) cuando la trayectoria es circular, b) cuando la trayectoria es recta, c) cuando la trayectoria es una parábola, d) nunca. **ii)** De las mismas opciones, ¿en cuál caso sus vectores aceleración y velocidad son perpendiculares en cualquier parte de la trayectoria?

EJEMPLO 4.7 En la cumbre

Un automóvil muestra una aceleración constante de 0.300 m/s^2 paralela a la autopista. El automóvil pasa sobre una elevación en el camino tal que lo alto de la elevación tiene forma de círculo con 500 m de radio. En el momento en que el automóvil está en lo alto de la elevación, su vector velocidad es horizontal y tiene un magnitud de 6.00 m/s. ¿Cuáles son la magnitud y dirección del vector aceleración total para el automóvil en este instante?

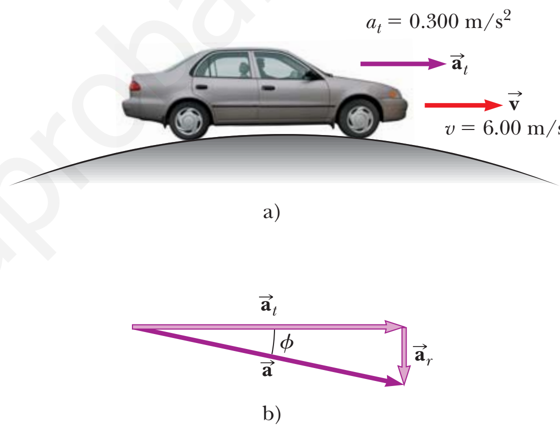


Figura 4.17 (Ejemplo 4.7) a) Un automóvil pasa sobre una elevación que tiene forma de círculo. b) El vector aceleración total $\vec{\mathbf{a}}$ es la suma de los vectores aceleración tangencial y radial $\vec{\mathbf{a}}_t$ y $\vec{\mathbf{a}}_r$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Forme ideas de la situación con la figura 4.17a y cualquier experiencia que haya tenido al conducir sobre elevaciones en el camino.

Categorizar Puesto que el automóvil que acelera se mueve a lo largo de una trayectoria curva, este problema se clasifica como uno que involucra una partícula que experimenta aceleraciones tangencial y radial. Se reconoce que es un problema de sustitución relativamente simple.

La aceleración radial está dada por la ecuación 4.18, con $v = 6.00$ m/s y $r = 500$ m. El vector aceleración radial se dirige recto hacia abajo y el vector aceleración tangencial tiene magnitud de 0.300 m/s^2 y es horizontal.

Evalúe la aceleración radial:

$$a_r = -\frac{v^2}{r} = -\frac{(6.00 \text{ m/s})^2}{500 \text{ m}} = -0.072\,0 \text{ m/s}^2$$

Encuentre la magnitud de $\vec{\mathbf{a}}$:

$$\sqrt{a_r^2 + a_t^2} = \sqrt{(-0.072\,0 \text{ m/s}^2)^2 + (0.300 \text{ m/s}^2)^2}$$
$$= \boxed{0.309 \text{ m/s}^2}$$

Encuentre el ángulo ϕ (véase la figura 4.17b) entre $\vec{\mathbf{a}}$ y la horizontal:

$$\phi = \tan^{-1}\frac{a_r}{a_t} = \tan^{-1}\left(\frac{-0.072\,0 \text{ m/s}^2}{0.300 \text{ m/s}^2}\right) = \boxed{-13.5°}$$

4.6 Velocidad y aceleración relativas

En esta sección se describe cómo se relacionan las observaciones realizadas por diferentes observadores en distintos marcos de referencia. Un marco de referencia se describe mediante un sistema coordenado cartesiano para el cual un observador está en reposo en relación con el origen.

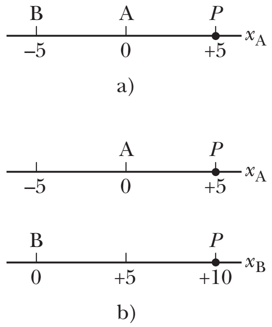


Figura 4.18 Diferentes observadores realizan distintas mediciones. a) El observador A se ubica en el origen y el observador B está en una posición de -5. Ambos observadores miden la posición de una partícula en *P*. b) Si ambos observadores se ven ellos mismos en el origen de su propio sistema coordenado, no estarán de acuerdo con el valor de la posición de la partícula en *P*.

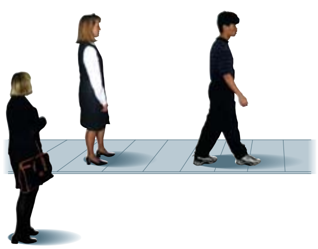


Figura 4.19 Dos observadoras miden la rapidez de un hombre que camina sobre una banda transportadora. La mujer que está de pie sobre la banda ve al hombre moverse con una rapidez más lenta que la mujer que lo observa desde una posición fija.

Establezca conceptos de una situación modelo en la que habrá distintas observaciones para diferentes observadores. Considere a los dos observadores A y B a lo largo de la recta numérica de la figura 4.18a. El observador A se ubica en el origen de un eje x_A unidimensional, mientras que el observador B está en la posición $x_A = -5$. La variable de posición se indica como x_A porque el observador A está en el origen de este eje. Ambos observadores miden la posición del punto *P*, que se ubica en $x_A = +5$. Suponga que el observador B decide que él se ubica en el origen de un eje x_B como en la figura 4.18b. Advierta que los dos observadores discrepan acerca del valor de la posición del punto *P*. El observador A afirma que el punto *P* se ubica en una posición con un valor de $+5$, mientras que el observador B afirma que se ubica en una posición con un valor de $+10$. Ambos observadores están en lo correcto, aun cuando hagan diferentes mediciones. Sus observaciones difieren porque realizan las mediciones desde diferentes marcos de referencia.

Imagine ahora que el observador B en la figura 4.18b se mueve hacia la derecha a lo largo del eje x_B. Ahora las dos mediciones son incluso más diferentes. El observador A afirma que el punto *P* permanece en reposo en una posición con un valor de $+5$, mientras que el observador B afirma que la posición de *P* cambia continuamente con el tiempo, ¡que incluso lo pasa a él y se mueve más allá de donde él está! De nuevo, ambos observadores están en lo correcto, y la diferencia en sus observaciones surge de sus diferentes marcos de referencia.

Este fenómeno se explora aún más al considerar dos observadoras que miran a un hombre caminar sobre una banda transportadora en un aeropuerto en la figura 4.19. La mujer que está de pie en la banda transportadora ve que el hombre anda con una rapidez normal. La mujer que observa desde una posición fija ve al hombre moverse con una rapidez mayor, porque la rapidez de la banda transportadora se combina con su rapidez al andar. Ambas observadoras miran al mismo hombre y llegan a diferentes valores para su rapidez. Ambas están en lo correcto; la diferencia en sus observaciones resulta de la velocidad relativa de sus marcos de referencia.

En una situación más general, considere una partícula ubicada en el punto *P* de la figura 4.20. Imagine que el movimiento de esta partícula lo describen dos observadores, A en un marco de referencia S_A fijo en relación con la Tierra y un segundo B en un marco de referencia S_B que se mueve hacia la derecha en relación con S_A (y debido a eso en relación con la Tierra) con una velocidad constante $\vec{\mathbf{v}}_{BA}$. En esta discusión de velocidad relativa, se usa una notación de doble subíndice: el primer subíndice representa lo que se observa y el segundo representa quién realiza la observación. En consecuencia, la notación $\vec{\mathbf{v}}_{BA}$ significa la velocidad del observador B (y el marco unido S_B) medido por el observador A. Con esta notación, el observador B mide a A como si estuviera en movimiento hacia la izquierda con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}_{AB} = -\vec{\mathbf{v}}_{BA}$. Para propósitos de esta discusión, coloque a cada observador en su respectivo origen.

El tiempo $t = 0$ se define como el instante en que los orígenes de los dos marcos de referencia coinciden en el espacio. Por lo tanto, en el tiempo *t*, los orígenes de los marcos de referencia estarán separados una distancia $v_{BA}t$. La posición *P* de la partícula en relación con el observador A se marca con el vector de posición $\vec{\mathbf{r}}_{PA}$ y en relación con el observador B con el vector de posición $\vec{\mathbf{r}}_{PB}$, ambos en el tiempo *t*. A partir de la figura 4.20 se ve que los vectores $\vec{\mathbf{r}}_{PA}$ y $\vec{\mathbf{r}}_{PB}$ se relacionan mutuamente a partir de la expresión

$$\vec{\mathbf{r}}_{PA} = \vec{\mathbf{r}}_{PB} + \vec{\mathbf{v}}_{BA}t \tag{4.19}$$

Al derivar la ecuación 4.19 respecto del tiempo, y notar que $\vec{\mathbf{v}}_{BA}$ es constante, se obtiene

$$\frac{d\vec{\mathbf{r}}_{PA}}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_{PB}}{dt} + \vec{\mathbf{v}}_{BA}$$

Transformación de velocidad galileana ▶

$$\vec{\mathbf{u}}_{PA} = \vec{\mathbf{u}}_{PB} + \vec{\mathbf{v}}_{BA} \tag{4.20}$$

donde $\vec{\mathbf{u}}_{PA}$ es la velocidad de la partícula en *P* medida por el observador A y $\vec{\mathbf{u}}_{PB}$ es su velocidad medida por B. (El símbolo $\vec{\mathbf{u}}$ se usa para velocidad de partícula en lugar de $\vec{\mathbf{v}}$, que se usa para velocidad relativa de dos marcos de referencia.) Las ecuaciones 4.19 y 4.20 se conocen como **ecuaciones de transformación galileanas**. Relacionan la posición y velocidad de una partícula según las miden los observadores en movimiento relativo. Advierta el patrón de los subíndices en la ecuación 4.20. Cuando se suman velocidades relativas, los subíndices internos (B) son lo mismos y los exteriores (P, A) igualan los subíndices de la velocidad en el lado izquierdo de la ecuación.

