TEXTO Nº 4

CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA

Conceptos Básicos
Ejercicios Resueltos
Ejercicios Propuestos

Edicta Arriagada D. Victor Peralta A
Diciembre 2008
Sede Maipú, Santiago de Chile

Introducción

Este material ha sido construido pensando en el estudiante de nivel técnico de las carreras de INACAP. El objetivo principal de este trabajo es que el alumno adquiera y desarrolle la técnica para resolver problemas diversos de la unidad de **Cinemática de partícula**. En lo particular pretende que el alumno logre el aprendizaje indicado en los criterios de evaluación (referidos al cálculo de variables) del programa de la asignatura Física Mecánica.

El desarrollo de los contenidos ha sido elaborado utilizando un lenguaje simple que permita la comprensión de los conceptos involucrados en la resolución de problemas. Se presenta una síntesis inmediata de los conceptos fundamentales de Cinemática de partícula, seguida de ejemplos y problemas resueltos que presentan un procedimiento de solución sistemático que va desde un nivel elemental hasta situaciones más complejas, esto, sin saltar los pasos algebraicos que tanto complican al alumno, se finaliza con problemas propuestos incluyendo sus respectivas soluciones.

Conceptos fundamentales

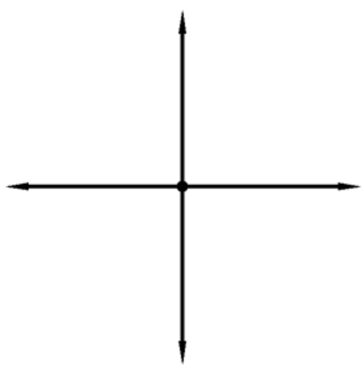
Cinemática

Rama de la física mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos sin importar las causas que lo producen , corresponde a un estudio de la geometría del movimiento donde solo interesa el espacio recorrido y el tiempo empleado en recorrer dicho espacio.

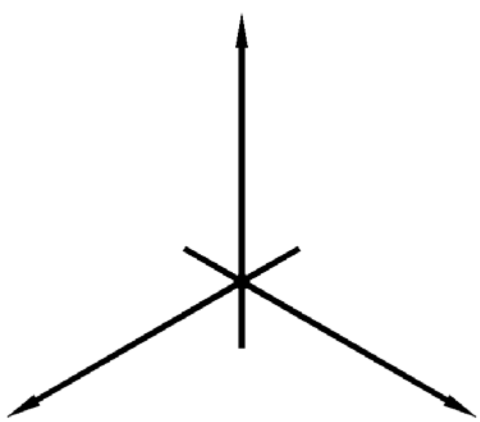
Sistema de referencia

Cuerpo (punto o lugar físico) fijo o móvil necesario para realizar una medición, en este caso necesario para describir el movimiento de un cuerpo. Todo sistema coordenado constituye un sistema de referencia.

Sistema unidimensional



Sistema bidimensional



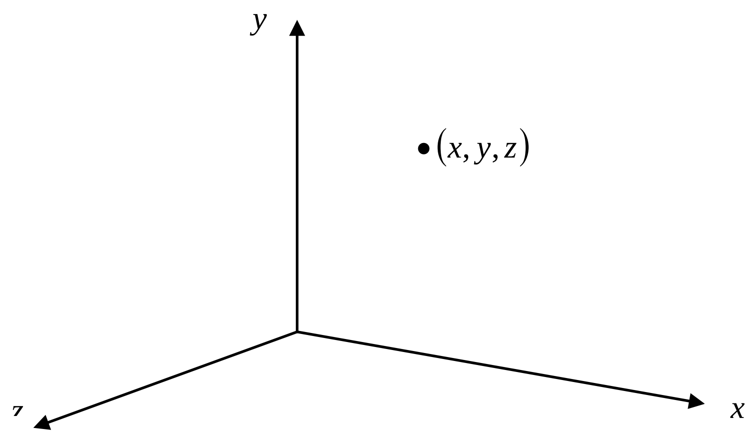
Sistema tridimensional

Partícula

Cuerpo en forma de punto que en la realidad no existe, se trata de una idealización matemática para simplificar el estudio de un fenómeno, en este caso para simplificar el estudio del movimiento de un cuerpo. En general se dice que un cuerpo es considerado como partícula cuando sus dimensiones son despreciables con respecto al espacio que ocupa, este concepto es de carácter relativo ya que depende del sistema de referencia del cual se le compare.

Posición

Punto del espacio referido a un sistema de referencia (ver figura)

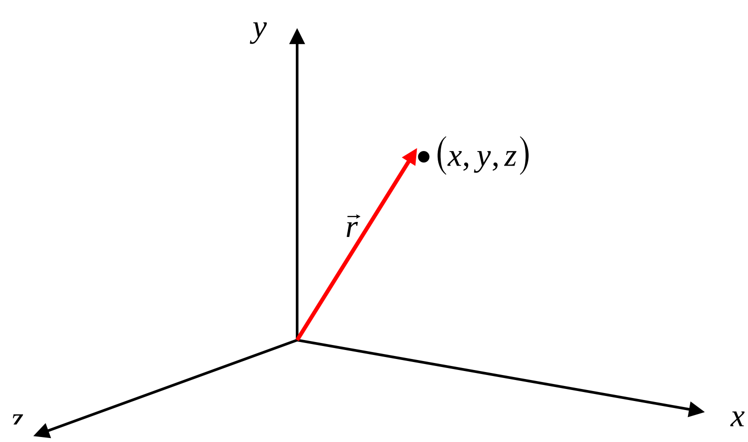


Movimiento

Concepto de carácter relativo que científicamente se define como el cambio sucesivo de posición que experimenta un cuerpo respecto a otro considerado como referencia.

Vector posición $(\vec{r})$

Vector que une el origen del sistema coordenado con el punto del espacio donde se encuentra la partícula



Trayectoria

Es la curva descrita durante el movimiento.

