

# Ejercicios de Física



## Cinemática

Juan C. Moreno-Marín, Antonio Hernandez      D.F.I.S.T.S.

Escuela Politécnica - Universidad de Alicante

1. Un ciclista marcha por una región donde hay muchas subidas y bajadas. En las cuestas arriba lleva una velocidad constante de 5 km/h y en las cuestas debajo de 20 km/h. Calcular:
- a) ¿Cuál es su velocidad media si las subidas y bajadas tienen la misma longitud?
  - b) ¿Cuál es su velocidad media si emplea el mismo tiempo en las subidas que en las bajadas?
  - c) ¿Cuál es su velocidad media si emplea doble tiempo en las subidas que en las bajadas?

## Cinemática – Movimiento rectilíneo

a) Como es 
$$\bar{v} = \frac{S_{total}}{t_{total}} = \frac{S_{subidas} + S_{bajadas}}{t_{total}} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = 8km/h$$

b) En este caso es 
$$\bar{v} = \frac{S_{total}}{t_{total}} = \frac{v_1t + v_2t}{2t} = \frac{v_1 + v_2}{2} = 12.5km/h$$

c) Y ahora es 
$$\bar{v} = \frac{S_{total}}{t_{total}} = \frac{v_1 2t + v_2 t}{3t} = \frac{2v_1 + v_2}{3} = 10km/h$$

2. Desde el balcón situado a 14.1m sobre el suelo de una calle, lanzamos un cuerpo verticalmente hacia arriba con una velocidad de 10 m/s. Calcular el tiempo que tarda en llegar al suelo.

---

2. Desde el balcón situado a 14.1m sobre el suelo de una calle, lanzamos un cuerpo verticalmente hacia arriba con una velocidad de 10 m/s. Calcular el tiempo que tarda en llegar al suelo.

Tomamos como origen el punto de lanzamiento y sentido positivo hacia arriba:

$$\text{ec gral: } h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$
$$-14.1 = 10t - 9.81t^2$$

Solución:  $t = -0.96s$

$$t = 3s$$

## Cinemática – Lanzamiento de un cuerpo MUA

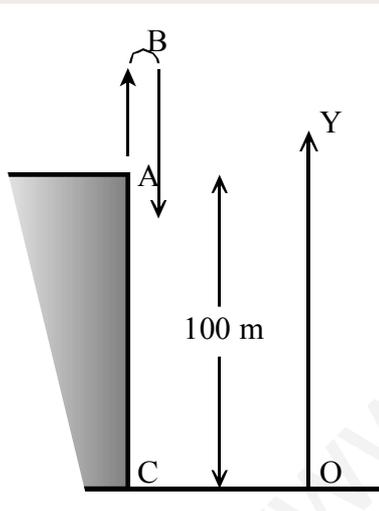
---

3. Se lanza un cuerpo hacia arriba verticalmente con una velocidad de  $98 \text{ m/s}$ , desde el tejado de un edificio de  $100 \text{ m}$  de altura. Determinar:
- (a) La altura máxima que alcanza desde el suelo.
  - (b) El tiempo cuando pasa por el lugar de lanzamiento.
  - (c) La velocidad al llegar al suelo.
  - (d) El tiempo total transcurrido hasta llegar al suelo.
-

## Cinemática – Lanzamiento de un cuerpo MUA

(a)

$$\left. \begin{aligned} v &= v_0 + at \\ e &= e_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left( \begin{array}{l} t_0 = 0 \\ y_0 = 100 \\ v_0 = 98 \end{array} \right) \rightarrow \left. \begin{aligned} v &= 98 - 9.8t \\ y &= 100 + 98t - \frac{1}{2} 9.8t^2 \end{aligned} \right\}$$



En la altura máxima el cuerpo se para,  $v = 0$

$$0 = 98 - 9.8t \rightarrow t = \frac{98}{9.8} = 10s$$

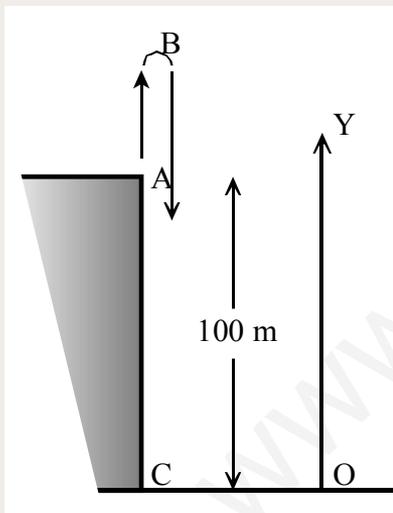
$$y = 100 + 98 \cdot 10 - \frac{1}{2} 9.8 \cdot 10^2 = 590m \rightarrow \boxed{h = 590m}$$

## Cinemática – Lanzamiento de un cuerpo MUA

(b) En el movimiento de caída las ecuaciones son:

$$e = e_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \rightarrow \begin{pmatrix} e_0 = 100 \\ v_0 = 98 \end{pmatrix} \rightarrow 100 = 100 + 98t - \frac{1}{2} 9.8 t^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow t(98 - 4.9t) = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 20s \end{cases}$$

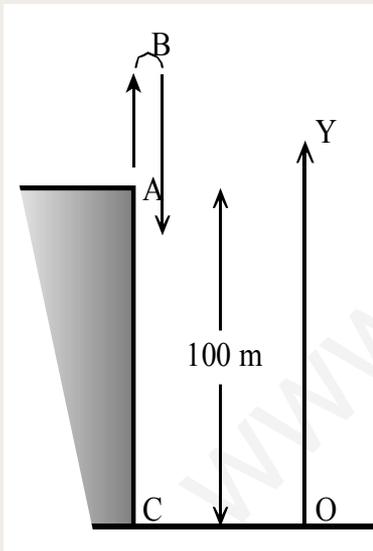


## Cinemática – Lanzamiento de un cuerpo MUA

(c) Al llegar al suelo es:

$$e = e_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \rightarrow \begin{pmatrix} e_0 = 100 \\ v_0 = 98 \end{pmatrix} \rightarrow -100 = 100 + 98t - \frac{1}{2} 9.8 t^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow t = \frac{98 \pm \sqrt{98^2 + 4 \cdot 4.9 \cdot (-100)}}{9.8} = \rightarrow \begin{cases} t = -0.97s \\ t = 20.97s \end{cases}$$



$$v = v_0 + at \rightarrow v = 98 - 9.8 \cdot 20.97 = -107.5 m/s$$

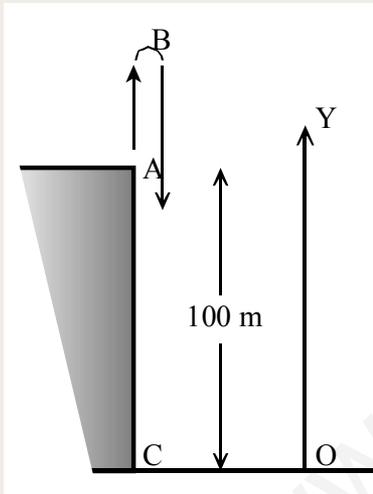
(hacia abajo)

$$v = -107.53 m/s$$

## Cinemática – Lanzamiento de un cuerpo MUA

(d)

El tiempo total es:  $t_{total} = 20.97 \text{ s}$



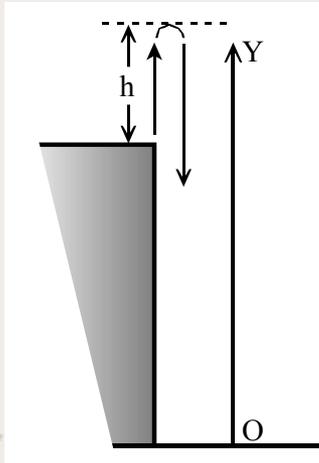
## Cinemática – Lanzamiento de un cuerpo MUA