Aunque los observadores en dos marcos miden diferentes velocidades para la partícula, miden la *misma aceleración* cuando $\vec{\mathbf{v}}_{BA}$ es constante. Se puede verificar que, al tomar la derivada en el tiempo de la ecuación 4.20,

$$\frac{d\vec{\mathbf{u}}_{PA}}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{u}}_{PB}}{dt} + \frac{d\vec{\mathbf{v}}_{BA}}{dt}$$

Puesto que $\vec{\mathbf{v}}_{BA}$ es constante, $d\vec{\mathbf{v}}_{BA}/dt = 0$. Por tanto, se concluye que $\vec{\mathbf{a}}_{PA} = \vec{\mathbf{a}}_{PB}$ porque $\vec{\mathbf{a}}_{PA} = d\vec{\mathbf{u}}_{PA}/dt$ y $\vec{\mathbf{a}}_{PB} = d\vec{\mathbf{u}}_{PB}/dt$. Esto es, **la aceleración de la partícula medida por un observador en un marco de referencia es la misma que la medida por cualquier otro observador que se mueva con velocidad constante en relación con el primer marco.**

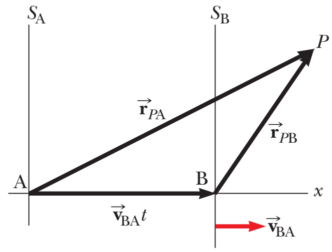


Figura 4.20 Una partícula ubicada en P es descrita por dos observadores, uno en el marco de referencia fija S_A y el otro en el marco S_B, que se mueve hacia la derecha con una velocidad constante $\vec{\mathbf{v}}_{BA}$. El vector $\vec{\mathbf{r}}_{PA}$ es el vector de posición de la partícula en relación con S_A y $\vec{\mathbf{r}}_{PB}$ es su vector de posición en relación con S_B.

EJEMPLO 4.8 Un bote que cruza un río

Un bote que cruza un río ancho se mueve con una rapidez de 10.0 km/h en relación con el agua. El agua en el río tiene una rapidez uniforme de 5.00 km/h hacia el este en relación con la Tierra.

A) Si el bote se dirige hacia el norte, determine la velocidad del bote en relación con un observador que está de pie en cualquier orilla.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que se mueve a través de un río mientras lo empuja la corriente. No será capaz de moverse directamente a través del río, sino que terminará corriente abajo, como muestra la figura 4.21a.

Categorizar Debido a las velocidades independientes de usted y el río, es posible clasificar este problema como uno que involucra velocidades relativas.

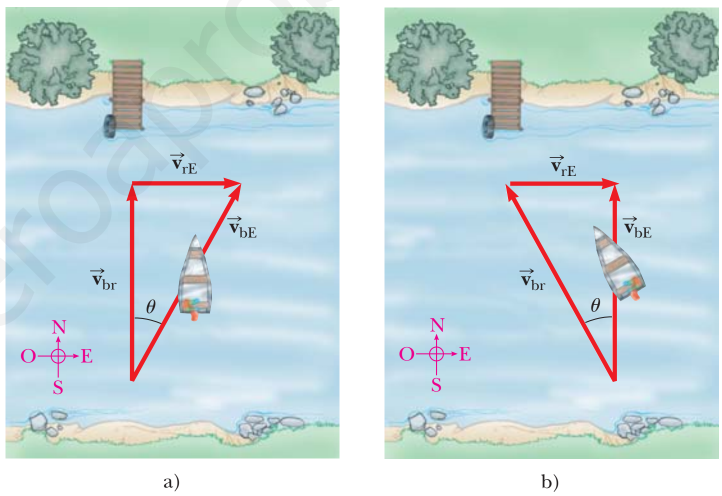


Figura 4.21 (Ejemplo 4.8) a) Un bote se dirige directamente a través de un río y termina corriente abajo. b) Para moverse directamente a través del río, el bote debe dirigirse corriente arriba.

Analizar Se conoce $\vec{\mathbf{v}}_{br}$, la velocidad del *bote* en relación con el *río*, y $\vec{\mathbf{v}}_{rE}$ la velocidad del *río* en relación con la *Tierra*. Lo que se debe encontrar es $\vec{\mathbf{v}}_{bE}$, la velocidad del *bote* respecto de la *Tierra*. La relación entre estas tres cantidades es $\vec{\mathbf{v}}_{bE} = \vec{\mathbf{v}}_{br} + \vec{\mathbf{v}}_{rE}$. Los términos en la ecuación se deben manipular como cantidades vectoriales; los vectores se muestran en la figura 4.21. La cantidad $\vec{\mathbf{v}}_{br}$ es hacia el norte; $\vec{\mathbf{v}}_{rE}$ es hacia el este; y la suma vectorial de los dos, $\vec{\mathbf{v}}_{bE}$, está a un ángulo θ como se define en la figura 4.21a.

Encuentre la rapidez v_{bE} del bote en relación con la Tierra mediante el teorema de Pitágoras:

$$v_{bE} = \sqrt{v_{br}^2 + v_{rE}^2} = \sqrt{(10.0 \text{ km/h})^2 + (5.00 \text{ km/h})^2}$$
$$= \boxed{11.2 \text{ km/h}}$$

Encuentre la dirección de $\vec{\mathbf{v}}_{bE}$:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{rE}}{v_{br}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5.00}{10.0}\right) = \boxed{26.6°}$$

Finalizar El bote se mueve con una rapidez de 11.2 km/h en la dirección 26.6° noreste en relación con la Tierra. Note que la rapidez de 11.2 km/h es más rápida que la rapidez del bote de 10.0 km/h. La velocidad de la corriente se suma a la suya para darle una mayor rapidez. Observe en la figura 4.21a que su velocidad resultante está a un ángulo con la dirección recta a través del río, así que terminará corriente abajo, como se predijo.

B) Si el bote viaja con la misma rapidez de 10.0 km/h en relación con el río y debe viajar al norte, como se muestra en la figura 4.21b, ¿hacia dónde se debe dirigir?

SOLUCIÓN

Conceptualizar/categorizar Esta pregunta es una extensión del inciso A), así que ya se tienen ideas y ya se clasificó el problema. Una característica nueva de la formación de conceptos es que ahora el bote se debe dirigir corriente arriba para ir recto a través del río.

Analizar Ahora el análisis involucra el nuevo triángulo que se muestra en la figura 4.21b. Como en el inciso A), se conoce $\vec{\mathbf{v}}_{rE}$ y la magnitud del vector $\vec{\mathbf{v}}_{br}$ y se quiere que $\vec{\mathbf{v}}_{bE}$ se dirija a través del río. Note la diferencia entre el triángulo de la figura 4.21a y el de la figura 4.21b: la hipotenusa de la figura 4.21b ya no es $\vec{\mathbf{v}}_{bE}$.

Aplique el teorema de Pitágoras para hallar $\vec{\mathbf{v}}_{bE}$:

$$v_{bE} = \sqrt{v_{br}^2 - v_{rE}^2} = \sqrt{(10.0\text{ km/h})^2 - (5.00\text{ km/h})^2} = 8.66\text{ km/h}$$

Encuentre la dirección en la que se dirige el bote:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{rE}}{v_{bE}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5.00}{8.66}\right) = 30.0°$$

Finalizar El bote se debe dirigir corriente arriba de modo que viaje directamente hacia el norte a través del río. Para la situación que se conoce, el bote debe dirigirse 30.0° al noroeste. Para corrientes más rápidas, el bote se debe dirigir corriente arriba en ángulos mayores.

¿Y si...? Considere que los dos botes de los incisos A) y B) compiten al cruzar el río. ¿Cuál bote llega primero a la orilla opuesta?

Respuesta En el inciso A), la velocidad de 10 km/h se dirige directamente a través del río. En el inciso B), la velocidad que se dirige a través del río tiene una magnitud de sólo 8.66 km/h. Por lo tanto, el bote del inciso A) tiene una componente de velocidad mayor directamente a través del río y llega primero.

