Apuntes de Mecánica Newtoniana
Cinemática de la Partícula

Ariel Fernández
Daniel Marta

Introducción.

En este capítulo se introducirán los elementos necesarios para la descripción del movimiento de una partícula en el espacio. Llamaremos partícula a cualquier objeto cuyas dimensiones características sean mucho menores que las distancias que recorre en su trayectoria, y lo representaremos mediante un punto.

1. Conceptos preliminares.

1.1. Posición, ley horaria y trayectoria.

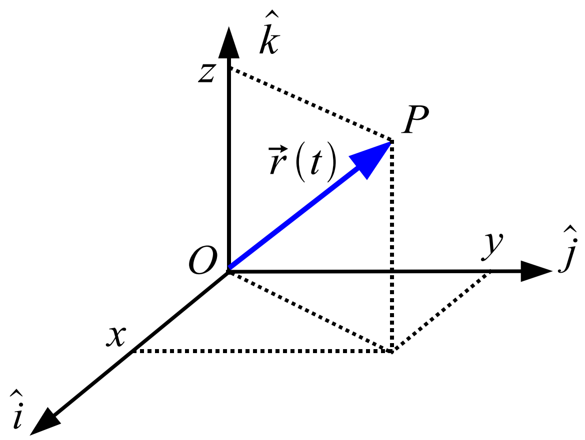

Figura 1: Vector posición en coordenadas cartesianas.

La *posición* de una partícula en un instante de tiempo t se describirá por un vector $\vec{r}(t)$ que va del origen de coordenadas (O) al punto (P) que ocupa la partícula en dicho instante (ver figura 1):

$$\vec{r}(t) = P - O$$

Introduciendo un *sistema de coordenadas* podemos caracterizar a la posición mediante un conjunto de magnitudes bien definidas; en el caso de elegir un sistema cartesiano ortonormal, estas magnitudes ($\{x, y, z\}$) corresponderán al producto escalar ($\cdot$) del vector posición con los versores del sistema de coordenadas:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}, \quad x(t) = \vec{r}(t) \cdot \hat{\imath}, \qquad \text{etc.}$$

Una descripción correcta del movimiento de la partícula en el espacio se da en términos de su *ley horaria*, es decir, el valor de las componentes del vector posición (en este caso $\{x, y, z\}$) a cada tiempo t. Estas componentes dan de por sí una descripción paramétrica de la curva que recorrerá la partícula en su movimiento en el espacio; a esa curva se le llama *trayectoria* (ver figura 2) de la partícula.

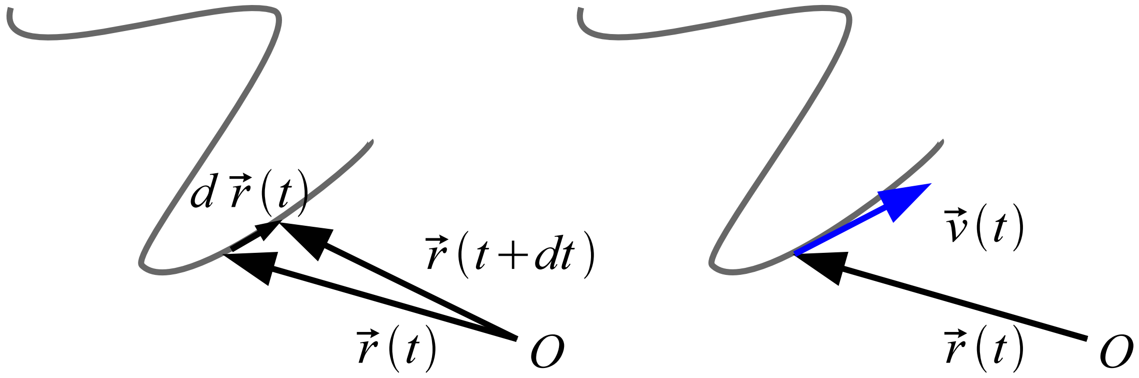

Figura 2: Velocidad instantánea de una partícula.

1.2. Velocidad y aceleración instantánea.

Consideremos la diferencia ($d\vec{r}$) entre los vectores posición para dos instantes separados un tiempo infinitesimal dt (figura 2). Este vector es en primera aproximación, tangente a la trayectoria y su módulo corresponde a la distancia (infinitesimal) recorrida por la partícula en el tiempo dt. El cociente entre este vector y el tiempo dt (que corresponde a la derivada del vector posición) nos da la *velocidad instantánea* de la partícula:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \tag{1}$$

que en coordenadas cartesianas toma esta forma:

$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} \tag{2}$$

La *aceleración instantánea* de una partícula se define como:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \tag{3}$$

que en coordenadas cartesianas es:

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k} \tag{4}$$

En las expresiones anteriores utilizamos la siguiente notación para las derivadas temporales:

$$\dot{f} \equiv \frac{df}{dt}, \quad \ddot{f} \equiv \frac{d^2f}{dt^2}$$

2. Sistemas de coordenadas.

2.1. Coordenadas circulares cilíndricas.

A pesar de que $\{x, y, z\}$ es el conjunto estándar de coordenadas utilizado para la descripción del movimiento de una partícula, en muchas ocasiones resulta natural la utilización de otras coordenadas. Consideremos el caso de las *coordenadas circulares cilíndricas* $\{\rho, \varphi, z\}$ (ver figura 3), que se vinculan con $\{x, y, z\}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x &= \rho\ cos\varphi \\ y &= \rho\ sen\varphi \\ z &= z \end{aligned} \tag{5}$$

bajo las restricciones:

$$0 \le \rho < \infty, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty$$

Los versores $\{\hat{e_\rho}, \hat{e_\varphi}, \hat{k}\}$ tienen las siguientes direcciones y sentidos: considerando una superficie cilíndrica de radio ρ y eje $\hat{k}$ que pasa por O y el semiplano $\varphi = cte.$ que pasa por $\hat{k}$ (figura 3.a), $\hat{e_\rho}$ es normal a la superficie cilíndrica, está contenido en el semiplano y apunta en el sentido creciente de ρ; $\hat{e_\varphi}$ es tangente a la superficie cilíndrica, perpendicular al semiplano y apunta en el sentido creciente del ángulo azimutal φ; el tercer versor es el $\hat{k}$ usual de coordenadas cartesianas. Estos versores forman una base ortonormal *directa*:

$$\hat{e_\rho} \times \hat{e_\varphi} = \hat{k}, \quad \hat{e_\varphi} \times \hat{k} = \hat{e_\rho}, \quad \hat{k} \times \hat{e_\rho} = \hat{e_\varphi}$$

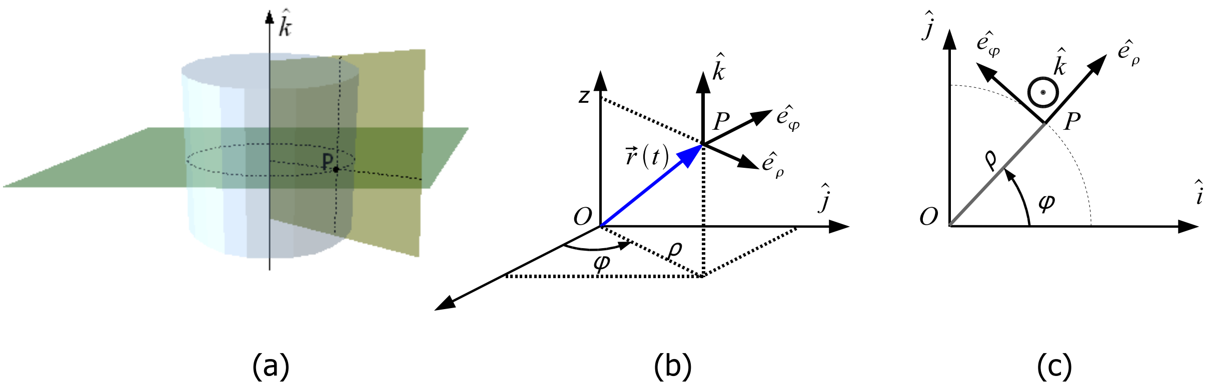

Figura 3: Coordenadas cilíndricas.

El vector posición se escribe en coordenadas cilíndricas como:

$$\vec{r} = \rho\hat{e_\rho} + z\hat{k} \tag{6}$$

Observe que la dependencia de la posición con el ángulo φ aparece a través del versor $\hat{e_\rho} = \hat{e_\rho}(\varphi)$, cuya dirección depende de este ángulo; la base $\{\hat{e_\rho}, \hat{e_\varphi}, \hat{k}\}$ es *móvil* ya que $\hat{e_\rho}$ y $\hat{e_\varphi}$ definen su dirección a partir del punto que estemos ubicando, es decir, los versores acompañan el movimiento del punto.

El vector velocidad se obtiene a partir de la derivada temporal de (6):

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\hat{e_\rho} + \rho\dot{\hat{e_\rho}} + \dot{z}\hat{k} = \dot{\rho}\hat{e_\rho} + \rho\frac{\partial\hat{e_\rho}}{\partial\varphi}\dot{\varphi} + \dot{z}\hat{k} \tag{7}$$

donde la última igualdad viene de la aplicación de la regla de la cadena para la derivación. Una construcción geométrica sencilla nos permite hallar el término en $\frac{\partial\hat{e_\rho}}{\partial\varphi}$: consideremos la variación $(d\hat{e_\rho})$ en el versor $\hat{e_\rho}$ bajo una variación infinitesimal del ángulo φ (ver figura 4). Este vector tiene la dirección y sentido de $\hat{e_\varphi}$ y su módulo se puede aproximar por $d\varphi$, que corresponde al arco de una circunferencia de radio 1 (módulo de $\hat{e_\rho}$) y ángulo al centro $d\varphi$. De esta forma:

$$d\hat{e_\rho} = d\varphi\hat{e_\varphi} \Rightarrow \frac{\partial\hat{e_\rho}}{\partial\varphi} = \hat{e_\varphi} \tag{8}$$

y la velocidad resulta:

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}\hat{e_\varphi} + \dot{z}\hat{k} \tag{9}$$