---

4. Desde lo alto de una torre se lanza verticalmente hacia arriba una piedra con una velocidad inicial de 15 m/s. La piedra llega a una determinada altura y comienza a caer por la parte exterior de la torre. Tomando como origen de coordenadas el punto de lanzamiento, calcular
- (a) la posición y velocidad de la piedra al cabo de 1s y de 4s después de su salida.
  - (b) la velocidad cuando se encuentra a 8m por encima del punto de partida.
  - (c) ¿Cuánto tiempo transcurre desde que se lanzó hasta que vuelve a pasar por dicho punto? Considérese  $g = 10 \text{ m/s}^2$
-

## Cinemática – Lanzamiento de un cuerpo MUA

(a)



posición:

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2; \quad (t = 1s) \rightarrow y_1 = v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = 15 \cdot 1 - \frac{1}{2} 10 \cdot 1^2 = 10m$$

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2; \quad (t = 4s) \rightarrow y_2 = v_0 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 = 15 \cdot 4 - \frac{1}{2} 10 \cdot 4^2 = -20m$$

(el signo – indica que la piedra está por debajo del origen)

velocidad:

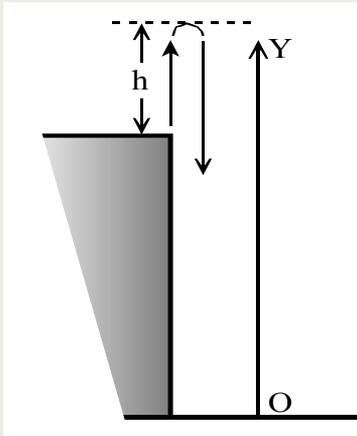
$$v = v_0 - g t; \quad (t = 1s) \rightarrow v_1 = v_0 - g t_1 = 15 - 10 \cdot 1 = 5 m/s$$

$$v = v_0 - g t; \quad (t = 4s) \rightarrow v_2 = v_0 - g t_2 = 15 - 10 \cdot 4 = -25 m/s$$

(el signo – indica que la piedra está cayendo)

## Cinemática – Lanzamiento de un cuerpo MUA

(b) la velocidad cuando se encuentra a 8m por encima del punto de partida.



eliminando  $t$  :

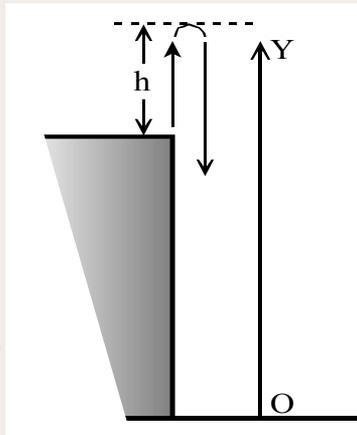
$$\left. \begin{aligned} v &= v_0 - gt \\ y &= v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow t = \frac{v_0 - v}{g} \rightarrow y = v_0 \left( \frac{v_0 - v}{g} \right) - \frac{1}{2} g \left( \frac{v_0 - v}{g} \right)^2$$

$$gy = \frac{v_0^2}{2} - \frac{v^2}{2} \rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - 2gy} \rightarrow (y = 8) \rightarrow$$

$$\rightarrow v = \sqrt{15^2 - 2 \cdot 10 \cdot 8} = \boxed{\pm 8.06 \text{ m/s}}$$

## Cinemática – Lanzamiento de un cuerpo MUA

(c) Cuánto tiempo transcurre desde que se lanzó hasta que vuelve a pasar por dicho punto?



$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow (y = 0) \rightarrow 15t - \frac{1}{2} 10 \cdot t^2 = 0 \rightarrow t = \begin{cases} 0s \\ 3s \end{cases}$$

5. Un cuerpo se mueve a lo largo de una recta de acuerdo con la ley:  $v = t^3 + 4t^2 + 2$ .

Si  $x = 4m$  cuando  $t = 2s$ , encontrar el valor de  $x$  cuando  $t = 3s$ . Encontrar también su aceleración.

---

5. Un cuerpo se mueve a lo largo de una recta de acuerdo con la ley:  $v = t^3 + 4t^2 + 2$ .

Si  $x = 4m$  cuando  $t = 2s$ , encontrar el valor de  $x$  cuando  $t = 3s$ . Encontrar también su aceleración.

---

$$\text{Siendo } v = \frac{dx}{dt} \rightarrow dx = v \cdot dt \rightarrow x - x_0 = \int dx = \int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t v \cdot dt =$$

$$= \int_{t_0}^t (t^3 + 4t^2 + 2) \cdot dt = \frac{t^4}{4} + \frac{4t^3}{3} + 2t - \frac{t_0^4}{4} - \frac{4t_0^3}{3} - 2t_0$$

$$x = x_0 + \frac{t^4}{4} + \frac{4t^3}{3} + 2t - \frac{t_0^4}{4} - \frac{4t_0^3}{3} - 2t_0$$

## Cinemática – Movimiento rectilíneo

$$x = x_0 + \frac{t^4}{4} + \frac{4t^3}{3} + 2t - \frac{t_0^4}{4} - \frac{4t_0^3}{3} - 2t_0$$

Como es  $t_0 = 2s$  y  $x_0 = 4m \rightarrow x(t) = \cancel{4} + \frac{t^4}{4} + \frac{4t^3}{3} + 2t - \frac{2^4}{4} - \frac{4 \cdot 2^3}{3} - 2 \cdot 2$

$$x(t) = \frac{t^4}{4} + \frac{4t^3}{3} + 2t - \frac{44}{3}$$

Por lo tanto es  $x(t = 3s) = \frac{81}{4} + \frac{4 \cdot 27}{3} + 2 \cdot 3 - \frac{44}{3} = 47.6m$

## Cinemática – Movimiento rectilíneo

---

$$x = x_0 + \frac{t^4}{4} + \frac{4t^3}{3} + 2t - \frac{t_0^4}{4} - \frac{4t_0^3}{3} - 2t_0$$

La aceleración del cuerpo es

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(t^3 + 4t^2 + 2)}{dt} = 3t^2 + 8t \rightarrow a(t = 3s) = 27 + 24 = 51 \text{ m/s}^2$$

---

6. Un punto se mueve en el plano XY de tal manera que es  $v_x = 4t^3 + 4t$ ,  $v_y = 4t$ .

Si la posición es (1, 2) cuando es  $t=0$ , encontrar la ecuación cartesiana de la trayectoria.

---

6. Un punto se mueve en el plano XY de tal manera que es  $v_x = 4t^3 + 4t$ ,  $v_y = 4t$ .

Si la posición es (1, 2) cuando es  $t=0$ , encontrar la ecuación cartesiana de la trayectoria.

**Posición: componente  $x$**

$$\text{Siendo } v_x = \frac{dx}{dt} = 4t^3 + 4t \rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t (4t^3 + 4t) dt$$

$$\rightarrow x = x_0 + t^4 + 2t^2 - t_0^4 - 2t_0^2$$

Sustituyendo  $x_0 = 1$  cuando  $t = 0$  s

$$\rightarrow x = 1 + t^4 + 2t^2 = \boxed{(t^2 + 1)^2}$$

## Cinemática – Composición de movimientos

Posición: componente  $y$

$$\text{Siendo } v_y = \frac{dy}{dt} = 4t \quad \rightarrow \quad \int_{y_0}^y dy = \int_{t_0}^t 4t dt$$

$$\rightarrow y = y_0 + 2t^2 - 2t_0^2$$

Sustituyendo  $y_0 = 2$  cuando  $t = 0$  s

$$\rightarrow y = 2 + 2t^2 = \boxed{2(t^2 + 1)}$$

## Cinemática – Composición de movimientos

---

Eliminando el tiempo se obtiene la ecuación de la trayectoria:

$$\left. \begin{array}{l} x = (t^2 + 1)^2 \\ y = 2(t^2 + 1) \end{array} \right\} \rightarrow x = \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{y^2}{4} \rightarrow \boxed{y^2 = 4x}$$

ec. de la trayectoria

7. Un móvil describe una trayectoria dada por las ecuaciones  $x = pt$  e  $y = \frac{1}{2}pt^2$ . Determinar:
- (a) Velocidad y aceleración del móvil.
  - (b) Componentes tangencial y normal de la aceleración.
  - (c) Radio de curvatura.
-

7. Un móvil describe una trayectoria dada por las ecuaciones  $x = pt$  e  $y = \frac{1}{2}pt^2$ . Determinar:

(a) Velocidad y aceleración del móvil.