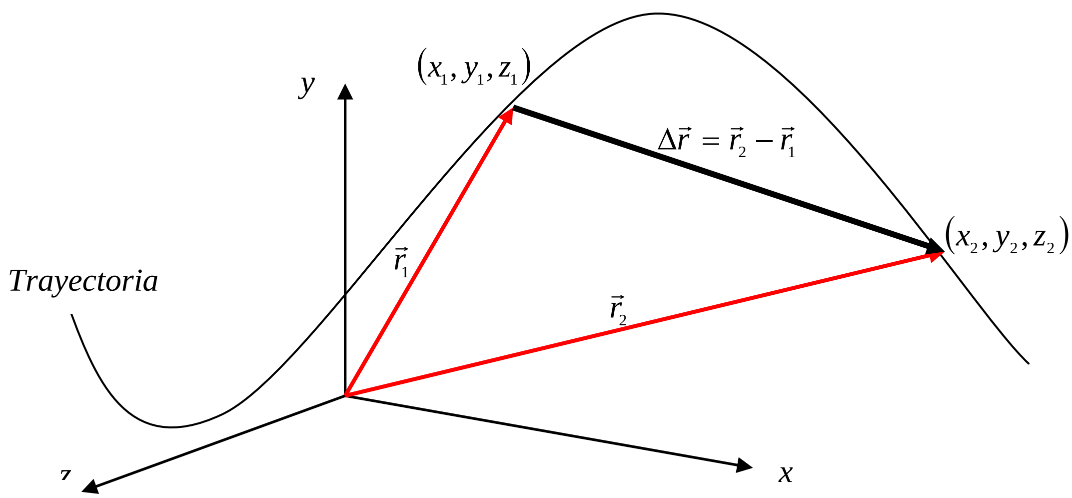
Distancia o camino recorrido (d) o (s)

Corresponde a la longitud de la curva descrita.

Desplazamiento $(\Delta\vec{r})$

Diferencia entre dos vectores de posición, es independiente del origen del sistema coordenado.

$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$



Es importante distinguir entre *Desplazamiento lineal* y *distancia o camino recorrido* a lo largo de una trayectoria no necesariamente recta. El desplazamiento lineal y distancia recorrida, coinciden únicamente cuando la trayectoria es una línea recta.

Velocidad media $(\vec{v}_m)$

Se define como el cuociente entre el desplazamiento $\Delta\vec{r}$ y el tiempo Δt empleado en dicho desplazamiento es decir:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$$

Velocidad instantánea $(\vec{v})$

Es el valor límite de la velocidad media cuando el tiempo Δt tiende a cero, se anota:

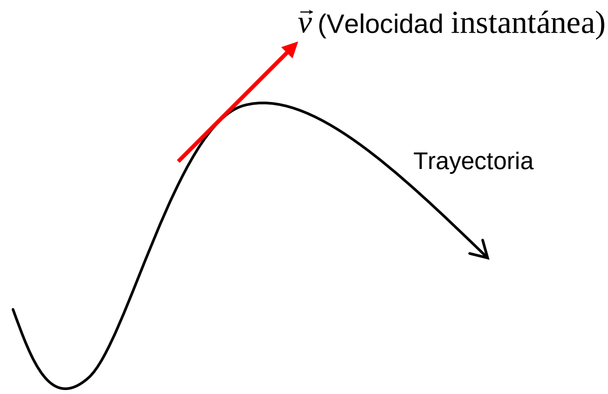
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

La expresión anterior en cálculo matemático, corresponde a la definición de derivada, en este caso, la derivada de la posición con respecto al tiempo, se anota:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$ Se lee de r a de t

La cinemática que contempla este nivel no considera el trabajar con derivadas ni con integrales, por razones claras de desconocimiento de estas herramientas matemáticas.

La velocidad instantánea queda representada gráficamente por la recta tangente a la curva descrita en el instante que se indique.



Rapidez

La expresión "rapidez" se refiere únicamente a la magnitud de velocidad. Así, es posible para un punto viajar con rapidez constante a lo largo de una trayectoria curva, mientras que obviamente, su velocidad está cambiando de dirección constantemente.

De aquí en adelante, el mismo símbolo " v " tiende a usarse para ambos, rapidez y velocidad, así que en cualquier instante particular el significado del símbolo debe ser cuidadosamente tratado.
En lo que sigue en vez de hablar de velocidad instantánea, se hablará simplemente de velocidad.

Unidades de velocidad

$$\frac{cm}{s};\ \frac{m}{s};\ \frac{pie}{s};\ \frac{m}{\min};\ \frac{km}{h};\ \frac{\text{mi}}{\text{h}};\ rpm,\ etc$$

Aceleración media ($\vec{a}_m$)

Se define como el cuociente entre la variación de la velocidad instantánea y el tiempo empleado en dicha variación, es decir:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

Aceleración Instantánea ($\vec{a}$)

Se define como el valor limite de la aceleración media cuando el tiempo Δt tiende a cero, se escribe:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

La expresión anterior corresponde a la definición de derivada, en este caso, la derivada de la velocidad $\vec{v}$ con respecto al tiempo t.

Debe dejarse en claro que estas expresiones de velocidad instantánea, y aceleración instantánea, no serán trabajadas desde el punto de vista del cálculo matemático, debido al desconocimiento de las materias.

Unidades de aceleración

$$\frac{cm}{s^2};\ \frac{m}{s^2};\ \frac{pie}{s^2};\ \frac{m}{\min^2};\ \frac{km}{h^2};\ \frac{\text{mi}}{\text{h}^2};\ \frac{\text{rev.}}{\text{s}^2},\ etc$$

Clasificación de los movimientos

Según trayectoria

$$\begin{cases} rectos\ :\ \text{movimiento de un piston, caida de un cuerpo, etc.} \\ curvos \begin{cases} circulares\ :\ \text{movimiento del diente de un engrane, movimiento del aspa de una helice, etc} \\ parabólicos\ :\ \text{movimiento de un proyectil} \\ elípticos\ :\ \text{movimiento de los electrones en torno al nucleo del átomo} \end{cases} \end{cases}$$

Según itinerario $\begin{cases} uniformes \Rightarrow \vec{v} = \text{constante} \\ \text{variados} \Rightarrow \vec{v} \neq \text{constante} \end{cases}$

A continuación estudiaremos los siguientes tipos de movimientos:

- Movimiento Rectilíneo Uniforme (M.R.U.)
- Movimiento Rectilíneo Uniforme Acelerado (M.R.U.A.)
- Movimiento de un Proyectil
- Movimiento Circular Uniforme (M.C.U.)
- Movimiento Circular Uniforme Acelerado (M.C.U.A.)