La aceleración se obtiene derivando la expresión anterior con respecto al tiempo:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\rho}\hat{e_\rho} + \dot{\rho}\dot{\varphi}\hat{e_\varphi} + \dot{\rho}\dot{\varphi}\hat{e_\varphi} + \rho\ddot{\varphi}\hat{e_\varphi} + \rho\dot{\varphi}^2\frac{\partial\hat{e_\varphi}}{\partial\varphi} + \ddot{z}\hat{k}$$

Con una construcción análoga a la de la figura 4 podemos probar que:

$$\frac{\partial\hat{e_\varphi}}{\partial\varphi} = -\hat{e_\rho} \tag{10}$$

y la aceleración resulta:

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\hat{e_\rho} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\hat{e_\varphi} + \ddot{z}\hat{k} \tag{11}$$

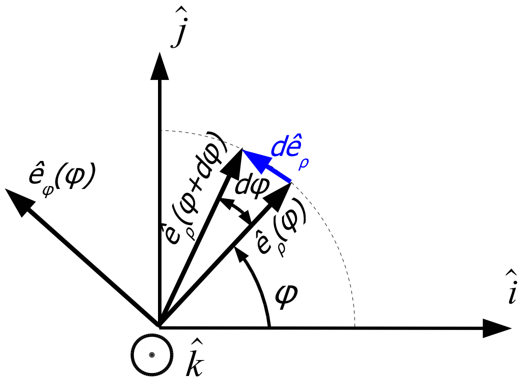

Figura 4: Derivada del versor $\hat{e_\rho}$.

2.2. Coordenadas polares esféricas.

En este caso, $\{r, \theta, \varphi\}$ son las coordenadas que definirán la posición de la partícula y se vinculan con las coordenadas cartesianas así:

$$\begin{aligned} x =& r\ sen\theta\ cos\varphi \\ y =& r\ sen\theta\ sen\varphi \\ z =& r\ cos\theta \end{aligned} \tag{12}$$

bajo las restricciones:

$$0 \le r < \infty, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi$$

Consideremos las siguientes superficies: una esfera de radio r centrada en O, el cono recto con eje en $\hat{k}$ y vértice en O para el cual $\theta = cte.$ y el semiplano $\varphi = cte.$ que pasa por $\hat{k}$ (ver figura 5.a). Los versores $\{\hat{e_r}, \hat{e_\theta}, \hat{e_\varphi}\}$ asociados a las *coordenadas polares esféricas* se hallan así: $\hat{e_r}$ es normal a la esfera, tangente al cono, está contenido en el semiplano y apunta en el sentido creciente de r; $\hat{e_\theta}$ es tangente a la esfera, normal al cono, está contenido en el semiplano y apunta en el sentido creciente de θ; $\hat{e_\varphi}$ es normal al semiplano y apunta en el sentido creciente de φ. Estos versores forman una base ortonormal directa.

El vector posición en coordenadas esféricas tiene esta forma sencilla:

$$\vec{r} = r\hat{e_r} \tag{13}$$

donde la dependencia angular aparece a través del versor $\hat{e_r} = \hat{e_r}(\theta, \varphi)$.

La velocidad de la partícula es:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e_r} + r\dot{\theta}\frac{\partial \hat{e_r}}{\partial \theta} + r\dot{\varphi}\frac{\partial \hat{e_r}}{\partial \varphi} \tag{14}$$

El término $\frac{\partial \hat{e_r}}{\partial \theta}$ se calcula siguiendo una construcción similar a la de la figura 4 (estamos considerando una variación infinitesimal $d\theta$ manteniendo $\varphi = cte.$):

$$\frac{\partial \hat{e_r}}{\partial \theta} = \hat{e_\theta}$$

Para calcular el segundo término del lado derecho de (14), a partir de la figura 5.c observe que los versores de coordenadas esféricas se pueden escribir en términos de los de cilíndricas así:

$$\begin{aligned} \hat{e_r} &= sen\theta\hat{e_\rho} + cos\theta\hat{k} \\ \hat{e_\theta} &= cos\theta\hat{e_\rho} - sen\theta\hat{k} \end{aligned} \tag{15}$$

por lo que:

$$\frac{\partial \hat{e_r}}{\partial \varphi} = sen\theta\frac{\partial \hat{e_\rho}}{\partial \varphi} = sen\theta\hat{e_\varphi}$$

y la velocidad resulta:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e_r} + r\dot{\theta}\hat{e_\theta} + r\dot{\varphi}sen\theta\hat{e_\varphi} \tag{16}$$