Resumen

DEFINICIONES

El **vector desplazamiento** $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ para una partícula es la diferencia entre su vector de posición final y su vector de posición inicial:

$$\Delta\vec{\mathbf{r}} \equiv \vec{\mathbf{r}}_f - \vec{\mathbf{r}}_i \quad \textbf{(4.1)}$$

La **velocidad promedio** de una partícula durante el intervalo de tiempo Δt se define como el desplazamiento de la partícula dividido entre el intervalo de tiempo:

$$\vec{\mathbf{v}}_{prom} \equiv \frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} \quad \textbf{(4.2)}$$

La **velocidad instantánea** de una partícula se define como el límite de la velocidad promedio conforme Δt tiende a cero:

$$\vec{\mathbf{v}} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \quad \textbf{(4.3)}$$

La **aceleración promedio** de una partícula se define como el cambio en su vector velocidad instantánea dividido entre el intervalo de tiempo Δt durante el que ocurre dicho cambio:

$$\vec{\mathbf{a}}_{prom} \equiv \frac{\vec{\mathbf{v}}_f - \vec{\mathbf{v}}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} \quad \textbf{(4.4)}$$

La **aceleración instantánea** de una partícula se define como el valor límite de la aceleración promedio conforme Δt tiende a cero:

$$\vec{\mathbf{a}} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \quad \textbf{(4.5)}$$

El **movimiento de proyectil** es una clase de movimiento en dos dimensiones bajo aceleración constante, donde $a_x = 0$ y $a_y = -g$.

Una partícula que se mueve en un círculo de radio r con rapidez constante v es un **movimiento circular uniforme**. Para tal partícula, el **periodo** de su movimiento es

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad \textbf{(4.15)}$$

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

Si una partícula se mueve con aceleración *constante* $\vec{\mathbf{a}}$ y tiene velocidad $\vec{\mathbf{v}}_i$ y posición $\vec{\mathbf{r}}_i$ en $t = 0$, sus vectores velocidad y de posición en algún tiempo posterior t son

$$\vec{\mathbf{v}}_f = \vec{\mathbf{v}}_i + \vec{\mathbf{a}}t \qquad \textbf{(4.8)}$$

$$\vec{\mathbf{r}}_f = \vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{v}}_i t + \tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{a}}t^2 \qquad \textbf{(4.9)}$$

Para movimiento en dos dimensiones en el plano xy bajo aceleración constante, cada una de estas expresiones vectoriales es equivalente a dos expresiones componentes: una para el movimiento en la dirección x y otra para el movimiento en la dirección y.

Es útil pensar en el movimiento de proyectil en términos de una combinación de dos modelos de análisis: 1) la partícula bajo modelo de velocidad constante en la dirección x y 2) el modelo de partícula bajo aceleración constante en la dirección vertical con una aceleración descendente de magnitud $g = 9.80\ \text{m/s}^2$.

Una partícula en movimiento circular uniforme experimenta una aceleración radial $\vec{\mathbf{a}}$ puesto que la dirección de $\vec{\mathbf{v}}$ cambia en el tiempo. Esta aceleración se llama **aceleración centrípeta** y su dirección siempre es hacia el centro del círculo.

Si una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria curva en tal forma que tanto la magnitud como la dirección de $\vec{\mathbf{v}}$ cambian en el tiempo, la partícula tiene un vector aceleración que se puede describir mediante dos vectores componentes: 1) una componente del vector radial $\vec{\mathbf{a}}_r$ que causa el cambio en dirección de $\vec{\mathbf{v}}$ y 2) una componente del vector tangencial $\vec{\mathbf{a}}_t$ que causa el cambio en la magnitud de $\vec{\mathbf{v}}$. La magnitud de $\vec{\mathbf{a}}_r$ es v^2/r y la magnitud de $\vec{\mathbf{a}}_t$ es $|dv/dt|$.

La velocidad $\vec{\mathbf{u}}_{PA}$ de una partícula medida en un marco de referencia fijo S_A se puede relacionar con la velocidad $\vec{\mathbf{u}}_{PB}$ de la misma partícula medida en un marco de referencia móvil S_B mediante

$$\vec{\mathbf{u}}_{PA} = \vec{\mathbf{u}}_{PB} + \vec{\mathbf{v}}_{BA} \qquad \textbf{(4.20)}$$

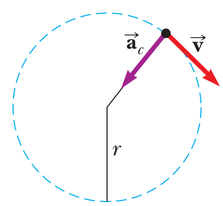
donde $\vec{\mathbf{v}}_{BA}$ es la velocidad de S_B en relación con S_A.

MODELO DE ANÁLISIS PARA RESOLVER PROBLEMAS

Partícula en movimiento circular uniforme. Si una partícula se mueve en una trayectoria circular de radio r con una rapidez constante v, la magnitud de su aceleración centrípeta está dada por

$$a_c = \frac{v^2}{r} \qquad \textbf{(4.14)}$$

y el periodo del movimiento de la partícula está dado por la ecuación 4.15.



Preguntas

O denota pregunta objetiva.

1. **O** La figura P4.1 muestra una imagen desde el aire de un automóvil que entra a la curva de una autopista. Conforme el automóvil se mueve del punto 1 al punto 2, su rapidez se duplica. ¿Cuál vector, del a) al g), muestra la dirección de la aceleración promedio del automóvil entre estos dos puntos?
2. Si usted conoce los vectores de posición de una partícula en dos puntos, a lo largo de su trayectoria, y también conoce el intervalo de tiempo durante el que se mueve de un punto al otro, ¿puede determinar la velocidad instantánea de la partícula? ¿Su velocidad promedio? Explique.
3. Construya diagramas de movimiento que muestren la velocidad y la aceleración de un proyectil en varios puntos a lo largo de su trayectoria, si supone que a) el proyectil se lanza horizontalmente y b) el proyectil se lanza en un ángulo θ con la horizontal.

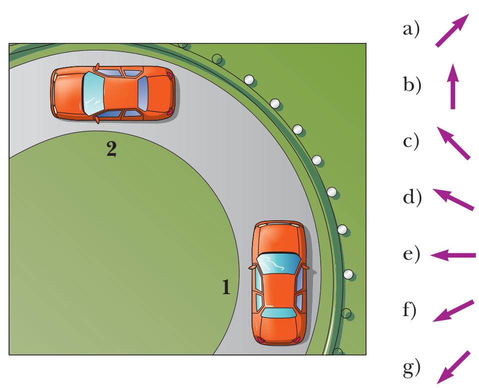


Figura P4.1

4. **O** Al entrar a su dormitorio, un estudiante lanza su mochila hacia arriba a la derecha con un ángulo de 45° con la horizontal. La resistencia del aire no afecta la mochila. Se mueve del punto Ⓐ inmediatamente después de dejar su mano, al punto Ⓑ en lo alto de su vuelo y al punto Ⓒ inmediatamente antes de aterrizar en su cama. **i)** Ordene las siguientes componentes de velocidad horizontal y vertical del más grande al más pequeño. Note que cero es más grande que un número negativo. Si dos cantidades son iguales, muéstrelas como iguales en su lista. Si cualquier cantidad es igual que cero, muestre ese hecho en su lista. a) $v_{\text{Ⓐ}x}$, b) $v_{\text{Ⓐ}y}$, c) $v_{\text{Ⓑ}x}$, d) $v_{\text{Ⓑ}y}$, e) $v_{\text{Ⓒ}x}$, f) $v_{\text{Ⓒ}y}$. **ii)** De igual modo, ordene las siguientes componentes de aceleración. a) $a_{\text{Ⓐ}x}$, b) $a_{\text{Ⓐ}y}$, c) $a_{\text{Ⓑ}x}$, d) $a_{\text{Ⓑ}y}$, e) $a_{\text{Ⓒ}x}$, f) $a_{\text{Ⓒ}y}$.

5. Una nave espacial se desplaza en el espacio con una velocidad constante. De súbito, una fuga de gas lateral de la nave le da una aceleración constante en una dirección perpendicular a la velocidad inicial. La orientación de la nave no cambia, así que la aceleración permanece perpendicular a la dirección original de la velocidad. ¿Cuál es la forma de la trayectoria seguida por la nave en esta situación?

6. **O** ¿En cuál de las siguientes situaciones el objeto en movimiento se representa como un proyectil? Elija todas las respuestas correctas. a) Un zapato se lanza en una dirección arbitraria. b) Un avión jet que cruza el cielo con sus motores impulsando al avión hacia adelante. c) Un cohete que deja la plataforma de lanzamiento. d) Un cohete que se mueve a través del cielo, a mucho menos que la rapidez del sonido, después de que su combustible se agotó. e) Un buzo que lanza una piedra bajo el agua.

7. Un proyectil es lanzado a cierto ángulo de la horizontal con una rapidez inicial v_i y resistencia del aire despreciable. ¿El proyectil es un cuerpo en caída libre? ¿Cuál es su aceleración en la dirección vertical? ¿Cuál es su aceleración en la dirección horizontal?

8. **O** Establezca cuáles de las siguientes cantidades, si alguna, permanece constante conforme un proyectil se mueve a través de su trayectoria parabólica: a) rapidez, b) aceleración, c) componente horizontal de velocidad, d) componente vertical de velocidad.

9. **O** Un proyectil se lanza sobre la Tierra con cierta velocidad inicial y se mueve sin resistencia del aire. Otro proyectil se lanza con la misma velocidad inicial en la Luna, donde la aceleración debida a la gravedad es 1/6. **i)** ¿Cuál es el alcance del proyectil en la Luna en relación con el del proyectil en la Tierra? a) 1/6, b) el mismo, c) $\sqrt{6}$ veces, d) 6 veces, e) 36 veces. **ii)** ¿Cómo se compara la altitud máxima del proyectil en la Luna con la del proyectil en la Tierra? Elija entre las mismas posibilidades, de la a) a la e).