(b) Componentes tangencial y normal de la aceleración.

(c) Radio de curvatura.

---

(a) 
$$v_x = \frac{dx}{dt} = p; \quad a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0;$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = pt; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = p;$$

Luego  $\rightarrow \boxed{\mathbf{v} = pi + ptj} \rightarrow \boxed{\mathbf{a} = pj}$

## Cinemática – Composición de movimientos

(b)

$$a_T = \frac{d|\mathbf{v}|}{dt} \equiv \frac{dv}{dt} = \left( v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = p\sqrt{1+t^2} \right) = \frac{pt}{\sqrt{1+t^2}};$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{0 + p^2} = p;$$

$$a = \sqrt{a_N^2 + a_T^2} \rightarrow a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{p^2 - \frac{p^2 t^2}{1+t^2}} = \frac{p}{\sqrt{1+t^2}};$$

## Cinemática – Composición de movimientos

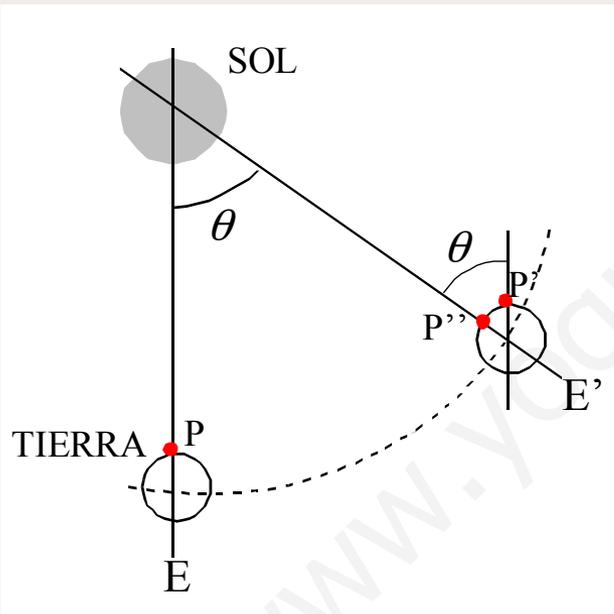
---

(c)

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} = \frac{p}{\sqrt{1+t^2}}; \quad \rightarrow \quad \rho = \frac{p^2(1+t^2)}{p} \sqrt{1+t^2} = p(1+t^2)^{\frac{3}{2}};$$

El radio de curvatura  $\rho$  depende del tiempo.

8. Encontrar la velocidad angular de la Tierra con respecto a su eje diametral.



$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \text{uniforme} \rightarrow \omega = \frac{\theta}{t} \rightarrow \left( \begin{array}{l} \theta = 2\pi \text{ rad} \\ t = 1 \text{ dia} = 86400 \text{ s} \end{array} \right) \rightarrow$$

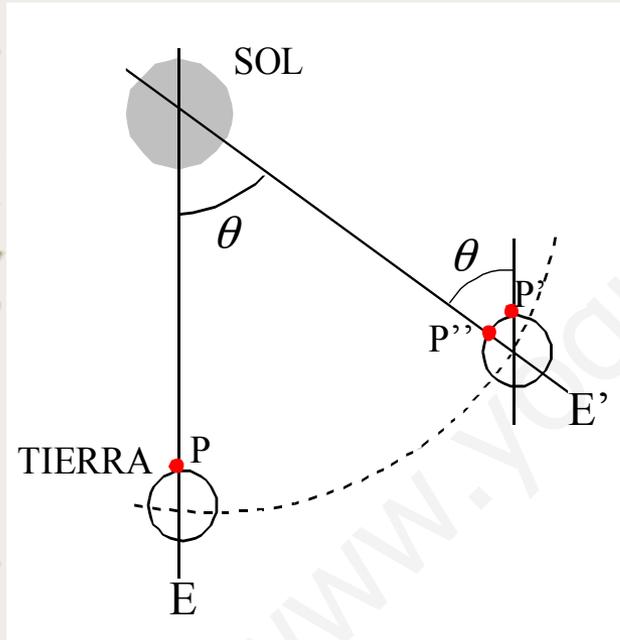
$$\rightarrow \omega = \frac{2\pi}{86400} = 7.27 \cdot 10^{-5} \text{ rad / s}$$

pero este resultado no es completamente correcto.

## Cinemática – Movimiento circular

Pero este resultado no es completamente correcto. Cuando la Tierra da una vuelta completa sobre su eje, está en P' y para completar un día hay que girar de P' a P'', falta todavía un ángulo  $\theta$ .

En un día recorrerá un ángulo  $2\pi + \theta = 2\pi + (2\pi/365)$ ,



$$\omega = \frac{2\pi + \theta}{86400} = \frac{2\pi + \frac{2\pi}{365}}{86400} = \boxed{7.292 \cdot 10^{-5} \text{ rad / s}}$$

## Cinemática – Movimiento circular

---

9. Un volante gira en torno a su eje a razón de 3000 r.p.m. Un freno lo para en 20s.
- (a) Calcular la aceleración angular, supuesta constante, y el número de vueltas hasta que el volante se detiene.
  - (b) Supuesto que el volante tiene 20 cm de diámetro, calcular las aceleraciones tangencial y centrípeta de un punto de su periferia una vez dadas 100 vueltas y la aceleración resultante en tal punto.
-

## Cinemática – Movimiento circular

- (a) Calcular la aceleración angular, supuesta constante, y el número de vueltas hasta que el volante se detiene.

La velocidad angular es:  $\omega = 3000 \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = 100\pi \text{ rad/s}$

Y la aceleración es:

$$\omega_f = \omega_0 - \alpha t \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{\omega_0 - \omega_f}{t} = \frac{100\pi - 0}{20 \text{ s}} = \boxed{5\pi \text{ rad/s}^2}$$

El desplazamiento angular resulta:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t - \frac{1}{2} \alpha t^2 = 100\pi \cdot 20 - \frac{1}{2} 5\pi \cdot 20^2 = 1000\pi \text{ rad}$$

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{1000\pi}{2\pi} = \boxed{500 \text{ vueltas}}$$

## Cinemática – Movimiento circular

- (b) calcular las aceleraciones tangencial y centrípeta de un punto de su periferia una vez dadas 100 vueltas y la aceleración resultante en tal punto.

El desplazamiento angular es:  $\varphi = n \cdot 2\pi = 100 \cdot 2\pi = 200\pi \text{ rad}$

Calculamos el tiempo transcurrido:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t - \frac{1}{2} \alpha t^2 = 100\pi \cdot t - \frac{1}{2} 5\pi \cdot t^2 = 200\pi \text{ rad}$$

$$\rightarrow 2.5t^2 - 100t + 200 = 0 \quad \rightarrow \quad t = \begin{cases} 37.86s \\ \boxed{2.14s} \end{cases}$$

## Cinemática – Movimiento circular

- (b) calcular las aceleraciones tangencial y centrípeta de un punto de su periferia una vez dadas 100 vueltas y la aceleración resultante en tal punto.