La aceleración por su parte resulta de derivar la anterior:

$$\begin{aligned}\vec{a} = {} & \ddot{r}\hat{e_r} + \dot{r}\left(\dot{\theta}\hat{e_\theta} + \dot{\varphi} sen\theta \hat{e_\varphi}\right) \\ & + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e_\theta} + r\ddot{\theta}\hat{e_\theta} + r\dot{\theta}\left(\dot{\theta}\frac{\partial\hat{e_\theta}}{\partial\theta} + \dot{\varphi}\frac{\partial\hat{e_\theta}}{\partial\varphi}\right) \\ & + \dot{r}\dot{\varphi} sen\theta\hat{e_\varphi} + r\ddot{\varphi} sen\theta\hat{e_\varphi} + r\dot{\varphi}\dot{\theta} cos\theta\hat{e_\varphi} + r\dot{\varphi}^2 sen\theta\frac{\partial\hat{e_\varphi}}{\partial\varphi}\end{aligned} \tag{17}$$

donde cabe notar que en el último término usamos que el versor $\hat{e_\varphi}$ no depende del ángulo θ (ya que está definido sólo en términos del semiplano $\varphi = cte.$). El término $\frac{\partial\hat{e_\varphi}}{\partial\varphi}$ lo tenemos calculado en (10):

$$\frac{\partial\hat{e_\varphi}}{\partial\varphi} = -\hat{e_\rho} = -(sen\theta\hat{e_r} + cos\theta\hat{e_\theta})$$

donde la última igualdad proviene de invertir las relaciones (15). Las derivadas de $\hat{e_\theta}$ se calculan procediendo similarmente a lo hecho con $\hat{e_r}$ y nos dan:

$$\frac{\partial\hat{e_\theta}}{\partial\theta} = -\hat{e_r}$$
$$\frac{\partial\hat{e_\theta}}{\partial\varphi} = cos\theta\hat{e_\varphi}$$

Sustituyendo todas las derivadas anteriores en (17) y simplificando nos queda:

$$\begin{aligned}\vec{a} = {} & \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 sen^2\theta\right)\hat{e_r} \\ & + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 sen\theta cos\theta\right)\hat{e_\theta} \\ & + \left(r\ddot{\varphi} sen\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi} sen\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} cos\theta\right)\hat{e_\varphi}\end{aligned} \tag{18}$$

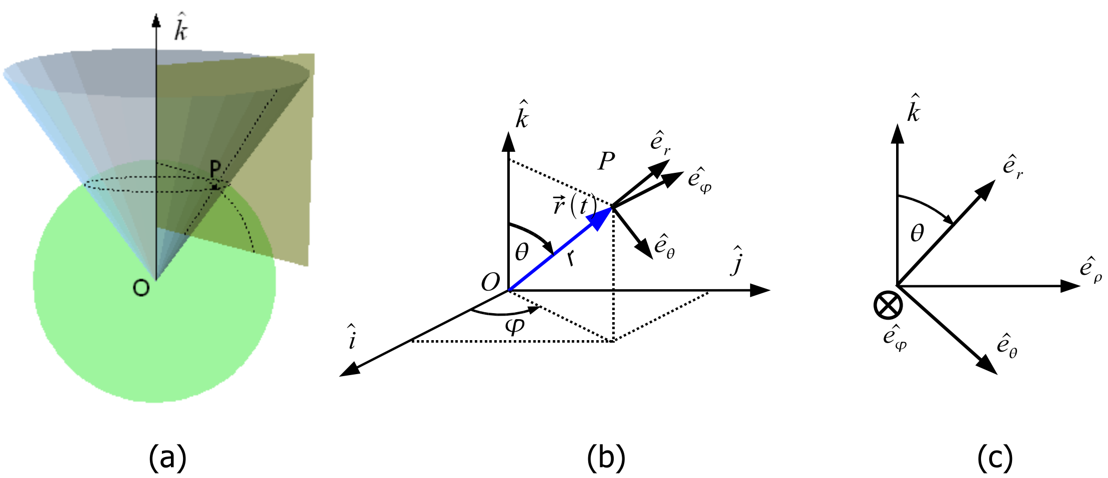

Figura 5: Coordenadas polares esféricas.

2.3. Coordenadas intrínsecas.

Otro sistema de coordenadas útil, en especial cuando la trayectoria de la partícula está predeterminada (por ej., una cuenta moviéndose sobre un alambre), es el *intrínseco* o curvilíneo, donde se describe el movimiento de una partícula a partir de una única coordenada s llamada *abcisa curvilínea*. Como ya dijimos en 1.1, la trayectoria de una partícula se puede dar en forma paramétrica especificando las componentes $(x(t), y(t), z(t))$ del vector posición para cada tiempo. Consideremos ahora una variación $d\vec{r}$ de la posición bajo una variación infinitesimal del tiempo (dt), que de acuerdo a (1) es:

$$d\vec{r} = \vec{v}dt$$

Dado un origen (O) sobre la curva que describe la partícula (ver figura 6), la distancia recorrida s (con un signo definido de acuerdo al lado de O del que estemos) será nuestra abcisa curvilínea. El diferencial ds de la distancia recorrida por la partícula sobre su trayectoria durante dt es:

$$ds = \sqrt{d\vec{r} \cdot d\vec{r}} = \pm|\vec{v}|dt$$

de acuerdo a si se produce un incremento ($+$) o una disminución ($-$) en s durante dt.

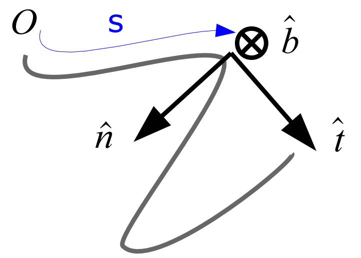

Figura 6: Coordenadas intrínsecas.