10. Explique si las siguientes partículas tienen o no una aceleración: a) una partícula que se mueve en línea recta con rapidez constante y b) una partícula que se mueve alrededor de una curva con rapidez constante.

11. Describa cómo un conductor puede dirigir un automóvil que viaja con rapidez constante de modo que a) la aceleración sea cero o b) la magnitud de la aceleración permanezca constante.

12. **O** Un tapón de goma en el extremo de una cuerda se balancea de manera estable en un círculo horizontal. En un intento, se mueve con rapidez v en un círculo de radio r. En una segundo intento, se mueve con una mayor rapidez $3v$ en un círculo de radio $3r$. **i)** En este segundo intento, su aceleración es (elija una) a) la misma que en el primer intento, b) tres veces mayor, c) un tercio, d) nueve veces mayor, e) un sexto. **ii)** En el segundo intento, ¿cómo se compara el periodo con el del primer intento? Elija sus respuestas de las mismas posibilidades de la a) a la e).

13. Una patinadora sobre hielo ejecuta una figura ocho, que consiste en dos trayectorias circulares iguales y tangentes. A lo largo de la primera trayectoria aumenta su rapidez uniformemente, y durante la segunda se mueve con una rapidez constante. Dibuje un diagrama de movimiento que muestre sus vectores velocidad y aceleración en varios puntos a lo largo de la trayectoria de movimiento.

14. **O** Un camión ligero entra a una curva que tiene un radio de 150 m con una rapidez máxima de 32.0 m/s. Para tener la misma aceleración, ¿a qué rapidez máxima puede ir alrededor de una curva que tiene un radio de 75.0 m? a) 64 m/s, b) 45 m/s, c) 32 m/s, d) 23 m/s, e) 16 m/s, f) 8 m/s.

15. **O** Galileo sugirió la idea para esta pregunta: un marinero suelta una llave desde lo alto de un mástil vertical del bote mientras éste tiene un movimiento rápido y estable en línea recta hacia adelante. ¿Dónde golpea la llave en la cubierta? a) adelante de la base del mástil, b) en la base del mástil, c) detrás de la base del mástil, d) en el lado desde donde sopla el viento de la base del mástil.

16. **O** Una niña, que se mueve a 8 m/s sobre patines de ruedas, rebasa a un niño que se mueve a 5 m/s conforme ambos patinan en línea recta. El niño lanza una bola hacia atrás, hacia la niña, y le da una rapidez de 12 m/s en relación con él. ¿Cuál es la rapidez de la bola en relación con la niña quien la atrapa? a) (8 + 5 + 12) m/s, b) (8 − 5 − 12) m/s, c) (8 + 5 − 12) m/s, d) (8 − 5 + 12) m/s, e) (−8 + 5 + 12) m/s.

Problemas

Sección 4.1 Vectores de posición, velocidad y aceleración

1. Un motociclista se dirige al sur a 20.0 m/s durante 3.00 min, luego da vuelta al oeste y viaja a 25.0 m/s durante 2.00 min y finalmente viaja al noroeste a 30.0 m/s durante 1.00 min. Para este viaje de 6.00 min, encuentre a) el desplazamiento vectorial total, b) la rapidez promedio y c) la velocidad promedio. Sea el eje x positivo que apunta al este.

2. Una bola de golf es golpeada desde un tee en el borde de un risco. Sus coordenadas x y y como funciones del tiempo se conocen por las expresiones siguientes:

$$x = (18.0 \text{ m/s})t$$

$$y = (4.00 \text{ m/s})t - (4.90 \text{ m/s}^2)t^2$$

a) Escriba una expresión vectorial para la posición de la bola como función del tiempo, con los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$. Al tomar derivadas, obtenga expresiones para b) el vector velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ como función del tiempo y c) el vector aceleración $\vec{\mathbf{a}}$ como función del tiempo. A continuación use la notación de vector unitario para escribir expresiones para d) la posición, e) la velocidad y f) la aceleración de la bola de golf, todos en $t = 3.00$ s.

3. Cuando el Sol está directamente arriba, un halcón se clava hacia el suelo con una velocidad constante de 5.00 m/s a 60.0° bajo la horizontal. Calcule la rapidez de su sombra a nivel del suelo.

4. ● Las coordenadas de un objeto que se mueve en el plano xy varían con el tiempo de acuerdo con $x = -(5.00 \text{ m}) \operatorname{sen}(\omega t)$ y $y = (4.00 \text{ m}) - (5.00 \text{ m})\cos(\omega t)$, donde ω es una constante y t está en segundos. a) Determine las componentes de velocidad y las componentes de aceleración del objeto en $t = 0$. b) Escriba expresiones para el vector de posición, el vector velocidad y el vector aceleración del objeto en cualquier tiempo $t > 0$. c) Describa la trayectoria del objeto en una gráfica xy.

Sección 4.2 Movimiento en dos dimensiones con aceleración constante

5. Un pez que nada en un plano horizontal tiene velocidad $\vec{\mathbf{v}}_i = (4.00\hat{\mathbf{i}} + 1.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s en un punto en el océano donde la posición relativa a cierta roca es $\vec{\mathbf{r}}_i = (10.0\hat{\mathbf{i}} - 4.00\hat{\mathbf{j}})$ m. Después de que el pez nada con aceleración constante durante 20.0 s, su velocidad es $\vec{\mathbf{v}}_i = (20.0\hat{\mathbf{i}} - 5.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s. a) ¿Cuáles son las componentes de la aceleración? b) ¿Cuál es la dirección de la aceleración respecto del vector unitario $\hat{\mathbf{i}}$? c) Si el pez mantiene aceleración constante, ¿dónde está en $t = 25.0$ s y en qué dirección se mueve?

6. El vector de posición de una partícula varía en el tiempo de acuerdo con la expresión $\vec{\mathbf{r}} = (3.00\hat{\mathbf{i}} - 6.00t^2\hat{\mathbf{j}})$ m. a) Encuentre expresiones para la velocidad y aceleración de la partícula como funciones del tiempo. b) Determine la posición y velocidad de la partícula en $t = 1.00$ s.

7. *¿Y si la aceleración no es constante?* Una partícula parte del origen con velocidad $5\hat{\mathbf{i}}$ m/s en $t = 0$ y se mueve en el plano xy con una aceleración variable conocida por $\vec{\mathbf{a}} = (6\sqrt{t}\,\hat{\mathbf{j}})$ m/s^2, donde t está en s. a) Determine el vector velocidad de la partícula como función del tiempo. b) Determine la posición de la partícula como función del tiempo.

8. Una partícula que inicialmente se ubica en el origen tiene una aceleración de $\vec{\mathbf{a}} = 3.00\hat{\mathbf{j}}$ m/s^2 y una velocidad inicial de $\vec{\mathbf{v}}_i = 5.00\hat{\mathbf{i}}$ m/s. Encuentre a) el vector de posición y de velocidad de la partícula en cualquier tiempo t y b) las coordenadas y rapidez de la partícula en $t = 2.00$ s.

Sección 4.3 Movimiento de proyectil

Nota: Ignore la resistencia del aire en todos los problemas. Considere $g = 9.80$ m/s^2 en la superficie de la Tierra.

9. En un bar local, un cliente desliza sobre la barra un tarro de cerveza vacío para que lo vuelvan a llenar. El cantinero está momentáneamente distraído y no ve el tarro, que se desliza de la barra y golpea el suelo a 1.40 m de la base de la barra. Si la altura de la barra es de 0.860 m, a) ¿con qué velocidad el tarro dejó la barra? b) ¿Cuál fue la dirección de la velocidad del tarro justo antes de golpear el suelo?

10. En un bar local, un cliente desliza sobre la barra un tarro de cerveza vacío para que lo vuelvan a llenar. El cantinero acaba de decidir ir a casa y repensar su vida, de modo que no ve el tarro. El tarro se desliza de la barra y golpea el suelo a una distancia d de la base de la barra. La altura de la barra es h. a) ¿Con qué velocidad el tarro dejó la barra? b) ¿Cuál fue la dirección de la velocidad del tarro justo antes de golpear el suelo?

11. Para iniciar una avalancha en una pendiente de la montaña, un obús de artillería es disparado con una velocidad inicial de 300 m/s a 55.0° sobre la horizontal. Explota en la ladera 42.0 s después de ser disparado. ¿Cuáles son las coordenadas x y y donde explota el obús, en relación con su punto de disparo?

12. ● Una roca se lanza hacia arriba desde el suelo en tal forma que la altura máxima de su vuelo es igual a su alcance horizontal d. a) ¿A qué ángulo θ se lanza la roca? b) **¿Y si...?** ¿Su respuesta al inciso a) cambiaría en un planeta diferente? Explique. c) ¿Cuál es el alcance $d_{\text{máx}}$ que puede lograr la roca si se lanza a la misma rapidez pero en ángulo óptimo para alcance máximo?