La aceleración tangencial es:  $a_T = \alpha \cdot R = 5\pi \cdot 0.1 = 0.5\pi \text{ m/s}^2$

La aceleración normal es:

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \omega_{100}^2 \cdot R = (100\pi - 5\pi \cdot 2.14)^2 \cdot 0.1 = 797.5\pi^2 \text{ m/s}^2$$

Y la aceleración resultante:

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{0.25\pi^2 + 797.5^2 \pi^4} = 2505.4\pi \text{ m/s}^2$$

## Cinemática – Movimiento circular

---

10. Un punto material describe uniformemente una trayectoria circular de 1m de radio, dando 30 vueltas cada minuto. Calcular el periodo, la frecuencia, la velocidad angular, la velocidad tangencial, y la aceleración centrípeta.

## Cinemática – Movimiento circular

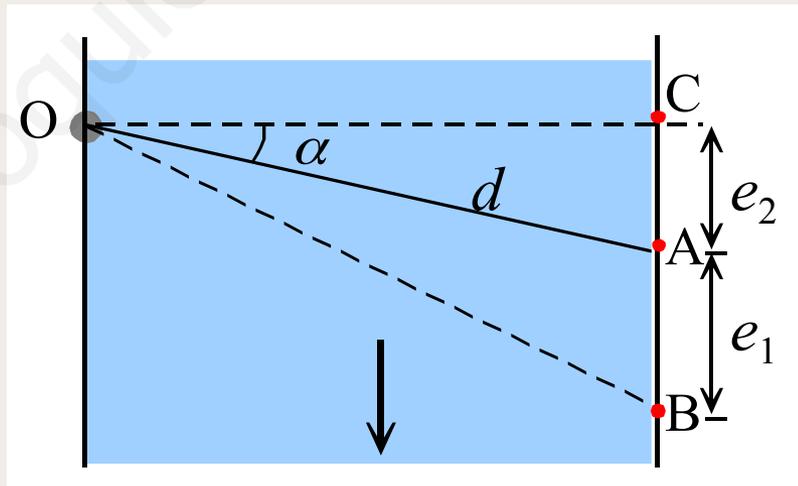
---

**11.** Un vehículo parte del reposo en una vía circular de 400m de radio y se mueve con movimiento uniformemente acelerado, hasta que a los 50s. de iniciar su marcha alcanza la velocidad de 72km/h, desde cuyo momento conserva tal velocidad. Hallar:

- a) Aceleración tangencial en la primera etapa.
  - b) Aceleración normal, aceleración total y longitud recorrida en ese tiempo (50s.)
  - c) Velocidad angular media y velocidad angular a los 50s.
  - d) Tiempo que tardará en dar 100 vueltas al circuito.
-

12. Se quiere cruzar un río de 26 m de ancho con una barca para llegar a la orilla opuesta en un punto situado a 60 m aguas abajo en 15 s. Calcular la dirección y la velocidad de la barca si la velocidad del agua del río es de 3 m/s.

La barca tiene que dirigirse a un punto A para que al ser arrastada por el agua llegue al punto B (a 60 m).



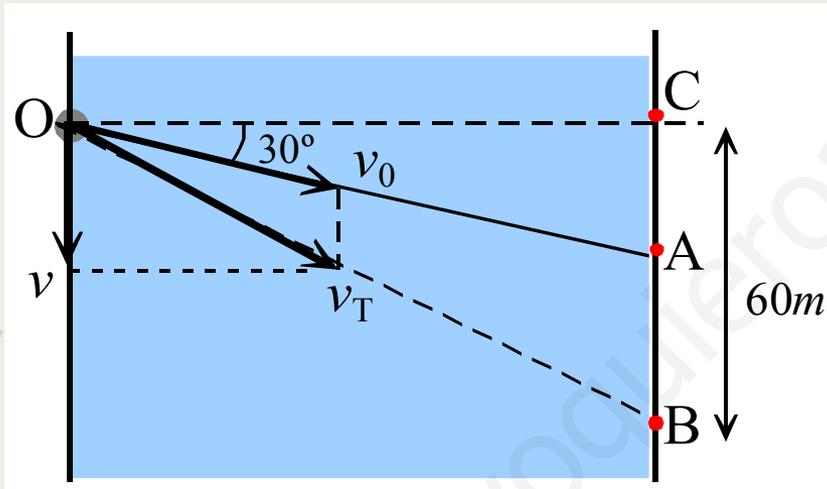
12. Se quiere cruzar un río de 26 m de ancho con una barca para llegar a la orilla opuesta en un punto situado a 60 m aguas abajo en 15 s. Calcular la dirección y la velocidad de la barca si la velocidad del agua del río es de 3 m/s.

La distancia A-B es:  $e_1 = v \cdot t = 3 \text{ m/s} \cdot 15 \text{ s} = 45 \text{ m}$

La distancia complementaria es:  $e_2 = 60 \text{ m} - 45 \text{ m} = 15 \text{ m}$

Y el ángulo con la horizontal:  $\alpha = \text{tg}^{-1} \left( \frac{e_2}{OC} \right) = \text{tg}^{-1} \left( \frac{15}{26} \right) = 30^\circ$

## Cinemática – Composición de movimientos



La distancia OA será:

$$d = \frac{e_2}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{15}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{15}{1/2} = 30m$$

Y por lo tanto la velocidad de la barca:

$$v = \frac{d}{t} = \frac{30m}{15s} = \boxed{2m/s}$$

## Cinemática – Composición de movimientos

De otra forma:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} \\ v_0 = v_0 \cos \alpha \mathbf{i} + v_0 \operatorname{sen} \alpha \mathbf{j} \\ \mathbf{r} \\ v = v \mathbf{j} \end{aligned} \right\} \mathbf{u}_T = \mathbf{u} + \mathbf{v} = v_0 \cos \alpha \mathbf{i} + (v_0 \operatorname{sen} \alpha + v) \mathbf{j}$$

$\underbrace{\quad}_{v_x} \qquad \underbrace{\quad}_{v_y}$

Integrando, y teniendo en cuenta que  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  :

$$\left. \begin{aligned} x = v_0 \cos \alpha \cdot t \\ y = (v_0 \operatorname{sen} \alpha + v) \cdot t \end{aligned} \right\} \left( \begin{array}{l} v = 3 \text{ m/s} \\ x = 26 \text{ m}, y = 60 \text{ m} \\ t = 15 \text{ s} \end{array} \right)$$

$$v_0 = \frac{x}{\cos \alpha \cdot t} \rightarrow y = \left( \frac{x}{\cos \alpha \cdot t} \operatorname{sen} \alpha + v \right) \cdot t$$

## Cinemática – Composición de movimientos

---

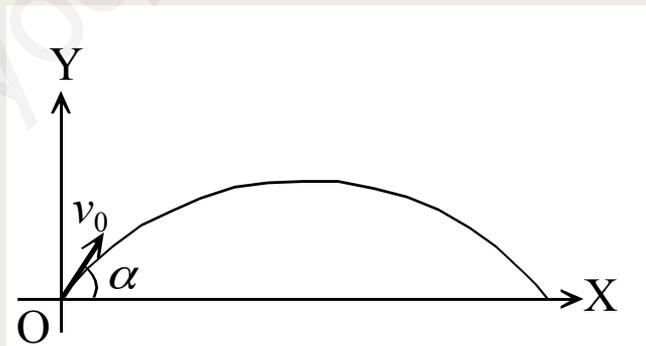
$$v_0 = \frac{x}{\cos \alpha \cdot t} \rightarrow y = \left( \frac{x}{\cos \alpha \cdot t} \operatorname{sen} \alpha + v \right) \cdot t$$

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha + vt \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{y - vt}{x} = \frac{60 - 3 \cdot 15}{26} = \frac{15}{26}$$

$$\rightarrow \alpha = 30^\circ; \quad v_0 = \frac{x}{\cos 30^\circ \cdot t} = \frac{26}{\cos 30^\circ \cdot 15} = \boxed{2 \text{ m/s}}$$

## Cinemática – Composición de movimientos

13. Un cañón dispara una bala con una velocidad de 200 m/s formando un ángulo de  $40^\circ$  con la horizontal.
- a) Encontrar la velocidad y la posición de la bala después de 20s.
- b) Encontrar también el alcance y el tiempo necesario para que la bala retorne a tierra.