2.3.1. Versor tangente, normal y binormal.

Los versores asociados a las coordenadas intrínsecas forman el llamado *triedro de Frenet* $\{\hat{t}, \hat{n}, \hat{b}\}$. Comencemos definiendo el versor *tangente*:

$$\hat{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} \tag{19}$$

(observe que el módulo de $d\vec{r}$ es ds). La velocidad de la partícula se escribe en términos de este versor así:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{d\vec{r}}{ds} = \dot{s}\hat{t} \tag{20}$$

y resulta como cabía esperar, tangente a la trayectoria de la partícula.

2.3.2. Nota: conservación de la norma.

Observemos que para cualquier vector cuya norma se mantenga constante (tal es el caso del versor $\hat{t}$), cualquier variación de este versor será ortogonal al mismo:

$$0 = d(\hat{t} \cdot \hat{t}) = d\hat{t} \cdot \hat{t} + \hat{t} \cdot d\hat{t} \Rightarrow d\hat{t} \cdot \hat{t} = 0 \tag{21}$$

Consideremos en particular una variación en $\hat{t}$ bajo un incremento en s: $\frac{d\hat{t}}{ds}$. Usando que este nuevo vector es ortogonal a $\hat{t}$ definimos el versor *normal*:

$$\hat{n} = \frac{1}{\left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right|}\frac{d\vec{t}}{ds} \tag{22}$$

que está dirigido hacia el *interior* de la curva. El término $\frac{1}{|\frac{d\vec{t}}{ds}|}$ recibe el nombre de *radio de curvatura* ($\mathcal{R}$) y será mayor cuanto menor sea el cambio en la tangente de la curva respecto a la longitud. [1]

Finalmente, para completar el triedro de Frenet, definimos el versor *binormal*:

$$\hat{b} = \hat{t} \times \hat{n} \tag{23}$$

[1] En el caso extremo de una recta, $\rho = \infty$.

2.3.3. Aceleración en intrínsecas.

Derivando (20) con respecto al tiempo, tenemos la aceleración en intrínsecas:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\dot{s}\hat{t})}{dt} = \ddot{s}\hat{t} + \dot{s}\dot{\hat{t}} = \ddot{s}\hat{t} + \dot{s}^2\frac{d\hat{t}}{ds} \overset{(22)}{=} \ddot{s}\hat{t} + \frac{\dot{s}^2}{\mathcal{R}}\hat{n} \tag{24}$$

El primer término de la aceleración corresponde al *cambio en el módulo* ($\dot{s}$) de la velocidad sin cambio en la dirección, mientras que el segundo término corresponde al *cambio en la dirección* del vector velocidad sin cambio en el módulo del mismo; siempre que el radio de curvatura sea finito, la partícula experimentará una aceleración (presente en el segundo término), *aún* cuando el módulo de su velocidad no cambie, tal como sucede por ejemplo, en el caso de un movimiento circular uniforme.

3. Movimiento relativo.

No podemos hablar de movimiento si no es en relación directa al *sistema de referencia* desde el cual estemos realizando nuestras observaciones. Es importante por ello que podamos vincular la velocidad y aceleración de una partícula vistas desde diferentes sistemas de referencia.

3.1. Sistemas de referencia en rotación y traslación relativa.

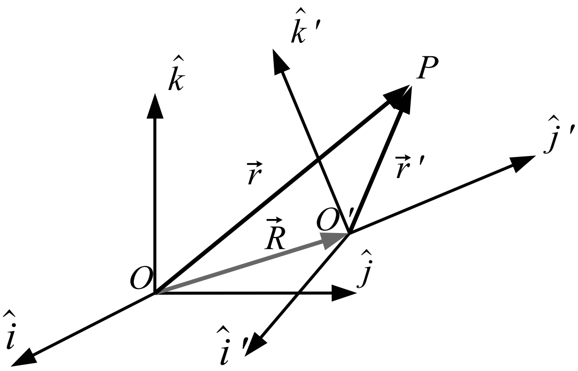

Figura 7: Sistemas de referencia absoluto $S = \{O, \hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ y relativo $S' = \{O', \hat{\imath}', \hat{\jmath}', \hat{k}'\}$.

Sean dos sistemas de referencia, S y S', al primero de los cuales lo consideraremos como sistema fijo y lo llamaremos *sistema absoluto* y al segundo como móvil y lo llamaremos *sistema de transporte*. El movimiento de S' respecto de S estará caracterizado, por un lado, por el cambio en la posición del origen de coordenadas O' (*traslación*) y por otro, por el cambio de orientación de los ejes de la base del sistema móvil $\{\hat{\imath}', \hat{\jmath}', \hat{k}'\}$ respecto de los ejes del sistema fijo $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ (*rotación*) (ver figura 7). Consideremos un vector arbitrario $\vec{A}$ que escribiremos en términos de sus componentes (cartesianas) en uno y otro sistema:

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \tag{25}$$

$$\vec{A} = A'_x\hat{\imath}' + A'_y\hat{\jmath}' + A'_z\hat{k}' \tag{26}$$

En el sistema fijo S, la derivada temporal de este vector es (consideremos $\vec{A}$ según la expresión (25)):

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \dot{A}_x\hat{\imath} + \dot{A}_y\hat{\jmath} + \dot{A}_z\hat{k} \tag{27}$$

Nótese que en (2) teníamos una expresión similar, al haber asumido (implícitamente en ese caso) que el sistema de referencia era fijo.