13. Un proyectil se dispara en tal forma que su alcance horizontal es igual a tres veces su altura máxima. ¿Cuál es el ángulo de proyección?

14. Un bombero, a una distancia d de un edificio en llamas, dirige un chorro de agua desde una manguera en un ángulo θ_i sobre la horizontal, como se muestra en la figura P4.14. Si la rapidez inicial del chorro es v_i, ¿en qué altura h el agua golpea al edificio?

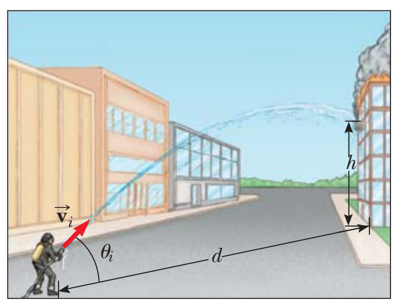


Figura P4.14

15. Una bola se lanza desde una ventana en un piso superior de un edificio. A la bola se le da una velocidad inicial de 8.00 m/s a un ángulo de 20.0° bajo la horizontal. Golpea el suelo 3.00 s después. a) ¿A qué distancia, horizontalmente, desde la base del edificio, la bola golpea el suelo? b) Encuentre la altura desde la que se lanzó la bola. c) ¿Cuánto tarda la bola en llegar a un punto 10.0 m abajo del nivel de lanzamiento?

16. Un arquitecto que diseña jardines programa una cascada artificial en un parque de la ciudad. El agua fluirá a 1.70 m/s y dejará el extremo de un canal horizontal en lo alto de una pared vertical de 2.35 m de altura, y desde ahí caerá en una piscina. a) ¿El espacio detrás de la cascada será suficientemente ancho para un pasillo de peatones? b) Para vender su plan al concejo de la ciudad, el arquitecto quiere construir un modelo a escala estándar, a un doceavo del tamaño real. ¿Qué tan rápido debe fluir el agua en el canal del modelo?

17. Un pateador debe hacer un gol de campo desde un punto a 36.0 m (casi de 40 yardas) de la zona de gol, y la mitad de los espectadores espera que la bola libre la barra transversal, que tiene 3.05 m de alto. Cuando se patea, la bola deja el suelo con una rapidez de 20.0 m/s en un ángulo de 53.0° de la horizontal. a) ¿Por cuánto resulta insuficiente para librar la barra? b) ¿La bola se aproxima a la barra transversal mientras aún se eleva o mientras va de caída?

18. Un bombardero en picada tiene una velocidad de 280 m/s a un ángulo θ bajo la horizontal. Cuando la altitud de la aeronave es 2.15 km, libera una bomba, que golpea un objetivo en el suelo. La magnitud del desplazamiento desde el punto de liberación de la bomba al objetivo es 3.25 km. Encuentre el ángulo θ.

19. Un patio de juego está en el techo plano de una escuela, 6.00 m arriba del nivel de la calle. La pared vertical del edificio tiene 7.00 m de alto y forma una barda de 1 m de alto alrededor del patio. Una bola cae en la calle y un peatón la regresa lanzándola en un ángulo de 53.0° sobre la horizontal a un punto 24.0 m desde la base de la pared del edificio. La bola tarda 2.20 s en llegar a un punto vertical sobre la pared. a) Encuentre la rapidez a la que se lanzó la bola. b) Encuentre la distancia vertical sobre la que libra la pared. c) Encuentre la distancia desde la pared al punto en el techo donde aterriza la bola.

20. Una estrella de basquetbol cubre 2.80 m en la horizontal en un salto para encestar la bola (figura P4.20a). Su movimiento a través del espacio se representa igual que el de una partícula en su *centro de masa*, que se definirá en el capítulo 9. Su centro de masa está a una altura de 1.02 m cuando deja el suelo. Llega a una altura máxima de 1.85 m sobre el suelo y está a una elevación de 0.900 m cuando toca el suelo de nuevo. Determine: a) su tiempo de vuelo (su "tiempo colgado"), b) sus componentes de velocidad horizontal y c) vertical en el instante de despegar y d) su ángulo de despegue. e) Por comparación, determine el tiempo colgado de una ciervo cola blanca que da un salto (figura P4.20b) con elevaciones de centro de masa $y_i = 1.20$ m, $y_{máx} = 2.50$ m y $y_f = 0.700$ m.

© Ray Stubbiebine/Reuters/Corbis

Bill Lee/Dembinsky PhotoAssociates

a) b)

Figura P4.20

21. Un jugador de futbol patea una roca horizontalmente de un montículo de 40.0 m de alto en un estanque. Si el jugador escucha el sonido del chapoteo 3.00 s después, ¿cuál fue la rapidez inicial dada a la roca? Suponga que la rapidez del sonido en el aire es 343 m/s.

22. ● El movimiento de un cuerpo humano a través del espacio se representa como el movimiento de una partícula en el centro de masa del cuerpo, como se estudiará en el capítulo 9. Las componentes de la posición del centro de masa de un atleta desde el principio hasta el fin de cierto salto se describen por las dos ecuaciones

$$x_f = 0 + (11.2 \text{ m/s})(\cos 18.5°)\,t$$

$$0.360 \text{ m} = 0.84 \text{ m} + (11.2 \text{ m/s})(\text{sen } 18.5°)\,t - \tfrac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)\,t^2$$

donde t es el tiempo cuando el atleta aterriza después de despegar en $t = 0$. Identifique a) su vector de posición y b) su vector velocidad en el punto de despegue. c) El récord mundial de salto largo es 8.95 m. ¿Qué distancia saltó el atleta en este problema? d) Describa la forma de la trayectoria de su centro de masa.

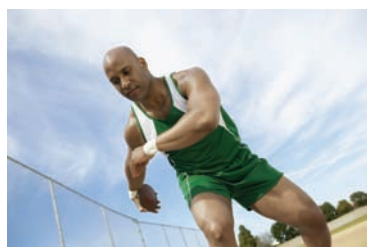
23. Un cohete de fuegos artificiales explota a una altura h, el máximo de su trayectoria vertical. Lanza fragmentos ardientes en todas direcciones, pero todas con la misma rapidez v. Gránulos de metal solidificado caen al suelo sin resistencia del aire. Encuentre el ángulo más pequeño que forma con la horizontal la velocidad final de un fragmento.

Sección 4.4 Partícula en movimiento circular uniforme

Nota: Los problemas 10 y 12 del capítulo 6 también se pueden asignar a esta sección y la siguiente.

24. A partir de la información de la parte final del libro, calcule la aceleración radial de un punto en la superficie de la Tierra, en el ecuador, debido a la rotación de la Tierra sobre su eje.

25. El atleta que se muestra en la figura P4.25 rota un disco de 1.00 kg a lo largo de una trayectoria circular de 1.06 m de radio. La rapidez máxima del disco es 20.0 m/s. Determine la magnitud de la aceleración radial máxima del disco.



© bikeriderlondon/Shutterstock

Figura P4.25

26. Conforme se separan los cohetes propulsores, los astronautas del trasbordador espacial sienten una aceleración de hasta $3g$, donde $g = 9.80$ m/s^2. En su entrenamiento, los astronautas montan un dispositivo en el que experimentan tal aceleración como una aceleración centrípeta. En específico, el astronauta se sujeta con firmeza al extremo de un brazo mecánico que luego gira con rapidez constante en un círculo horizontal. De-

termine la rapidez de rotación, en revoluciones por segundo, requerida para dar a un astronauta una aceleración centrípeta de $3.00g$ mientras está en movimiento circular con radio de 9.45 m.

27. El joven David, quien mató a Goliat, experimentó con hondas antes de derribar al gigante. Encontró que podía hacer girar una honda de 0.600 m de longitud con una relación de 8.00 rev/s. Si aumentaba la longitud a 0.900 m, podía girar la honda sólo 6.00 veces por segundo. a) ¿Qué relación de rotación da la mayor rapidez a la piedra en el extremo de la honda? b) ¿Cuál es la aceleración centrípeta de la piedra a 8.00 rev/s? c) ¿Cuál es la aceleración centrípeta a 6.00 rev/s?

Sección 4.5 Aceleraciones tangencial y radial

28. ● a) ¿Una partícula, que se mueve con rapidez instantánea de 3.00 m/s en una trayectoria con 2.00 m de radio de curvatura, podría tener una aceleración de 6.00 m/s^2 de magnitud? b) ¿Podría tener $|\vec{\mathbf{a}}| = 4.00$ m/s^2? En cada caso, si la respuesta es sí, explique cómo puede ocurrir; si la respuesta es no, explique por qué.

29. Un tren frena mientras entra a una curva horizontal cerrada, y frena de 90.0 km/h a 50.0 km/h en los 15.0 s que tarda en cubrir la curva. El radio de la curva es de 150 m. Calcule la aceleración en el momento en que la rapidez del tren alcanza 50.0 km/h. Suponga que continúa frenando a este tiempo con la misma relación.

30. Una bola se balancea en un círculo vertical en el extremo de una cuerda de 1.50 m de largo. Cuando la bola está a 36.9° después del punto más bajo en su viaje hacia arriba, su aceleración total es $(-22.5\hat{\mathbf{i}} + 20.2\hat{\mathbf{j}})$ m/s^2. En ese instante, a) bosqueje un diagrama vectorial que muestre las componentes de su aceleración, b) determine la magnitud de su aceleración radial y c) determine la rapidez y velocidad de la bola.