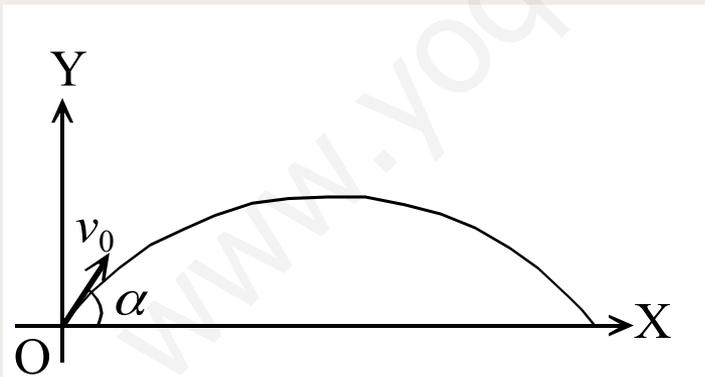
## Cinemática – Composición de movimientos

**13.** Un cañón dispara una bala con una velocidad de 200 m/s formando un ángulo de  $40^\circ$  con la horizontal.

**a)** Encontrar la velocidad y la posición de la bala después de 20s.

**b)** Encontrar también el alcance y el tiempo necesario para que la bala retorne a tierra.

**a)**



$$v_0 = 200 \text{ m/s}; \quad \alpha = 40^\circ;$$

$$\begin{cases} v_{0X} = 200 \cos 40^\circ = 153.2 \text{ m/s}; \\ v_{0Y} = 200 \sin 40^\circ = 128.6 \text{ m/s} \end{cases}$$

## Cinemática – Composición de movimientos

$$\begin{cases} v_X = v_{0X} = 200 \cos 40^\circ = 153.2 \text{ m/s}; \\ v_Y = v_{0Y} - gt = 128.6 - 9.81 \cdot t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 153.2 \cdot t \\ y = 128.6 \cdot t - 4.9 \cdot t^2 \end{cases}$$

Después de  $t = 20\text{s}$ , la velocidad y la posición de la bala son:

$$\begin{cases} v_{X(t=20)} = 153.2 \text{ m/s}; \\ v_{Y(t=20)} = 128.6 - 9.81 \cdot 20 = -67.4 \text{ m/s}; \end{cases}$$

$$x_{(t=20)} = 153.2 \cdot 20 = 3064 \text{ m};$$

$$y_{(t=20)} = 128.6 \cdot 20 - 4.9 \cdot 20^2 = 612 \text{ m};$$

## Cinemática – Composición de movimientos

---

$$\vec{v} = (153.2, -67.4) \text{ m/s}$$

$$\vec{r} = (3064, 612) \text{ m}$$

b)

Cuando la bala vuelve a tierra, es  $y=0$ :

$$\textit{Tiempo de vuelo} : y = 0 = 128.6 \cdot t - 4.9 \cdot t^2 \quad \rightarrow \quad t = \frac{128.6}{4.9} = 26.24 \text{ s}$$

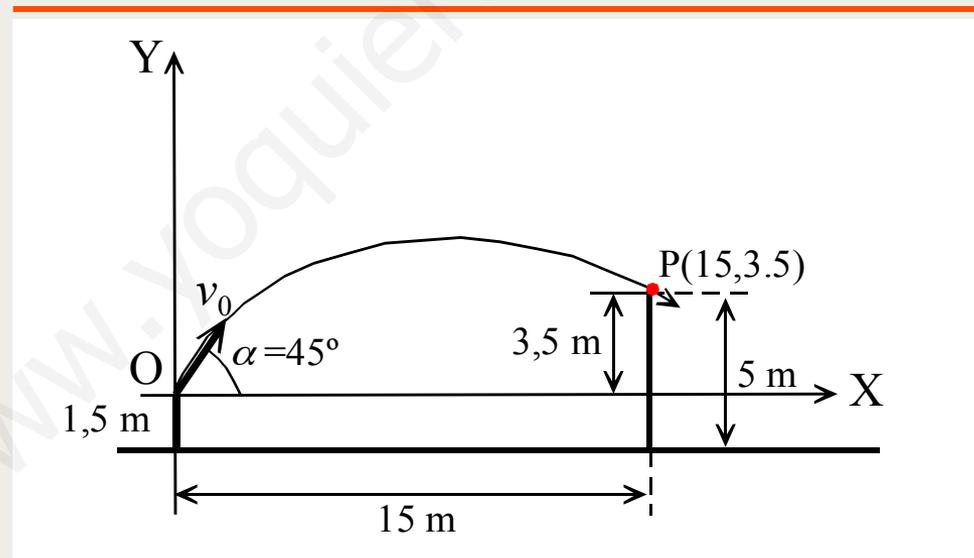
$$\textit{Alcance} : x = 153.2 \cdot 26.24 = 4020 \text{ m}$$

14. Un muchacho de 1.5m de altura y que está parado a 15m de distancia de un muro de 5m de altura, lanza una piedra bajo un ángulo de  $45^\circ$  con respecto a la horizontal ¿Con qué velocidad mínima debe lanzar la piedra para que ésta pase por encima del muro?

---

## Cinemática – Composición de movimientos

14. Un muchacho de 1.5m de altura y que está parado a 15m de distancia de un muro de 5m de altura, lanza una piedra bajo un ángulo de  $45^\circ$  con respecto a la horizontal ¿Con qué velocidad mínima debe lanzar la piedra para que ésta pase por encima del muro?



## Cinemática – Composición de movimientos

---

$$\begin{cases} y = v_{0Y} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 = v_0 \operatorname{sen} \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \\ x = v_{0X} \cdot t = v_0 \cos \alpha \cdot t \end{cases}$$

La piedra tiene que pasar por el punto P(15,3.5)

$$\begin{cases} 3.5 = v_{0Y} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 = v_0 \operatorname{sen} 45^\circ \cdot t - 4.9 \cdot t^2 \\ 15 = v_{0X} \cdot t = v_0 \cos 45^\circ \cdot t \end{cases}$$

## Cinemática – Composición de movimientos

$$15 = v_0 \cos 45^\circ \cdot t \quad \rightarrow \quad t = \frac{15}{v_0 \cos 45^\circ}$$

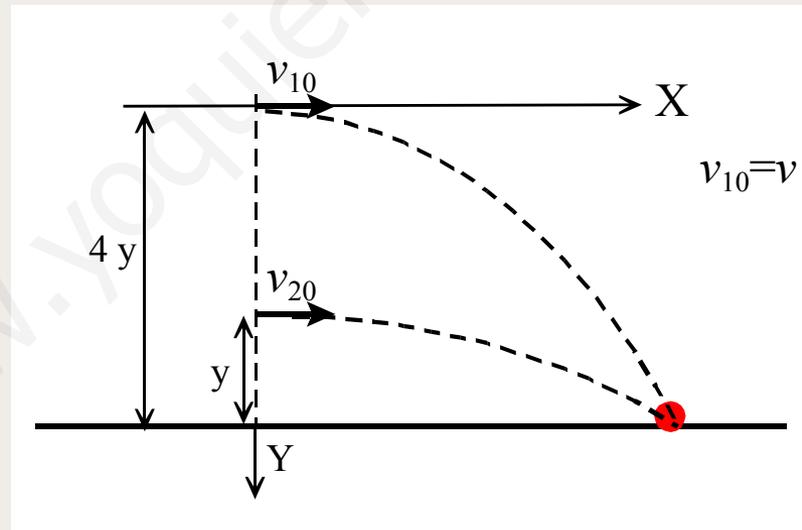
$$3.5 = v_0 \sin 45^\circ \cdot t - 4.9 \cdot t^2 = \frac{\cancel{v_0 \sin 45^\circ} \cdot 15}{\cancel{v_0 \cos 45^\circ}} - 4.9 \cdot \left( \frac{15}{v_0 \cos 45^\circ} \right)^2 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow v_0^2 = \frac{2205}{11.5} \quad \rightarrow \quad v_0 = 13.8 \text{ m/s}$$