Por otro lado, si derivamos (26) tendremos:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \dot{A}'_x\hat{\imath}' + \dot{A}'_y\hat{\jmath}' + \dot{A}'_z\hat{k}' + A'_x\frac{d\hat{\imath}'}{dt} + A'_y\frac{d\hat{\jmath}'}{dt} + A'_z\frac{d\hat{k}'}{dt} \tag{28}$$

La primera parte de la expresión anterior (la que incluye las derivadas temporales de las componentes) tiene la misma forma que (27) y corresponde a la derivada de $\vec{A}$ *considerando los versores del sistema móvil como fijos.* A esta derivada la llamaremos *derivada relativa*:

$$\frac{d'\vec{A}}{dt} = \dot{A}'_x\hat{i}' + \dot{A}'_y\hat{j}' + \dot{A}'_z\hat{k}' \tag{29}$$

Las ecuaciones (27) y (29) se pueden tomar como las definiciones para la derivada absoluta y relativa de un vector respectivamente. En el caso de magnitudes escalares, no existe distinción en el tipo de derivada. Combinando (28) y (29) podemos vincular las dos derivadas:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + A'_x\frac{d\hat{i}'}{dt} + A'_y\frac{d\hat{j}'}{dt} + A'_z\frac{d\hat{k}'}{dt} \tag{30}$$

Escribamos ahora las derivadas de los versores móviles en la base móvil propiamente:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{i}'}{dt} &= a_{11}\hat{i}' + a_{12}\hat{j}' + a_{13}\hat{k}'\\ \frac{d\hat{j}'}{dt} &= a_{21}\hat{i}' + a_{22}\hat{j}' + a_{23}\hat{k}'\\ \frac{d\hat{k}'}{dt} &= a_{31}\hat{i}' + a_{32}\hat{j}' + a_{33}\hat{k}'\end{aligned} \tag{31}$$

donde tenemos, en principio, 9 coeficientes a_{ij} para hallar. Podemos reducir el número de incógnitas comenzando por derivar la relación de normalidad:

$$\hat{i}' \cdot \hat{i}' = 1$$

de la que obtenemos:

$$\frac{d\hat{i}'}{dt} \cdot \hat{i}' = 0$$

(que es un caso particular de la relación (21)). De la relación anterior y las correspondientes para $\hat{j}'$ y $\hat{k}'$ nos queda:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$$

Derivando ahora la relación de ortogonalidad:

$$\hat{i}' \cdot \hat{k}' = 0$$

tenemos:

$$\frac{d\hat{i}'}{dt} \cdot \hat{k}' = -\hat{i}' \cdot \frac{d\hat{k}'}{dt}$$

De esta relación y otras dos análogas nos queda:

$$a_{31} = -a_{13}, \quad a_{12} = -a_{21}, \quad a_{23} = -a_{32}$$

De las relaciones anteriores entre los coeficientes, resulta que de los 9 originales presentes en (31) alcanza con especificar a_{12}, a_{23} y a_{31} para que los otros 6 queden determinados. La expresión (31) se escribe entonces:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{i}'}{dt} &= a_{12}\hat{j}' - a_{31}\hat{k}'\\ \frac{d\hat{j}'}{dt} &= -a_{12}\hat{i}' + a_{23}\hat{k}'\\ \frac{d\hat{k}'}{dt} &= a_{31}\hat{i}' - a_{23}\hat{j}'\end{aligned} \tag{32}$$

Definimos ahora el vector ***velocidad angular*** $\vec{\omega}$ como aquel que tiene por componentes en la base móvil:

$$\omega'_x = a_{23}, \quad \omega'_y = a_{31}, \quad \omega'_z = a_{12} \tag{33}$$

y la expresión (32) se reescribe así:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{i}'}{dt} &= \vec{\omega}\times\hat{i}' \\ \frac{d\hat{j}'}{dt} &= \vec{\omega}\times\hat{j}' \\ \frac{d\hat{k}'}{dt} &= \vec{\omega}\times\hat{k}'\end{aligned} \tag{34}$$

Insertando las relaciones anteriores en (30) nos queda:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + A'_x\vec{\omega}\times\hat{i}' + A'_y\vec{\omega}\times\hat{j}' + A'_z\vec{\omega}\times\hat{k}' = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{A} \tag{35}$$

Esta relación entre las derivadas temporales absoluta y relativa nos dice que la derivada absoluta de un vector arbitrario tiene dos contribuciones: la derivada en el sistema de transporte más la derivada absoluta que tendría de estar en reposo en el sistema de transporte.