31. La figura P4.31 representa la aceleración total de una partícula que se mueve en el sentido de las manecillas del reloj en un círculo de 2.50 m de radio en cierto instante de tiempo. En este instante, encuentre a) la aceleración radial, b) la rapidez de la partícula y c) su aceleración tangencial.

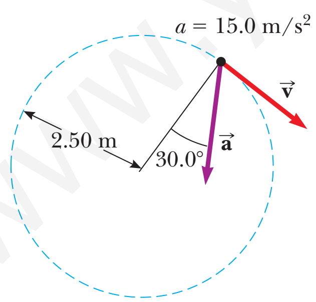


Figura P4.31

32. Un automóvil de carreras parte del reposo en una pista circular; aumenta su rapidez a una cantidad constante a_t conforme da una vuelta a la pista. Encuentre el ángulo que forma la aceleración total del automóvil, con el radio que conecta el centro de la pista y el auto, en el momento en que el automóvil completa el círculo.

Sección 4.6 Velocidad y aceleración relativas

33. Un automóvil viaja hacia el este con una rapidez de 50.0 km/h. Gotas de lluvia caen con una rapidez constante en vertical respecto de la Tierra. Las trazas de la lluvia en las ventanas laterales del automóvil forman un ángulo de 60.0° con la vertical. Encuentre la velocidad de la lluvia en relación con a) el automóvil y b) la Tierra.

34. Antonio en su Corvette acelera de acuerdo a $(3.00\hat{\mathbf{i}} - 2.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s^2 mientras Jill en su Jaguar acelera a $(1.00\hat{\mathbf{i}} + 3.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s^2. Ambos parten del reposo en el origen de un sistema coordenado *xy*. Después de 5.00 s, a) ¿cuál es la rapidez de Antonio respecto de Jill?, b) ¿qué distancia los separa?, y c) ¿cuál es la aceleración de Antonio en relación con Jill?

35. Un río tiene una rapidez estable de 0.500 m/s. Un estudiante nada corriente arriba una distancia de 1.00 km y de regreso al punto de partida. Si el estudiante puede nadar con una rapidez de 1.20 m/s en aguas tranquilas, ¿cuánto tarda el viaje? Compare esta respuesta con el intervalo de tiempo requerido para el viaje si el agua estuviese tranquila.

36. ¿Cuánto tarda un automóvil en rebasar a 60.0 km/h, por el carril izquierdo, a un automóvil que viaja en la misma dirección en el carril derecho a 40.0 km/h, si las defensas frontales de los automóviles están separadas 100 m?

37. Dos nadadores, Alan y Camillé, parten desde el mismo punto en la orilla de una corriente ancha que circula con una rapidez v. Ambos se mueven con la misma rapidez c (donde $c > v$) en relación con el agua. Alan nada corriente abajo una distancia L y luego corriente arriba la misma distancia. Camillé nada de modo que su movimiento en relación con la Tierra es perpendicular a las orillas de la corriente. Ella nada la distancia L y luego de vuelta la misma distancia, de modo que ambos nadadores regresan al punto de partida. ¿Cuál nadador regresa primero? *Nota:* Primero suponga la respuesta.

38. ● Un camión de granja se dirige al norte con una velocidad constante de 9.50 m/s en un tramo horizontal ilimitado del camino. Un niño se monta en la parte trasera del camión y lanza una lata de refresco hacia arriba y atrapa el proyectil en el mismo punto, pero 16.0 m más lejos en el camino. a) En el marco de referencia el camión, ¿a qué ángulo con la vertical el niño lanza la lata? b) ¿Cuál es la rapidez inicial de la lata en relación con el camión? c) ¿Cuál es la forma de la trayectoria de la lata como la ve el niño? d) Un observador en el suelo observa al niño lanzar la lata y atraparla. En este marco de referencia del observador en el suelo, describa la forma de la trayectoria de la lata y determine su velocidad inicial.

39. Un estudiante de ciencias monta en un vagón plataforma de un tren que viaja a lo largo de una pista horizontal recta con una rapidez constante de 10.0 m/s. El estudiante lanza una bola en el aire a lo largo de una trayectoria que él juzga con un ángulo inicial de 60.0° sobre la horizontal y está en línea con la vía. La profesora del estudiante, que está de pie en el suelo cerca de ahí, observa que la bola se eleva verticalmente. ¿Qué tan alto ve elevarse la bola?

40. ● Un tornillo cae desde el techo de un vagón de ferrocarril en movimiento que acelera hacia el norte en una relación de 2.50 m/s^2. a) ¿Cuál es la aceleración del tornillo en relación con el vagón de ferrocarril? b) ¿Cuál es la aceleración del tornillo en relación con la Tierra? c) Describa la trayectoria del tornillo como la ve un observador dentro del vagón. d) Describa la trayectoria del tornillo como la ve un observador fijo en la Tierra.

41. Un guardacostas detecta un barco no identificado a una distancia de 20.0 km en la dirección 15.0° al noreste. El barco viaja a 26.0 km/h en un curso a 40.0° al noreste. El guardacostas quiere enviar una lancha rápida para interceptar la nave e investigarla. Si la lancha rápida viaja a 50.0 km/h, ¿en qué dirección debe dirigirse? Exprese la dirección como una brújula que se orienta con el norte.

Problemas adicionales

42. *El "cometa vómito"*. Para el entrenamiento de astronautas y la prueba de equipo en gravedad cero, la NASA vuela un KC135A a lo largo de una ruta de vuelo parabólica. Como se muestra en la figura P4.42, la nave asciende desde 24 000 pies a 31 000 pies, donde entra a la parábola de cero g con una velocidad de 143 m/s y nariz alta a 45.0° y sale con velocidad de 143 m/s a 45.0° nariz baja. Durante esta porción del vuelo, la nave y los objetos dentro de su cabina acolchonada están en caída libre; se han vuelto balísticos. Entonces la nave sale del clavado con una aceleración ascendente de $0.800g$ y se mueve en un círculo vertical de 4.13 km de radio. (Durante esta porción del vuelo, los ocupantes de la nave perciben una aceleración de $1.8g$.) ¿Cuáles son a) la rapidez y b) la altitud de la nave en lo alto de la maniobra? c) ¿Cuál es el intervalo de tiempo que pasa en gravedad cero? d) ¿Cuál es la rapidez de la nave en el fondo de la ruta de vuelo?

43. Un atleta lanza un balón de basquetbol hacia arriba desde el suelo y le da una rapidez de 10.6 m/s a un ángulo de 55.0° sobre la horizontal. a) ¿Cuál es la aceleración del balón en el punto más alto de su trayectoria? b) En su camino hacia abajo, el balón golpea el aro de la canasta, a 3.05 m sobre el suelo. Rebota recto hacia arriba con la mitad de la rapidez con la que golpea el aro. ¿Qué altura sobre el suelo alcanza el balón en este rebote?

44. ● a) Un atleta lanza un balón hacia el este, con rapidez inicial de 10.6 m/s a un ángulo de 55.0° sobre la horizontal. Justo cuando el balón alcanza el punto más alto de su trayectoria, golpea un águila (la mascota del equipo contrario) que vuela horizontalmente al oeste. El balón rebota de vuelta horizontalmente al oeste con 1.50 veces la rapidez que tenía justo antes de su colisión. ¿A qué distancia cae el balón detrás del jugador que lo lanzó? b) Esta situación no está considerada en el libro de reglas, así que los oficiales regresan el reloj para repetir esta parte del juego. El jugador lanza el balón en la misma forma. El águila está totalmente atolondrada y esta vez intercepta el balón de modo que, en el mismo punto en su trayectoria, el balón nuevamente rebota del pico del ave con 1.50 veces su rapidez de impacto, y se mueve al oeste el mismo ángulo distinto de cero con la horizontal. Ahora el balón golpea la cabeza del jugador, en la misma ubicación donde sus manos lo liberaron. ¿El ángulo es necesariamente positivo (es decir, sobre la horizontal), necesariamente negativo (bajo la horizontal) o podría ser cualquiera? Dé un argumento convincente, matemático o conceptual, de su respuesta.

45. Manny Ramírez batea un cuadrangular de modo que la pelota apenas libra la fila superior de gradas, de 21.0 m de alto, ubicada a 130 m de la placa de bateo. La pelota se golpea en un ángulo de 35.0° de la horizontal y la resistencia del aire es despreciable. Encuentre a) la rapidez inicial de la pelota, b) el intervalo de tiempo requerido para que la pelota alcance las gradas y c) las componentes de velocidad y la rapidez de la pelota cuando pasa sobre la fila superior. Suponga que la pelota se golpea en una altura de 1.00 m sobre el suelo.

46. Mientras algún metal fundido salpica, una gota vuela hacia el este con velocidad inicial v_i a un ángulo θ_i sobre la horizontal y otra gota vuela hacia el oeste con la misma rapidez al mismo ángulo sobre la horizontal, como se muestra en la figura P4.46. En términos de v_i y θ_i, encuentre la distancia entre las gotas como función del tiempo.