Movimiento rectilíneo uniforme (MRU)

Es un movimiento de trayectoria rectilínea y el módulo de la velocidad (rapidez) se mantiene constante en el tiempo. En este movimiento se recorren distancias iguales en tiempos iguales, es decir, si en una hora se recorren 120 Km., entonces en media hora se recorrerá 60 Km.

En lo que sigue, supondremos que:

- El movimiento rectilíneo de un cuerpo se produce sobre el eje x
- El desplazamiento $\vec{r}$ respecto al cero corresponde a la coordenada x.
- Se considera solo el módulo de la velocidad y se hablará de rapidez o simplemente de velocidad.

La ecuación fundamental del MRU **es:**

$$x = x_0 + v \cdot t \qquad \text{Ec. de posición}$$

$$d = s = |x - x_0| \qquad \text{Distancia o camino recorrido}$$

Donde:

x_0 = Posición inicial

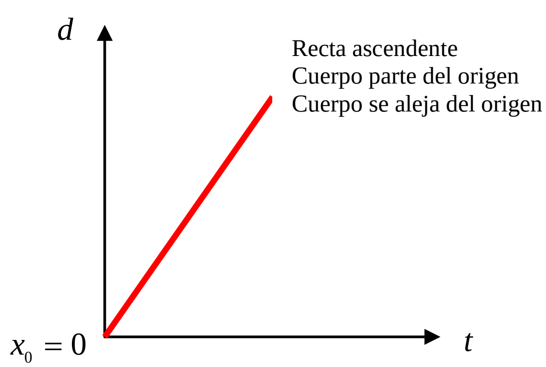
x = Posición final

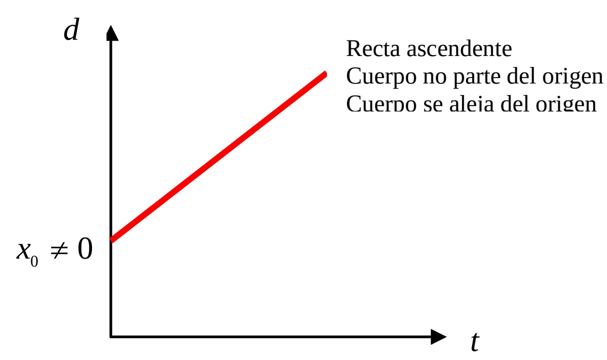
v = Módulo de la velocidad

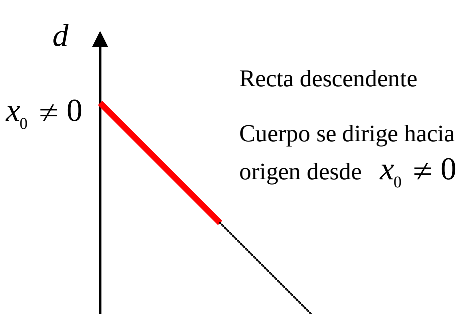
t = Tiempo

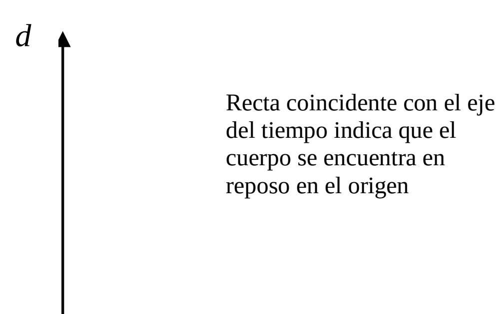
Representación gráfica del MRU

Gráfica distancia versus tiempo (línea recta)





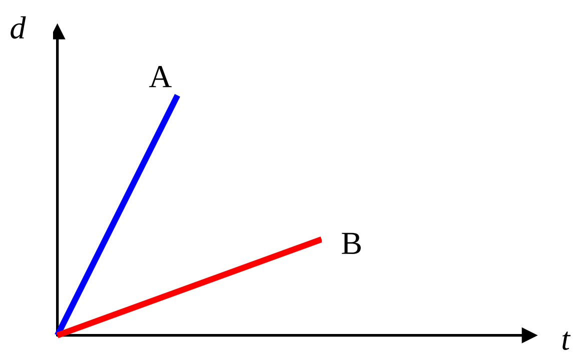




$$x_0 \neq 0$$

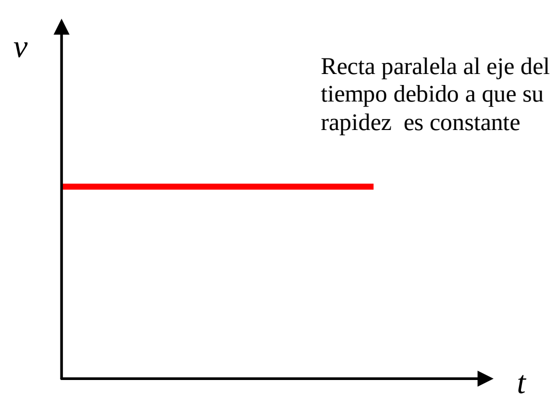
Observación:

La inclinación de la línea recta en un gráfico distancia – tiempo, representa el módulo de la velocidad (rapidez), es decir, a mayor inclinación de la línea recta, mayor es el módulo de la velocidad



$\boxed{v_A \text{ mayor que } v_B \text{ ya que } A \text{ tiene mayor inclinación que } B}$

Grafica rapidez versus tiempo



Ejemplos de MRU

Ejemplo 1

Un cuerpo se encuentra en la posición de 140m respecto del origen de un sistema de referencia y viaja a razón de 26 m/s. Determinar:

a) Posición del cuerpo al tiempo de 15 segundos.
b) Distancia recorrida por el cuerpo al tiempo de 15 segundos.

Solución:

Una forma ordenada de resolver un problema de cinemática es sacar los datos y preguntas del problema, esto es:

Datos:

Posición inicial $x_0 = 140m$

Valor de la velocidad $v = 26\frac{m}{s}$

Posición final $x = ?$

Distancia recorrida $d = ?$

(a) Cálculo de posición x al tiempo de 15 segundos.