Observación:

De acuerdo a (35), para cualquier vector paralelo a la velocidad angular de S' respecto a S ($\vec{\omega}$), las derivadas absoluta y relativa coinciden. En particular, esto vale para la velocidad angular:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d'\vec{\omega}}{dt} \tag{36}$$

y utilizaremos sin ambigüedad $\dot{\vec{\omega}}$ para denotar cualquiera de las dos.

Ejemplo.-

Consideremos un caso sencillo de movimiento relativo, donde los orígenes O y O' así como los ejes $\hat{k}$ y $\hat{k}'$ coinciden entre sí (figura 8). A un tiempo dado, el ángulo que forman entre sí los versores $\hat{i}$ e $\hat{i}'$ es ϕ. Procediendo análogamente a lo trabajado en coordenadas cilíndricas y esféricas podemos probar que las derivadas de los versores móviles son:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{i}'}{dt} &= \dot{\phi}\hat{j}' \\ \frac{d\hat{j}'}{dt} &= -\dot{\phi}\hat{i}' \\ \frac{d\hat{k}'}{dt} &= 0\end{aligned}$$

y la velocidad angular tiene entonces por componentes:

$$\omega'_x = 0, \quad \omega'_y = 0, \quad \omega'_z = \dot{\phi}$$

es decir:

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{k}$$

El vector velocidad angular del sistema es un vector cuyo módulo corresponde a la tasa de cambio del ángulo ϕ y está dirigido a lo largo del eje $\hat{k}$ y con su sentido respetando la regla de la mano derecha del giro del sistema S'.

3.1.1. Interpretación de la velocidad angular.

Sea $\vec{B}$ un vector de magnitud constante y en reposo con respecto al sistema de transporte S', por lo que claramente, su derivada relativa es cero. La fórmula (35) se reduce entonces a:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{B}$$

El vector diferencia: $d\vec{B} = \vec{B}(t+dt) - \vec{B}(t)$ tiene entonces por módulo $\omega dt B sen\theta$ (figura 9)y está dirigido tangencialmente a una circunferencia de radio $|\vec{B}|sen\theta$ cuyo plano es perpendicular al vector ω. Un vector como $\vec{B}$, en reposo en el sistema móvil, se comporta como si instantáneamente rotase alrededor del eje OQ (que tiene la dirección de ω) siguiendo el sentido de giro que se corresponde positivamente a través de la regla de la mano derecha con ω.

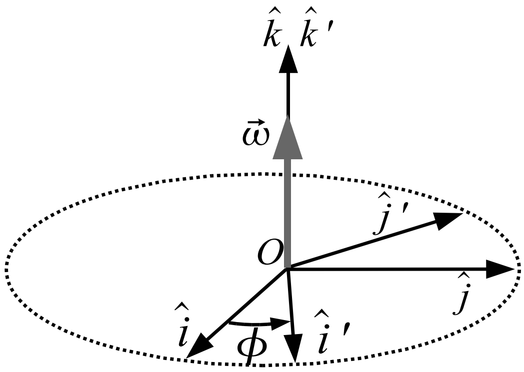

Figura 8: Caso simple para la determinación de la velocidad angular de un sistema de transporte.

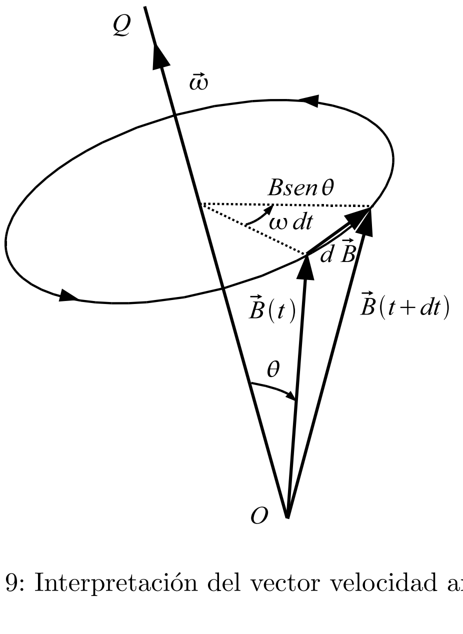

Figura 9: Interpretación del vector velocidad angular.

3.2. Teorema de Roverbal.

Apliquemos las deducciones anteriores para hallar la velocidad de una partícula P (ver figura 7). Sea $\vec{r}$ la posición absoluta de la partícula y $\vec{r'}$ la relativa; se tiene que:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r'}$$

que derivada con respecto al tiempo nos da la velocidad de P:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r'}}{dt}$$

El primer término del lado derecho de la ecuación anterior es la velocidad absoluta ($\vec{v_{O'}}$)del origen del sistema S'. Para el segundo término, apliquemos (35):

$$\vec{v} = \vec{v_{O'}} + \frac{d'\vec{r'}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r'} = \vec{v_{O'}} + \vec{v'} + \vec{\omega} \times \vec{r'}$$

donde definimos la *velocidad relativa* $\vec{v'}$ de la partícula. Los términos restantes del lado derecho de la ecuación conforman lo que se llama *velocidad de transporte* $\vec{v_T}$ de la partícula:

$$\vec{v_T} = \vec{v_{O'}} + \vec{\omega} \times \vec{r'}$$

con lo que la velocidad absoluta de la partícula resulta (***Teorema de Roverbal***):

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v'} + \vec{v_T} \\ \vec{v'} &= \frac{d'\vec{r'}}{dt} \\ \vec{v_T} &= \vec{v_{O'}} + \vec{\omega} \times \vec{r'} \end{aligned} \tag{37}$$

La velocidad absoluta de una partícula es entonces la velocidad que tiene por moverse en relación al sistema móvil más la velocidad que adquiriría tan sólo por permanecer en reposo con respecto al sistema móvil, de allí el término de *transporte*.