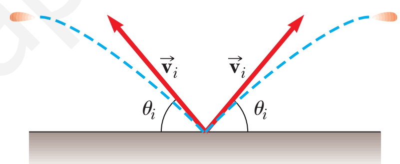
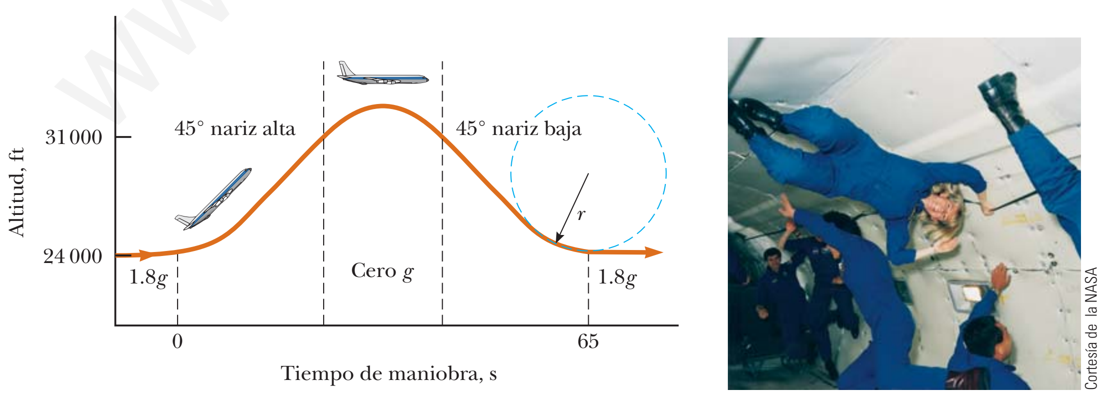


Figura P4.46

47. Un péndulo con un cordón de longitud $r = 1.00$ m se balancea en un plano vertical (figura P4.47). Cuando el péndulo está en las dos posiciones horizontales $\theta = 90.0°$ y $\theta = 270°$, su rapidez es 5.00 m/s. a) Encuentre la magnitud de la aceleración radial y la aceleración tangencial para estas posiciones. b) Dibuje diagramas vectoriales para determinar la dirección de la aceleración total para estas dos posiciones. c) Calcule la magnitud y dirección de la aceleración total.



a) b)

Figura P4.42

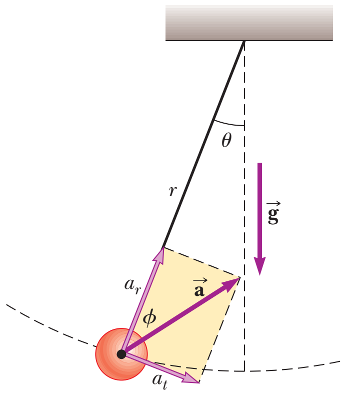


Figura P4.47

48. Un astronauta en la superficie de la Luna dispara un cañón para lanzar un paquete experimental, que deja el barril con movimiento horizontal. a) ¿Cuál debe ser la rapidez de boquilla del paquete de modo que viaje completamente alrededor de la Luna y regrese a su ubicación original? b) ¿Cuánto tarda este viaje alrededor de la Luna? Suponga que la aceleración de caída libre en la Luna es un sexto de la propia de la Tierra.

49. ● Se lanza un proyectil desde el punto ($x = 0$, $y = 0$) con velocidad $(12.0\hat{\mathbf{i}} + 49.0\hat{\mathbf{j}})$ m/s en $t = 0$. a) Tabule la distancia del proyectil $|\vec{\mathbf{r}}|$ desde el origen al final de cada segundo de allí en adelante, para $0 \leq t \leq 10$ s. También puede ser útil tabular las coordenadas x y y y las componentes de velocidad v_x y v_y. b) Observe que la distancia del proyectil desde su punto de partida aumenta con el tiempo, llega a un máximo y comienza a disminuir. Pruebe que la distancia es un máximo cuando el vector de posición es perpendicular a la velocidad. *Sugerencia:* Argumente que si $\vec{\mathbf{v}}$ no es perpendicular a $\vec{\mathbf{r}}$, después $|\vec{\mathbf{r}}|$ debe aumentar o disminuir. c) Determine la magnitud de la distancia máxima. Explique su método.

50. ● Un cañón de resorte se ubica en el borde de una mesa que está a 1.20 m sobre el suelo. Una bola de acero se lanza desde el cañón con rapidez v_0 a 35.0° sobre la horizontal. a) Encuentre la componente de desplazamiento horizontal de la bola al punto donde aterriza en el suelo como función de v_0. Esta función se escribe como $x(v_0)$. Evalúe x para b) $v_0 = 0.100$ m/s y para c) $v_0 = 100$ m/s. d) Suponga que v_0 está cerca de cero pero no es igual a cero. Muestre que un término en la respuesta al inciso a) domina de modo que la función $x(v_0)$ se reduce a una forma más simple. e) Si v_0 es muy grande, ¿cuál es la forma aproximada de $x(v_0)$? f) Describa la forma global de la gráfica de la función $x(v_0)$. *Sugerencia:* Como práctica, podría hacer el inciso b) antes de hacer el inciso a).

51. Cuando los jugadores de beisbol lanzan la pelota desde los jardines, los receptores dejan que rebote una vez antes de llegar al cuadro bajo la teoría de que la pelota llega más rápido de esa forma. Suponga que el ángulo al que una pelota rebotada deja el suelo es el mismo que el ángulo al que el jardinero la lanzó, como se muestra en la figura P4.51, pero la rapidez de la pelota después del rebote es un medio de la que tenía antes del rebote. a) Suponga que la pelota siempre se lanza con la misma rapidez inicial. ¿A qué ángulo θ el jardinero debe lanzar la pelota para hacer que recorra la misma distancia D con un rebote (trayectoria azul) que una bola lanzada hacia arriba a 45.0° sin rebote (trayectoria verde)? b) Determine la relación del intervalo de tiempo para el lanzamiento de un rebote al tiempo de vuelo para el lanzamiento sin rebote.

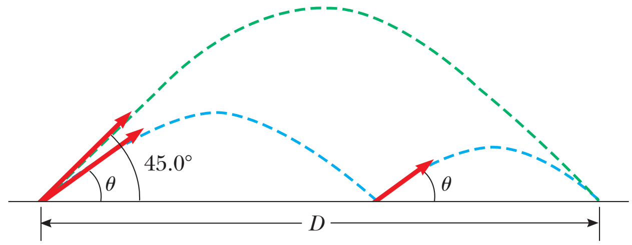


Figura P4.51

52. Una camioneta cargada con melones se detiene súbitamente para evitar caer por el borde de un puente derrumbado (figura P4.52). El repentino frenado hace que algunos melones salgan volando de la camioneta. Un melón rueda sobre el borde con una rapidez inicial de $v_i = 10.0$ m/s en la dirección horizontal. Una sección transversal de la orilla tiene la forma de la mitad inferior de una parábola con su vértice en el extremo del camino y con la ecuación $y^2 = 16x$, donde x y y se miden en metros. ¿Cuáles son las coordenadas x y y del melón cuando revienta en la orilla?

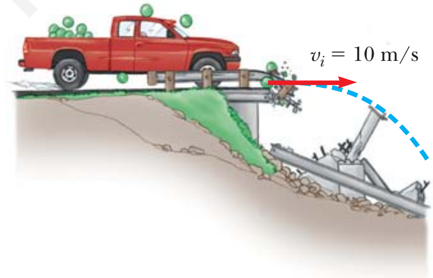


Figura P4.52

53. Su abuelo es copiloto de un bombardero que vuela horizontalmente sobre el nivel del terreno con una rapidez de 275 m/s en relación con el suelo, a una altitud de 3 000 m. a) El bombardero libera una bomba. ¿Cuánto viajará horizontalmente la bomba entre su liberación y su impacto en el suelo? Ignore los efectos de la resistencia del aire. b) Disparos de personas en la tierra incapacitan súbitamente al bombardero antes de que pueda decir "¡Bombas fuera!", en consecuencia, el piloto mantiene el curso original, altitud y rapidez del avión a través de una tormenta de fuego antiaéreo. ¿Dónde estará el avión cuando la bomba golpee el suelo? c) El avión tiene una mira telescópica de bomba de modo que la bomba golpea el blanco visto en la mira en el momento de liberación. ¿A qué ángulo con la vertical estaba el elemento de mira de bomba?

54. Una persona de pie en lo alto de una roca hemisférica de radio R patea una bola (al inicio en reposo en lo alto de la roca) para darle velocidad horizontal $\vec{\mathbf{v}}_i$, como se muestra en la figura P4.54. a) ¿Cuál debe ser su rapidez inicial mínima si la bola nunca debe golpear la roca después de que se patea? b) Con esta rapidez inicial, ¿a qué distancia de la base de la roca la bola golpea el suelo?