Como se trata de un movimiento uniforme, la ecuación correspondiente es:

$$x = x_0 + v \cdot t$$

La posición x se encuentra lista para ser evaluada, solo hay que reemplazar los valores conocidos, esto es:

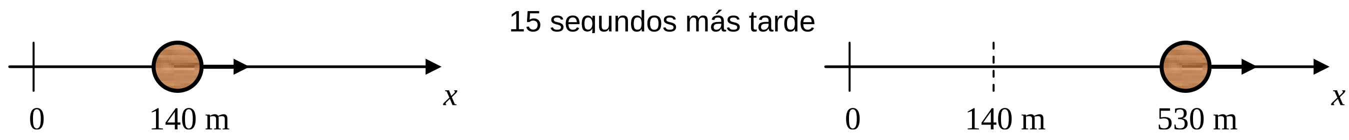
$$x = 140m + 26\frac{m}{s} \cdot 15s$$

Multiplicando, cancelando la unidad de segundo y sumando se obtiene la posición que se pide, es decir:

$$x = 140m + 26\frac{m}{s} \cdot 15s$$

$$\boxed{x = 530m}$$

Por lo tanto, al tiempo de 15 segundos el cuerpo se encuentra en la posición de 530 metros.



(b) **Cálculo de distancia** d **recorrida al tiempo de 15 segundos**

En este caso, la distancia corresponde al valor absoluto de la diferencia de las posiciones final e inicial, es decir:

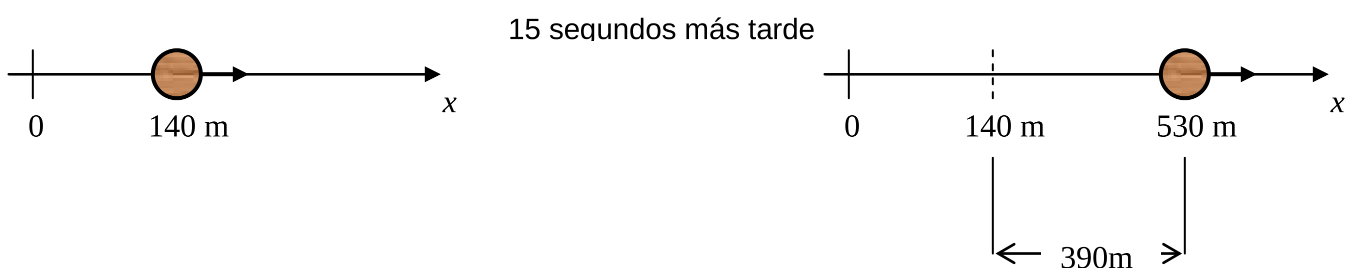
$$d = |x - x_0|$$

Como se conoce ambas posiciones, solo hay que reemplazar los valores correspondientes, esto es:

$$d = |530 - 140| m$$

Restando y recordando que el valor absoluto de un número siempre es positivo, resulta la distancia que se pide, es decir:

$$\boxed{d = 390m}$$



Ejemplo 2

Determinar la velocidad de un móvil que recorre 473 km en 6 horas

Solución:

En este caso se tiene que en 6 horas el cuerpo recorre una distancia de 473 km, es decir, la posición final es de 473 km respecto del origen de un sistema coordenado (eje x).

Claramente el movimiento es uniforme, donde se conoce el tiempo (6 horas) en que alcanza la posición de 473 km.

La ecuación del M.R.U. es:

$$x = x_0 + v \cdot t$$

Despejando velocidad se tiene:

$$x - x_0 = v \cdot t$$

$$\frac{x - x_0}{t} = v$$

Reemplazando valores resulta:

$$\frac{473km - 0}{6h} = v$$

Dividiendo:

$$\boxed{v = 78{,}833 \frac{km}{h}}$$

Ejemplo 3

¿Cuánto tiempo necesita un corredor para un trayecto de 2,4 km cuando corre con una velocidad de 5 m/s

Solución:

La ecuación a utilizar es la misma que en el caso anterior, solo que ahora se debe calcular el tiempo empleado en recorrer 2,4 km.

$$x = x_0 + v \cdot t$$

Despejando tiempo se tiene:

$$x - x_0 = v \cdot t$$

$$\frac{x - x_0}{v} = t$$

Reemplazando valores resulta:

$$\frac{2400m - 0}{5\frac{m}{s}} = t$$

Recordar que 2,4 km =2400 m

Dividiendo se tiene el tiempo que se busca.

$$\boxed{480s = 8\min = t}$$

Ejemplo 4

Un automóvil mantiene una rapidez de 90 km/h ¿qué distancia recorrerá en 3 horas con 15 minutos?

Solución:
En este ejemplo, se debe considerar la posición inicial $x_0 = 0$ desde que se comienza a medir el tiempo, por lo tanto se tiene:

$$x = x_0 + v \cdot t \; = \; 0 + v \cdot t$$

$$x \; = \; v \cdot t$$

Reemplazando valores para velocidad y tiempo en horas, se tiene:

$$3h15\min = 3h + \frac{15}{60}h = 3{,}25h$$

$$x = 90\left[\frac{km}{h}\right] \cdot 3{,}25[h]$$

Multiplicando:

$$\boxed{x = 292{,}5 \text{ km}}$$

Es decir, se recorren 292,5 km con una rapidez de 90 km/h durante 3 horas con 15 min.

Ejemplo 5

Un móvil se encuentra en la posición de 4,2 km respecto a un sistema coordenado y viaja a razón de 30 m/s, en el mismo instante, desde el origen le sigue en la misma dirección y sentido un segundo móvil que viaja a razón de 130 km/h. Calcular el tiempo transcurrido en que el segundo móvil alcanza al primero y cuanto recorre cada uno al momento del encuentro.

Solución:

El enunciado muestra que se trata de un problema de encuentro y por lo tanto justo en ese instante, las posiciones de ambos cuerpos son la misma, es decir, se cumple que:

$$x_1 = x_2$$

Siendo:

$x_1 =$ Posición para móvil 1

$x_2 =$ Posición para el móvil 2

Es fácil notar que ambos móviles tienen un movimiento rectilíneo uniforme, por lo tanto se puede escribir:

$$x_{01} + v_1 \cdot t = x_{02} + v_{02} \cdot t$$

El tiempo t es el mismo para ambos cuerpos, ya que el estudio del movimiento se realiza a partir de un mismo instante.