3.3. Teorema de Coriolis.

Para hallar la aceleración absoluta de la partícula, procedamos a derivar (37):

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v'}}{dt} + \frac{d\vec{v_{O'}}}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r'}) \\ &\overset{(35)}{=} \frac{d'\vec{v'}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v'} + \vec{a_{O'}} + \frac{d'}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r'}) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'}) \\ &= \frac{d'\vec{v'}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v'} + \vec{a_{O'}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r'} + \vec{\omega} \times \vec{v'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'}) \\ &= \frac{d'\vec{v'}}{dt} + \vec{a_{O'}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{a'} + \vec{a_T} + \vec{a_C} \\ \vec{a'} &= \frac{d'\vec{v'}}{dt} \\ \vec{a_T} &= \vec{a_{O'}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'}) \\ \vec{a_C} &= 2\vec{\omega} \times \vec{v'} \end{aligned} \tag{38}$$

La fórmula (38) de relacionamiento de las aceleraciones entre los sistemas de referencia móvil y fijo constituye el llamado ***Teorema de Coriolis***. El término $\vec{a'}$ es la aceleración de la partícula *relativa* al sistema móvil, el término $\vec{a_T}$ es la *aceleración de transporte* (adquirida tan sólo con estar en reposo con respecto al sistema móvil) y $\vec{a_C}$ la *aceleración de Coriolis* presente sólo en el caso de movimiento de la partícula relativo al sistema móvil. Dentro de los términos que conforman la aceleración de transporte cabe destacar (ver figura 10) un término de *aceleración centrípeta*, ya que podemos verificar fácilmente que $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'})$ apunta perpendicular y hacia el eje de rotación del sistema móvil.

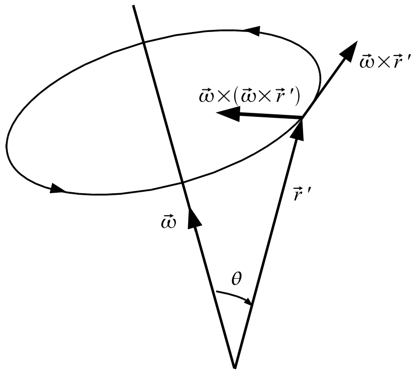

Figura 10: Aceleración centrípeta.

3.4. Adición de velocidades angulares.

Para concluir el estudio del movimiento relativo entre sistemas de referencia trataremos un problema cuya solución nos será muy útil al estudiar el movimiento de los cuerpos rígidos. Consideremos tres sistemas de referencia S_0, S_1, S_2, el primero de ellos fijo y los otros con movimiento relativo al fijo y entre sí. Sea $\vec{\omega_{10}}$ la velocidad angular de S_1 relativa a S_0 y $\vec{\omega_{21}}$ la de S_2 relativa a S_1. El problema que queremos resolver es cómo relacionar la velocidad angular de S_2 relativa a S_0 con las anteriores. A fin de adoptar una notación clara, en lugar de utilizar $'$ para diferenciar las derivadas, pondremos un superíndice para indicar el sistema en el cual estemos operando; de esta forma, la generalización de (35) es:

$$\frac{d^{(0)}\vec{A}}{dt} = \frac{d^{(1)}\vec{A}}{dt} + \vec{\omega_{10}} \times \vec{A} \tag{39}$$

$$\frac{d^{(1)}\vec{A}}{dt} = \frac{d^{(2)}\vec{A}}{dt} + \vec{\omega_{21}} \times \vec{A} \tag{40}$$

Tomemos un vector en reposo en el sistema S_2, de manera que (40) se simplifique a:

$$\frac{d^{(1)}\vec{A}}{dt} = \vec{\omega_{21}} \times \vec{A}$$

que al sustituir en (39) nos da:

$$\frac{d^{(0)}\vec{A}}{dt} = \vec{\omega_{21}} \times \vec{A} + \vec{\omega_{10}} \times \vec{A} = (\vec{\omega_{21}} + \vec{\omega_{10}}) \times \vec{A}$$

Considerando sólo el movimiento de S_2 relativo a S_0, la derivada en S_0 de un vector en reposo en S_2 sería:

$$\frac{d^{(0)}\vec{A}}{dt} = \vec{\omega_{20}} \times \vec{A}$$

que comparada con la expresión que le precede nos permite concluir ($\vec{A}$ es arbitrario):

$$\vec{\omega_{20}} = \vec{\omega_{21}} + \vec{\omega_{10}} \tag{41}$$

lo que constituye el llamado ***Teorema de Adición de Velocidades Angulares***.