**15.** Dos aviones están situados sobre la misma vertical, siendo la altura de uno de ellos sobre el suelo cuatro veces la del otro. Ambos pretenden bombardear el mismo objetivo, siendo la velocidad del mas alto  $v$  ¿qué velocidad debería llevar el mas bajo?

---

15. Dos aviones están situados sobre la misma vertical, siendo la altura de uno de ellos sobre el suelo cuatro veces la del otro. Ambos pretenden bombardear el mismo objetivo, siendo la velocidad del mas alto  $v$  ¿qué velocidad debería llevar el mas bajo?



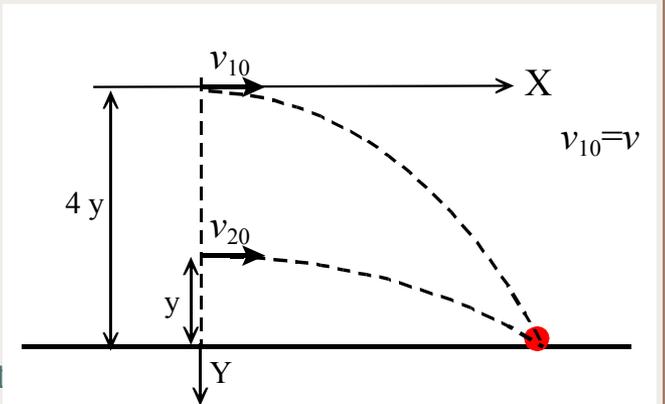
## Cinemática – Composición de movimientos

Ecuaciones del avión 1:

$$\left. \begin{array}{l} v_{1x} = v_{10} \rightarrow x = v_{10} \cdot t = v \cdot t \\ v_{1y} = g \cdot t \rightarrow 4y = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{array} \right\} \rightarrow 4y = \frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{v^2}$$

Ecuaciones del avión 2:

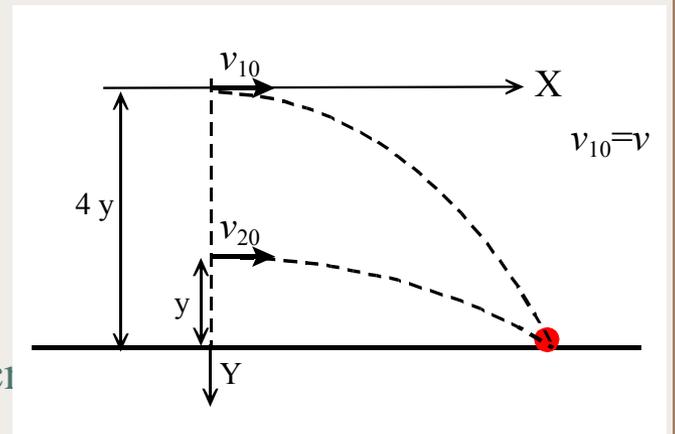
$$\left. \begin{array}{l} v_{2x} = v_{20} \rightarrow x = v_{20} \cdot t' \\ v_{2y} = g \cdot t' \rightarrow y = \frac{1}{2} g \cdot t'^2 \end{array} \right\} \rightarrow y = \frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{v_{20}^2}$$



## Cinemática – Composición de movimientos

$$\frac{4y}{y} = \frac{\frac{1}{2}g \cdot \frac{x^2}{v^2}}{\frac{1}{2}g \cdot \frac{x^2}{v_{20}^2}} \rightarrow 4 = \frac{v_{20}^2}{v^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow v_{20}^2 = 4v^2 \rightarrow v_{20} = 2v$$

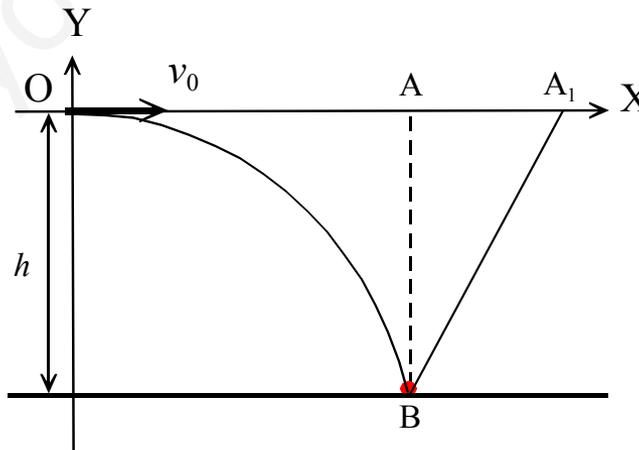


**16.** Un avión vuela horizontalmente con una velocidad de  $720 \text{ km/h}$  y su altura sobre el suelo es de  $7840 \text{ m}$ . Desde el avión se suelta una bomba que hace explosión al llegar al suelo. Calcular:

- a) Velocidad de la bomba al llegar al suelo.
  - b) Distancia horizontal recorrida por la bomba.
  - c) Tiempo transcurrido desde que se lanza la bomba hasta que se percibe, en el avión, la explosión.
-

16. Un avión vuela horizontalmente con una velocidad de  $720 \text{ km/h}$  y su altura sobre el suelo es de  $7840 \text{ m}$ . Desde el avión se suelta una bomba que hace explosión al llegar al suelo. Calcular:

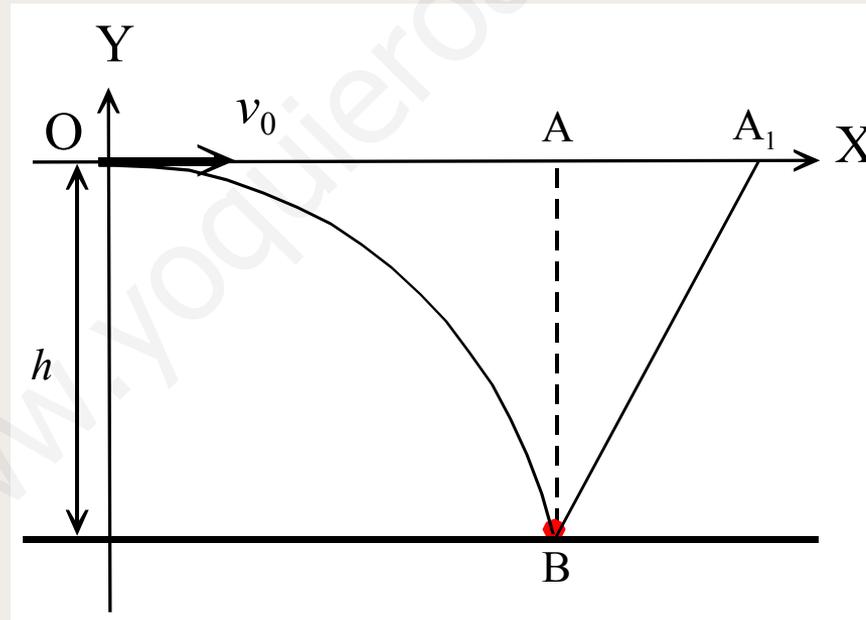
- Velocidad de la bomba al llegar al suelo.
- Distancia horizontal recorrida por la bomba.
- Tiempo transcurrido desde que se lanza la bomba hasta que se percibe, en el avión, la explosión.