Antes de continuar, se realizara la conversión de unidades de 30 m/s a km/h.

$$30\left[\frac{m}{s}\right] = 30\left[\frac{m}{s}\right] \cdot \frac{1[km]}{1000[m]} \cdot \frac{3600[s]}{1[h]} = 108\left[\frac{km}{h}\right]$$

En este caso se conocen las posiciones y las velocidades de los cuerpos, por lo tanto la ecuación anterior permitirá calcular el tiempo transcurrido en que el segundo cuerpo alcanza al primero.
Al reemplazar los valores correspondientes de posiciones y velocidades, se tiene:

$$4{,}2[km] + 108\frac{km}{h} \cdot t = 0 + 130\frac{km}{h} \cdot t$$

Al despejar tiempo resulta:

$$4{,}2[km] = 0 + 130\frac{km}{h} \cdot t - 108\frac{km}{h} \cdot t$$

$$4{,}2[km] = 22\frac{km}{h} \cdot t$$

$$\frac{4{,}2[km]}{22\frac{km}{h}} = t$$

Dividiendo resulta el tiempo que se pide, es decir:

$$\boxed{t = 0{,}191[h] = 11{,}455[\min] = 687{,}3[s]}$$

Cálculo de distancia recorrida por cada cuerpo, al momento del encuentro.

Conocido el tiempo de encuentro, es posible calcular la distancia recorrida por cada móvil al momento en que el segundo alcanza al primero.

Móvil 2:

La ecuación de posición coincide con la distancia recorrida ya que el móvil 2 parte desde el origen del sistema coordenado.

$$d = x_2 = x_0 + v_2 \cdot t$$

$$d = x_2 = 0 + 130\left[\frac{km}{h}\right] \cdot 0{,}191[h]$$

$$d = x_2 = 24{,}83[km]$$

$$\boxed{d = x_2 = 24{,}83[km]}$$

Móvil 1:

Como la posición es la misma, significa que el móvil **1** recorrido:

$$d_1 = 24{,}83[km] - 4{,}2[km]$$

$$d_1 = 20{,}63[km]$$

Es decir, el móvil 2 demoro un tiempo de 0,191 horas en alcanzar al móvil 1 y al momento del encuentro, el móvil 1 recorre una distancia de 20,63 km mientras que el móvil 2 recorre una distancia de 24,83 km.

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA)

Es un movimiento de trayectoria rectilínea y experimenta una variación constante en el módulo de la velocidad durante el tiempo, en este caso, se dice que el movimiento se realiza con una aceleración constante.

Cuando la variación en el módulo de la velocidad va en aumento, se dice que el movimiento es acelerado y se habla de aceleración.

Cuando la variación en el módulo de la velocidad va en disminución, se dice que el movimiento es desacelerado y se habla de retardación o desaceleración, en este caso la aceleración resulta negativa.

Las ecuaciones fundamentales del MRUA corresponden a las reglas de oro de la cinemática o ecuaciones cinemáticas:

$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ Vector de posición o Ec. itinerario (Ec. que entrega la posición x en el tiempo t)

$v = v_0 + a \cdot t$ Ecuación de velocidad en el tiempo t (Ec. que entrega la velocidad en el tiempo t)

$x = x_0 + \frac{v^2 - {v_0}^2}{2 \cdot a}$ Ecuación de posición que no depende del tiempo t

$d = s = |x - x_0|$ Distancia o camino recorrido

Significado de la simbología utilizada

$x(t) =$ Posición en el tiempo t

$x_0 =$ Posición inicial

$x =$ Posición final

$v_0 =$ Módulo de la velocidad inicial

$v =$ Módulo de la velocidad final

$a =$ Módulo de la aceleración

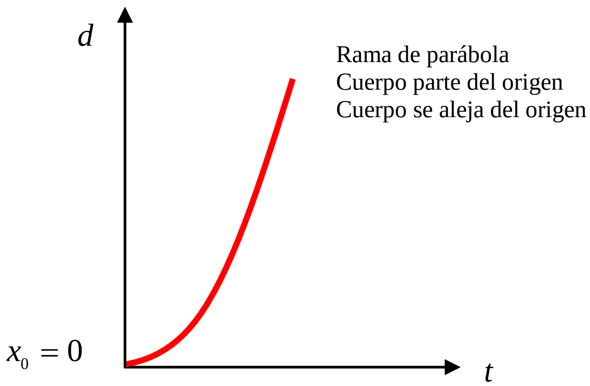
$t =$ Tiempo transcurrido

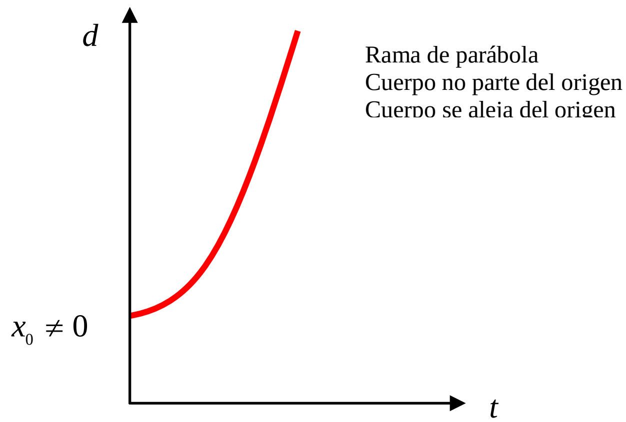
Si $a = 2\frac{m}{s^2}$ significa que el cuerpo aumenta su rapidez en $2\frac{m}{s}$ cada segundo

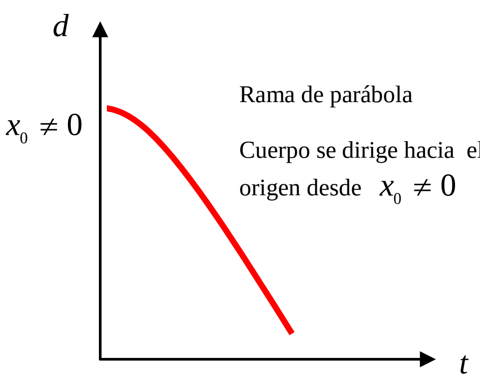
Si $a = -2\frac{m}{s^2}$ significa que el cuerpo disminuye su rapidez en $2\frac{m}{s}$ cada segundo