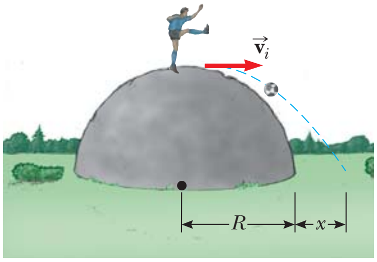


Figura P4.54

55. Un halcón vuela horizontalmente a 10.0 m/s en línea recta, a 200 m sobre el suelo. Un ratón que llevaba en sus garras se libera después de luchar. El halcón continúa en su ruta con la misma rapidez durante 2.00 s antes de intentar recuperar su presa, se clava en línea recta con rapidez constante y recaptura al ratón 3.00 m sobre el suelo. a) Si supone que la resistencia del aire no actúa sobre el ratón, encuentre la rapidez en picada del halcón. b) ¿Qué ángulo formó el halcón con la horizontal durante su descenso? c) ¿Durante cuánto tiempo el ratón "disfrutó" la caída libre?

56. Un decidido coyote está nuevamente en persecución del elusivo correcaminos. El coyote usa un par de patines con ruedas de propulsión, que proporcionan una aceleración horizontal constante de 15.0 m/s^2 (figura P4.56). El coyote parte del reposo a 70.0 m de la orilla de un risco en el instante en que el correcaminos lo pasa en la dirección del risco. a) Si supone que el correcaminos se mueve con rapidez constante, determine la rapidez mínima que debe tener para alcanzar el risco antes que el coyote. En el borde del risco, el correcaminos escapa al hacer un giro repentino, mientras el coyote continúa de frente. Los patines del coyote permanecen horizontales y continúan funcionando mientras el coyote está en vuelo, de modo que su aceleración mientras está en el aire es $(15.0\hat{\mathbf{i}} - 9.80\hat{\mathbf{j}})$ m/s^2. b) El risco está a 100 m sobre el suelo plano de un cañón. Determine dónde aterriza el coyote en el cañón. c) Determine las componentes de la velocidad de impacto del coyote.

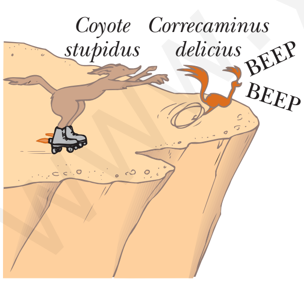


Figura P4.56

57. Un automóvil estacionado en una pendiente pronunciada tiene vista hacia el océano, con un ángulo de 37.0° bajo la horizontal. El negligente conductor deja el automóvil en neutral y el freno de mano está defectuoso. Desde el reposo en $t = 0$, el automóvil rueda por la pendiente con una aceleración constante de 4.00 m/s^2 y recorre 50.0 m hasta el borde de un risco vertical. El risco está 30.0 m arriba del océano. Encuentre: a) la rapidez del automóvil cuando llega al borde del risco y el intervalo de tiempo transcurrido cuando llega ahí, b) la velocidad del automóvil cuando amariza en el océano, c) el intervalo de tiempo total que el automóvil está en movimiento y d) la posición del automóvil cuando cae en el océano, en relación con la base del risco.

58. ● No se lastime; no golpee su mano contra algo. Dentro de estas limitaciones, describa lo que hace para dar a su mano una gran aceleración. Calcule una estimación del orden de magnitud de esta aceleración y establezca las cantidades que mide o estime y sus valores.

59. ● Un esquiador deja una rampa de salto con una velocidad de 10.0 m/s, 15.0° sobre la horizontal, como se muestra en la figura P4.59. La pendiente está inclinada a 50.0° y la resistencia del aire es despreciable. Encuentre a) la distancia desde la rampa hasta donde aterriza el esquiador y b) las componentes de velocidad justo antes de aterrizar. (¿Cómo cree que afectan los resultados si se incluye resistencia del aire? Observe que los esquiadores se inclinan hacia adelante en la forma de un plano aerodinámico, con las manos a los lados, para aumentar su distancia. ¿Por qué funciona este método?)

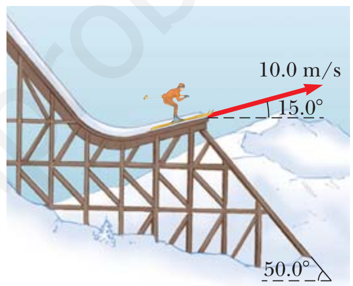


Figura P4.59

60. Un pescador emprende el viaje a contracorriente desde las cascadas Metaline en el río Pend Oreille al noroeste del estado de Washington. Su pequeño bote, impulsado por un motor fuera de borda, viaja con rapidez constante v en aguas tranquilas. El agua circula con rapidez constante v_w menor. Recorre 2.00 km a contracorriente cuando su hielera cae del bote. Se da cuenta de la falta de la hielera sólo después de otros 15 minutos de ir a contracorriente. En ese punto, regresa río abajo, todo el tiempo viajando con la misma rapidez respecto al agua. Alcanza a la hielera justo cuando está próxima a la cascada en el punto de partida. ¿Con qué rapidez se mueven en las aguas del río? Resuelva este problema en dos formas. a) Primero, use la Tierra como marco de referencia. Respecto de la Tierra, el bote viaja a contracorriente con rapidez $v - v_w$ y río abajo a $v + v_w$. b) Una segunda solución mucho más simple y más elegante se obtiene al usar el agua como marco de referencia. Este planteamiento tiene importantes aplicaciones en problemas mucho más complicados; por ejemplo, el cálculo del movimiento de cohetes y satélites y el análisis de la dispersión de partículas subatómicas de objetivos de gran masa.

61. Un barco enemigo está en el lado este de una isla montañosa, como se muestra en la figura P4.61. El barco enemigo maniobra a 2 500 m del pico de una montaña de 1 800 m de alto y dispara proyectiles con una rapidez inicial de 250 m/s. Si la playa oeste está horizontalmente a 300 m del pico, ¿cuáles son las distancias desde la playa oeste a la que un barco puede estar seguro del bombardeo del barco enemigo?

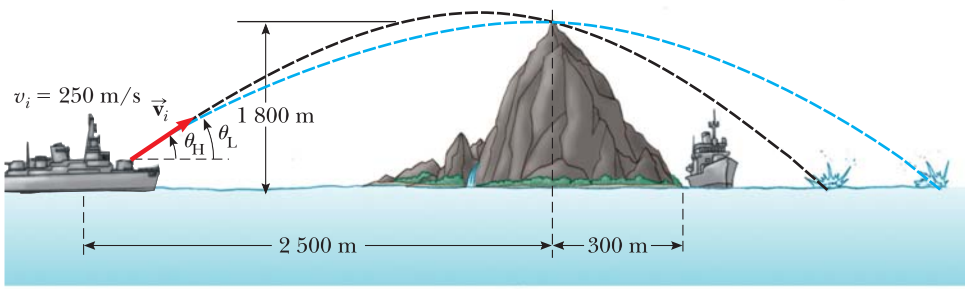


Figura P4.61

62. En la sección **¿Y si...?** del ejemplo 4.5, se afirmó que el intervalo máximo de un esquiador se presenta para un ángulo de lanzamiento θ dado por

$$\theta = 45° - \frac{\phi}{2}$$

donde ϕ es el ángulo que la colina forma con la horizontal en la figura 4.14. Compruebe esta afirmación al derivar esta ecuación.

Respuestas a las preguntas rápidas

4.1 a). Puesto que la aceleración se presenta siempre que la velocidad cambia en cualquier forma (con un aumento o reducción en rapidez, un cambio en dirección o ambos) los tres controles son aceleradores. El acelerador hace que el automóvil aumente rapidez; el freno hace que el auto reduzca rapidez. El volante cambia la dirección del vector velocidad.

4.2 **i)**, b). Sólo en un punto, el pico de la trayectoria, los vectores velocidad y aceleración son mutuamente perpendiculares. El vector velocidad es horizontal en dicho punto, y el vector aceleración es descendente. **ii)**, a). El vector aceleración siempre se dirige hacia abajo. El vector velocidad nunca es vertical y paralelo al vector aceleración si el objeto sigue una trayectoria como la de la figura 4.8.

4.3 15°, 30°, 45°, 60°, 75°. Mientras mayor sea la altura máxima, más tardará el proyectil en alcanzar dicha altitud y luego cae de vuelta desde ella. De este modo, conforme aumenta el ángulo de lanzamiento, el tiempo de vuelo aumenta.

4.4 **i)**, d). Puesto que la aceleración centrípeta es proporcional al cuadrado de la rapidez de la partícula, duplicar la rapidez aumenta la aceleración por un factor de 4. **ii)**, b). El periodo es inversamente proporcional a la rapidez de la partícula.

4.5 **i)**, b). El vector velocidad es tangente a la trayectoria. Si el vector aceleración debe ser paralelo al vector velocidad, también debe ser tangente a la trayectoria, lo que requiere que el vector aceleración no tenga componente perpendicular a la trayectoria. Si la trayectoria no cambia de dirección, el vector aceleración tendrá una componente radial, perpendicular a la trayectoria. En consecuencia, la trayectoria debe permanecer recta. **ii)**, d). Si el vector aceleración debe ser perpendicular al vector velocidad, no debe tener componente tangente a la trayectoria. Por otra parte, si la rapidez está cambiando, *debe* haber una componente de la aceleración tangente a la trayectoria. Por lo tanto, los vectores velocidad y aceleración nunca son perpendiculares en esta situación. Sólo pueden ser perpendiculares si no hay cambio en la rapidez.