## Cinemática – Composición de movimientos

a) La velocidad de la bomba al llegar al suelo es:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \left[ \begin{array}{l} v_x = \frac{720000}{3600} = 200 \\ v_y = \sqrt{2gh} \end{array} \right] \rightarrow v = \sqrt{200^2 + 2gh} = \sqrt{200^2 + 2 \cdot 9.8 \cdot 7840} = 440 \text{ m/s}$$



## Cinemática – Composición de movimientos

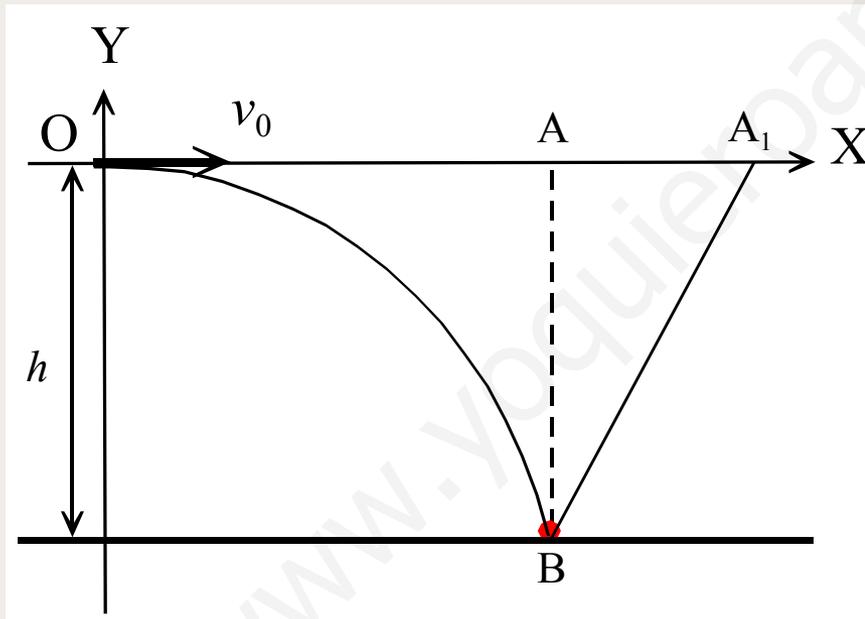
b) Las ecuaciones del movimiento son:

$$\left. \begin{array}{l} x = 200 \cdot t \\ y = \frac{1}{2} 9.8 \cdot t^2 \end{array} \right\} \rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{9.8}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7840}{9.8}} = 40s$$

$$x = 200 \cdot t = 200 \cdot 40 = 8000 m$$

## Cinemática – Composición de movimientos

- c) En el momento de la explosión el avión se encuentra en el punto  $A$ , pero cuando reciba el sonido de la explosión se encontrará en  $A_1$ :



$$\overline{BA_1}^2 - \overline{AA_1}^2 = \overline{AB}^2$$

$$(v_{\text{sonido}} = 340 \text{ m/s})$$

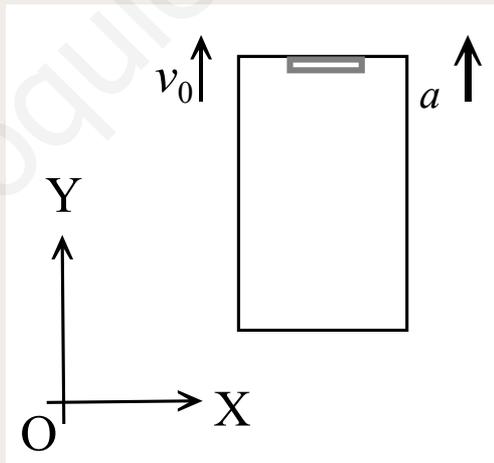
$$\rightarrow 340^2 t^2 - 200^2 t^2 = 7840^2$$

$$t = \frac{7840}{\sqrt{340^2 - 200^2}} = 28.5 \text{ s}$$

$$T = 40 \text{ s} + 28.5 \text{ s} = \boxed{68.5 \text{ s}}$$

## Cinemática – Composición de movimientos

17. La cabina de un ascensor de 3m de altura asciende con una aceleración de  $1\text{m/s}^2$ . Cuando el ascensor se encuentra a una cierta altura del suelo, se desprende la lámpara del techo. Calcular el tiempo que tarda la lámpara en chocar con el suelo del ascensor.



17. La cabina de un ascensor de 3m de altura asciende con una aceleración de  $1\text{m/s}^2$ . Cuando el ascensor se encuentra a una cierta altura del suelo, se desprende la lámpara del techo. Calcular el tiempo que tarda la lámpara en chocar con el suelo del ascensor.

---

La posición del suelo del ascensor es:  $y = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

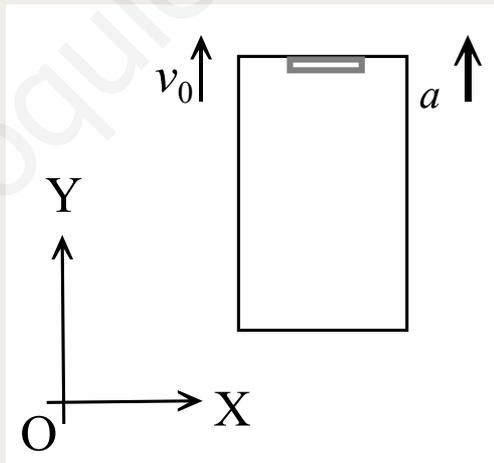
La posición de la lámpara es:  $y' = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

## Cinemática – Composición de movimientos

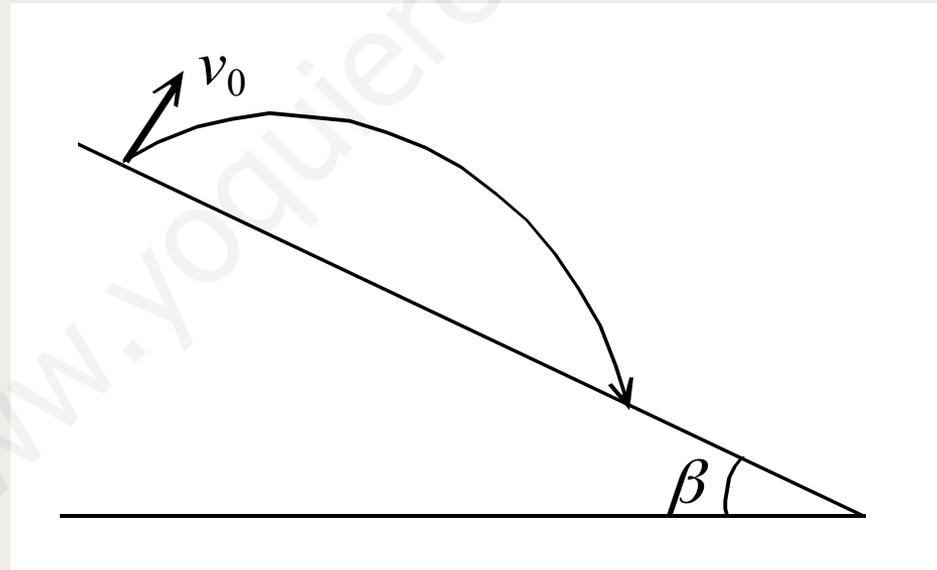
Choca con el suelo cuando el suelo recorre 3 m más que la lámpara:

$$v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + 3$$

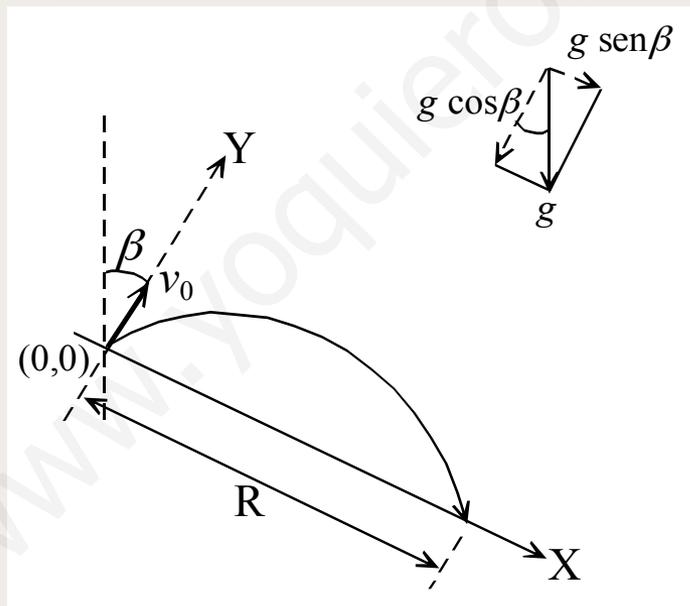
$$\rightarrow t^2 = 2 \left( \frac{3}{a+g} \right) \rightarrow t = \sqrt{\frac{6}{10.8}} = \boxed{0.745 \text{ s}}$$



18. Desde un plano inclinado con un ángulo  $\beta$  se lanza una piedra con velocidad inicial  $v_0$  perpendicularmente al plano. ¿A qué distancia del punto de lanzamiento cae la piedra?



18. Desde un plano inclinado con un ángulo  $\beta$  se lanza una piedra con velocidad inicial  $v_0$  perpendicularmente al plano. ¿A qué distancia del punto de lanzamiento cae la piedra?



Sobre la piedra actúa la aceleración de la gravedad  $g$

## Cinemática – Composición de movimientos

$$\left. \begin{array}{l} \text{(ejeX)} \quad v_X = g \operatorname{sen} \beta \cdot t \\ \text{(ejeY)} \quad v_Y = v_0 - g \cos \beta \cdot t \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} g \operatorname{sen} \beta \cdot t^2 \\ y = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cos \beta \cdot t^2 \end{array}$$

La piedra vuelve al plano inclinado cuando es  $y = 0$

$$0 = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cos \beta \cdot t^2 \rightarrow t = \frac{2v_0}{g \cos \beta} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{1}{2} g \operatorname{sen} \beta \cdot \left( \frac{2v_0}{g \cos \beta} \right)^2 = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen} \beta}{g \cos^2 \beta}$$

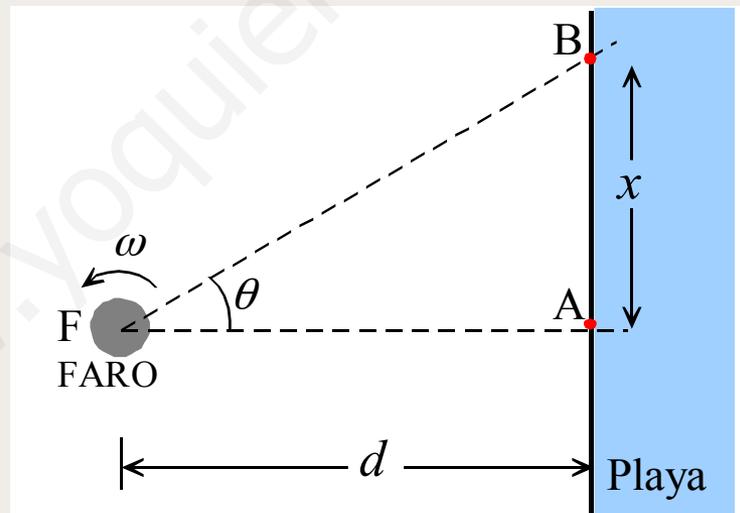
Distancia del punto  
de lanzamiento

**19.** La velocidad de rotación de un faro luminoso es constante e igual a  $\omega$ . El faro está situado a una distancia  $d$  de una playa completamente recta. Calcular la velocidad y aceleración con que se desplaza el punto luminoso sobre la playa cuando el ángulo que forman  $d$  y el rayo luminoso es  $\theta$ .

---

## Cinemática – Movimiento circular

19. La velocidad de rotación de un faro luminoso es constante e igual a  $\omega$ . El faro está situado a una distancia  $d$  de una playa completamente recta. Calcular la velocidad y aceleración con que se desplaza el punto luminoso sobre la playa cuando el ángulo que forman la normal  $d$  y el rayo luminoso es  $\theta$ .



## Cinemática – Movimiento circular

Cuando el faro ha girado un ángulo  $\theta$ , el punto luminoso ha recorrido sobre la playa la distancia  $x$  :

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{x}{d} \rightarrow x = d \operatorname{tg}\theta$$

La velocidad del punto será:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(d \cdot \operatorname{tg}\theta)}{dt} = d \cdot \frac{d(\operatorname{tg}\theta)}{dt} = d \cdot \frac{d(\operatorname{tg}\theta)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = d \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} \omega = \frac{\omega \cdot d}{\cos^2 \theta}$$

La aceleración será:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\omega \cdot d}{\cos^2 \theta} \right) = \omega \cdot d \cdot \frac{d(1/\cos^2 \theta)}{dt} = \omega \cdot d \cdot \frac{d(1/\cos^2 \theta)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{\omega^2 \cdot d \cdot 2\operatorname{sen}\theta}{\cos^3 \theta}$$

## Cinemática – Movimiento circular

---

**20.** Determinar la función horaria de un móvil que recorre una trayectoria circular con velocidad y aceleración tangencial iguales en todo instante, sabiendo que la aceleración es unitaria en el instante inicial.

---

**20.** Determinar la función horaria de un móvil que recorre una trayectoria circular con velocidad y aceleración tangencial iguales en todo instante, sabiendo que la aceleración es unitaria en el instante inicial.

---

Velocidad y aceleración iguales:

$$a_T = v \rightarrow \frac{dv}{dt} = v \Leftrightarrow \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \rightarrow \frac{dv}{ds} v = v$$

$$\frac{dv}{ds} = 1 \rightarrow dv = ds \rightarrow v = s + k, \quad k = cte$$

$$\frac{ds}{dt} = s + k \rightarrow \frac{ds}{s + k} = dt \rightarrow t = \int \frac{ds}{s + k} = \ln(s + k) - \ln(c), \quad c = cte$$

## Cinemática – Movimiento circular

$$t + \ln(c) = \ln(s + k) \rightarrow \ln(c \cdot e^t) = \ln(s + k) \rightarrow c \cdot e^t = s + k$$

Siendo  $s = 0$  cuando  $t = 0$ , resulta:  $\rightarrow c = k \rightarrow s = k(e^t - 1)$

Y como es  $v = s + k \rightarrow v = k \cdot e^t$

La aceleración unitaria permite obtener el valor de la cte  $k$ :

$$a^2 = a_T^2 + a_N^2 = \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2 \rightarrow \text{en } t = 0 \rightarrow v = k; \frac{dv}{dt} = k;$$

$$1 = k^2 + \frac{k^4}{R^2} \rightarrow \text{ec bicuadr} \rightarrow k = \left[ \frac{R^2}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{4}{R^2}} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

## Cinemática – Movimiento circular

---

La función horaria  $s(t)$  obtenida es:

$$s = s(t) = k(e^t - 1) = \left[ \frac{R^2}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{4}{R^2}} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} (e^t - 1)$$