Representación grafica del MRUA

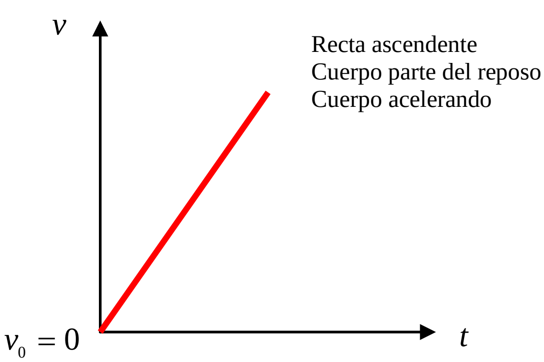
Grafica distancia versus tiempo

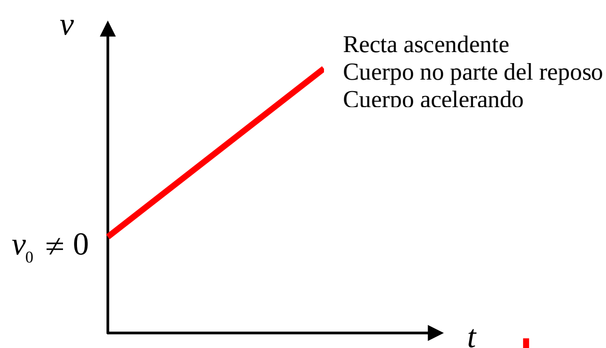


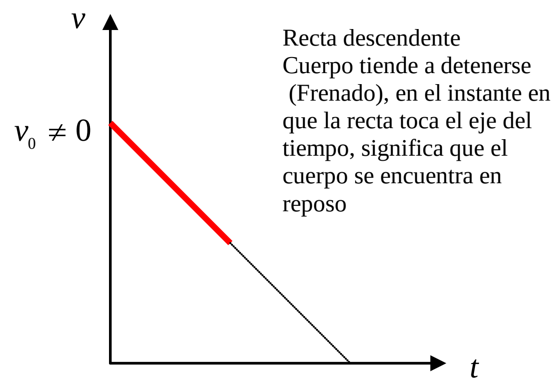




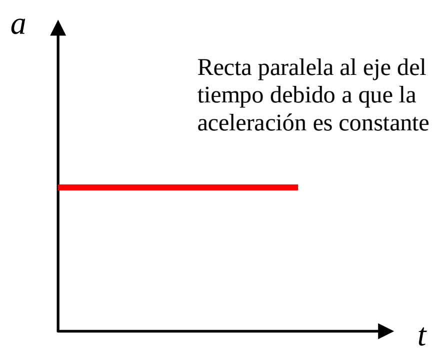
Gráfica rapidez versus tiempo





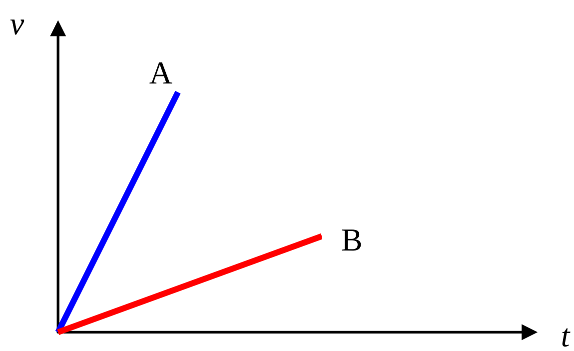


Gráfica aceleración versus tiempo



Observación 1

La inclinación de la línea recta en un gráfico rapidez – tiempo, representa el módulo de la aceleración, es decir, a mayor inclinación de la línea recta, mayor es el módulo de la aceleración.



a_A mayor que a_B ya que A tiene mayor inclinación que B

Observación 2

El área que queda comprendida bajo la curva en un grafico rapidez tiempo, representa el camino recorrido por el cuerpo.

Ejemplo 1

Un cuerpo parte desde el reposo y acelera a razón de 1,2 m/s^2, determinar:

a) El valor de la velocidad al tiempo de 15 segundos.
b) La posición alcanzada por el cuerpo al tiempo de 15 segundos.

Solución (a)

El problema indica claramente que se trata de un MRUA en donde se conoce la velocidad inicial $v_0 = 0$, la aceleración $a = 1{,}2$ m/s^2 y el tiempo trascurrido $t = 15\,s$. Las ecuaciones que rigen este movimiento corresponden a las reglas de oro de la cinemática, es decir:

1) $x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$

2) $v = v_0 + a \cdot t$

3) $x = x_0 + \frac{v^2 - v_0{}^2}{2 \cdot a}$

Eligiendo el origen del sistema coordenado en donde parte el cuerpo, se tiene que la posición inicial del cuerpo $x_0 = 0$ y como se conocen todos los valores, se puede utilizar la ecuación (1) para determinar la posición al tiempo de 15 segundos, esto es:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

$$x = 0 + 0 \cdot 15s + \frac{1}{2} 1{,}2 \frac{m}{s^2} \cdot 15^2 s^2$$

$$x = 0 + 0 + \frac{1}{2} 1{,}2 \frac{m}{s^2} \cdot 15^2 s^2$$

Multiplicando y cancelando los segundos al cuadrado, se obtiene la posición que se busca, es decir:

$$\boxed{x = 135m}$$

Ejemplo 2

Determinar la aceleración de un cuerpo que parte del reposo y luego de 20 segundos tiene una velocidad de 108 km/h.

Solución:

En este caso se conoce la velocidad inicial, el tiempo transcurrido y la velocidad final, por lo tanto la ecuación nº 2 permite despejar la aceleración, esto es:

$$v = v_0 + a \cdot t$$

Despejando:

$$v - v_0 = a \cdot t$$

$$\frac{v - v_0}{t} = a$$

$$108 \frac{km}{h} = 108 \frac{km}{h} \cdot \frac{1000m}{1km} \cdot \frac{1h}{3600s} = 30 \frac{m}{s}$$

Reemplazando valores numéricos:

$$\frac{30 \frac{m}{s} - 0}{20s} = a$$

Restando y dividiendo:

$$\boxed{1{,}5 \frac{m}{s^2} = a}$$

El resultado anterior significa que por cada segundo, el módulo de la velocidad aumenta en 1,5 m/s.

Ejemplo 3:
Una partícula varía su velocidad de 30 m/s a 16 m/s en un tiempo de 48 s. Calcular:

a) La aceleración de la partícula
b) La distancia que recorre la partícula en ese tiempo
c) Suponiendo desaceleración constante, determinar el tiempo que tarde la partícula en detenerse

a) Aceleración de la partícula

$$v = v_0 + a \cdot t$$

Despejando aceleración:

$$\frac{v - v_0}{t} = a$$

Reemplazando valores numéricos y realizando la operatoria indicada:

$$a = \frac{16 m/s - 30 m/s}{48 s}$$

$$a = \frac{-14 m/s}{48 s}$$

$$a = -0{,}291 m/s^2$$

El valor negativo significa que el cuerpo desacelera a razón de 0,291 m/s^2.

b) Distancia recorrida por la partícula

$$d = x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \times t^2$$

$$d = x = 30 m/s \cdot 48 s + \frac{1}{2} \cdot -0{,}291 \frac{m}{s^2} \cdot (48 s)^2$$

$$d = x = 1440 m + {}^{-}335{,}232 m$$

$$d = x = 1104{,}768\ m$$

c) **Tiempo que tarda la partícula en detenerse**

Ejemplo 4:

Un camión se encuentra en la posición de 440 metros respecto al origen de un sistema de referencia y tiene velocidad de 93,6 km/h, justo en ese instante el conductor aplica los frenos provocando una desaceleración de 1,4 m/s^2. Determinar:

a) La posición, respecto al origen del sistema de referencia, alcanzada por el camión al momento de detenerse.
b) La distancia recorrida por el camión al momento de detenerse.
c) El tiempo transcurrido desde que el conductor aplica los frenos hasta el momento en que el camión se detiene:

Solución (a): Posición alcanzada por el camión al momento de detenerse

El enunciado indica claramente que se trata de un problema de movimiento desacelerado (aceleración negativa) y en el se conoce la posición inicial $x_0 = 440m$, la velocidad inicial $v_0 = 93{,}6 km/h$, la desaceleración $a = 1{,}4 \frac{m}{s^2}$ y la velocidad final $v = 0$ (el camión se detiene). Según la información entregada es posible aplicar la ecuación 3 para obtener la posición en la que se detiene el camión, esto es:

$$x = x_0 + \frac{v^2 - {v_0}^2}{2 \cdot a}$$

Reemplazando valores se tiene:

$$93{,}6 \frac{km}{h} = 93{,}6 \frac{km}{h} \cdot \frac{1000m}{1km} \cdot \frac{1h}{3600s} = 26 \frac{m}{s}$$

$$x = 440m + \frac{0 - 26^2 \frac{m^2}{s^2}}{-2 \cdot 1{,}4 \frac{m}{s^2}}$$

Resolviendo la fracción resulta:

$$x = 440m + 241{,}429m$$

Sumando se obtiene la posición en la que el camión se detiene, es decir:

$$\boxed{x = 681{,}429m}$$

Solución (b): distancia recorrida por el camión hasta el momento de detenerse

Como se conoce la posición inicial y la posición final, la distancia recorrida se obtiene mediante el valor absoluto de la diferencia entre estas posiciones, es decir:

$$d = \left| x - x_0 \right|$$

Reemplazando los valores correspondientes, se tiene:

$$d = \left| 681{,}429 - 440 \right| m$$

Restando se tiene que:

$$\boxed{d = 241{,}429m}$$

Solución (c): tiempo transcurrido desde el frenado hasta que el camión se detiene**.**

Como se conoce la velocidad inicial, la aceleración y la velocidad final, el tiempo transcurrido al momento en que el camión quede en reposo, se calcula con la ecuación 2, esto es:

$$v = v_0 + a \cdot t$$

Despejando el tiempo:

$$\frac{v - v_0}{a} = t$$

Reemplazando valores resulta:

$$\frac{0 - 26\frac{m}{s}}{-1{,}4\frac{m}{s^2}} = t$$

Dividiendo y cancelando unidades se tiene el tiempo que se busca, es decir:

$$\boxed{18{,}571s = t}$$

Ejemplo 5:

En una carretera rectilínea, un camión viaja a razón de 70 km/h, en ese mismo instante, 5 km más atrás le sigue en la misma dirección y sentido, una camioneta que lleva la velocidad de 10 m/s y que acelera a razón de 0,1 m/s^2, determinar:

a) Tiempo en que la camioneta alcanza al camión.
b) Posición de encuentro.
c) Distancia recorrida por cada cuerpo al momento del encuentro.
d) Velocidad que alcanzada por la camioneta al momento de alcanzar al camión.

Solución (a): Tiempo de encuentro

El problema corresponde a un encuentro de movimiento, por lo tanto, al momento del encuentro se cumple que:

$$x_{\text{camión}} = x_{camioneta}$$

En este caso, el camión tiene un movimiento rectilíneo uniforme mientras que la camioneta tiene un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, el tiempo es el mismo para ambos ya que el estudio del movimiento comienza desde un mismo instante para ambos cuerpos, por lo tanto:

$$x_{0\,\text{camión}} + v \cdot t = x_{0\,\text{camioneta}} + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2$$

Eligiendo el origen del sistema coordenado donde parte la camioneta, se tiene que la posición inicial para ella es cero y la ecuación anterior queda:

$$\text{x (Camión)} = \text{x (Camioneta)}$$

$$x_0 + v \cdot t = v_0 \cdot t + \frac{1}{2}a \cdot t^2$$

Antes de reemplazar datos se homogenizará las unidades de medida, esto es:

$70\dfrac{km}{h} = \dfrac{70}{3{,}6}\dfrac{m}{s} = 19{,}444\dfrac{m}{s}$ y

$5km = 5 \cdot 1000m = 5000m$

Como ya se ha homogenizado las unidades de medida, no las escribiremos en el procedimiento matemático, esto es:

$$5000 + 19{,}444 \cdot t = 10 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 0{,}1 \cdot t^2$$

Expresión que corresponde a una ecuación de segundo grado, ordenando esta ecuación, resulta:

$$0 = 0{,}05 \cdot t^2 + 10 \cdot t - 19{,}444 \cdot t - 5000$$

$$0 = 0{,}05 \cdot t^2 - 9{,}444 \cdot t - 5000$$

Resolviendo la ecuación cuadrática se tiene:

$$t = \frac{9{,}444 \pm \sqrt{9{,}444^2 - 4 \cdot 0{,}05 \cdot -5000}}{2 \cdot 0{,}05}$$

$$t = \frac{9{,}444 \pm 33{,}003}{0{,}1}$$

$$t_1 = \frac{9{,}444 + 33{,}003}{0{,}1} = 424{,}47 \text{ s}$$

$$t_2 = \frac{9{,}444 - 33{,}003}{0{,}1} = \text{no xiste, por ser valor negativo}$$

Es decir, el tiempo transcurrido en que la camioneta alcanza al camión es 424,47 segundos respecto de la condición dada.

Solución (b): posición de encuentro.

Como ahora se conoce el tiempo, es fácil calcular la posición de encuentro de los dos cuerpos. Como la posición es común, da lo mismo calcularla utilizado cualquiera de los dos cuerpos, camioneta o camión.

Posición Camioneta:

$$x_{\text{camionta}} = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$x_{\text{camionta}} = 0 + 10\frac{m}{s} \cdot 424{,}47s + \frac{1}{2} \cdot 01\frac{m}{s^2} \cdot 424{,}47^2\, s^2$$

Cancelando la unidad de segundo, multiplicando y sumando se obtiene la posición común, esto es:

$$\boxed{x_{\text{camionta}} = 13253{,}439m}$$

Es decir, la posición donde la camioneta alcanza al camión es 13253,439 metros respecto del origen del sistema coordenado.

Solución (c): distancia recorrida por cada cuerpo al momento del encuentro.

Cuando un cuerpo parte del origen, la distancia recorrida coincide con la posición final, en este caso, la camioneta parte del origen, por lo tanto su distancia recorrida coincide con su posición final (posición de encuentro), es decir:

$$d_{\text{camioneta}} = x_{\text{camioneta}} = 13253{,}439m$$

La distancia recorrida por el camión corresponde a la distancia recorrida por la camioneta menos la posición inicial de 5000 metros, es decir:

$$d_{\text{camión}} = d_{\text{camioneta}} - 5000m = 13253{,}439m - 5000m = 8253{,}439m$$

Solución (d): velocidad de la camioneta al momento de alcanzar al camión.

Como se conoce la velocidad inicial, la aceleración y el tiempo transcurrido en que la camioneta alcanza al camión, es fácil conocer su velocidad en ese instante, solo hay que aplicar la ecuación velocidad dependiente del tiempo, es decir:

$$v = v_0 + a \cdot t$$

Reemplazando valores:

$$v = 10\frac{m}{s} + 0{,}1\frac{m}{s^2} \cdot 424{,}47s$$

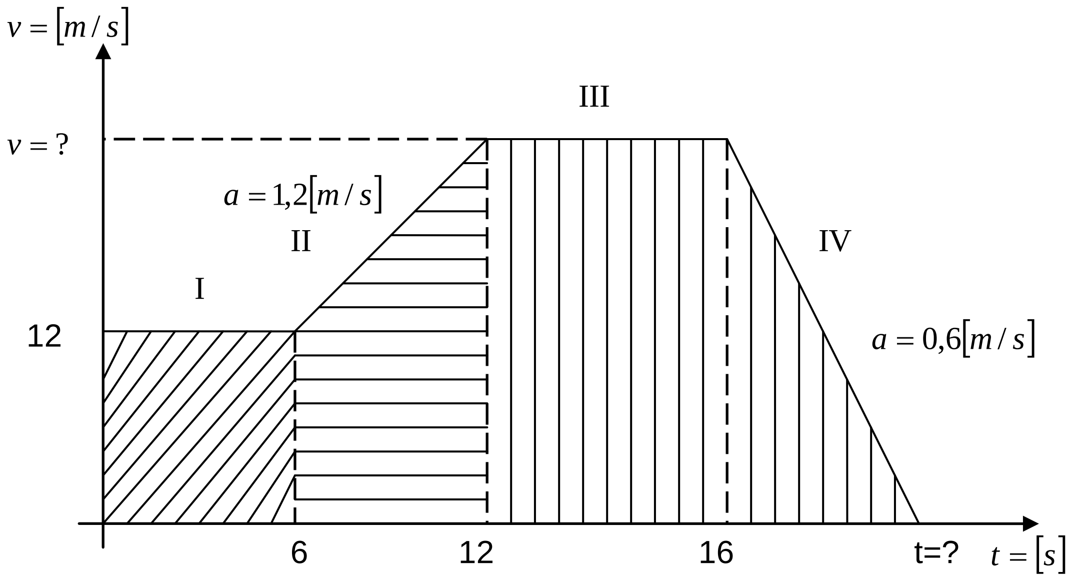
Cancelando la unidad de segundo, multiplicando y sumando, se tiene el valor pedido, es decir:

$$\boxed{v = 52{,}447\frac{m}{s}}$$

Ejemplo 6

Un cuerpo se está moviendo con una rapidez de 12 $[m/s]$, luego de 6 segundos se le imprime un aceleración de 1,2 $[m/s^2]$ durante 6 segundo mas, continúa moviéndose con movimiento rectilíneo uniforme durante otros 4 segundos finalmente se le aplican los frenos hasta que se detiene con una retardación de 0,6 $[m/s^2]$. Dibujar gráfico rapidez – tiempo para el movimiento de este cuerpo y determinar el camino total recorrido.

a) Representación grafica de información entregada.



Calculo de datos faltantes del grafico.

Tramo II.

$$v = v_0 + at$$

$$v = 12\left[\frac{m}{s}\right] + 1,2\left[\frac{m}{s^2}\right] \cdot 6[s]$$

$$v = 19,2\left[\frac{m}{s}\right]$$

Tramo IV

$$v = v_0 + at$$

$$0 = v_0 + at$$

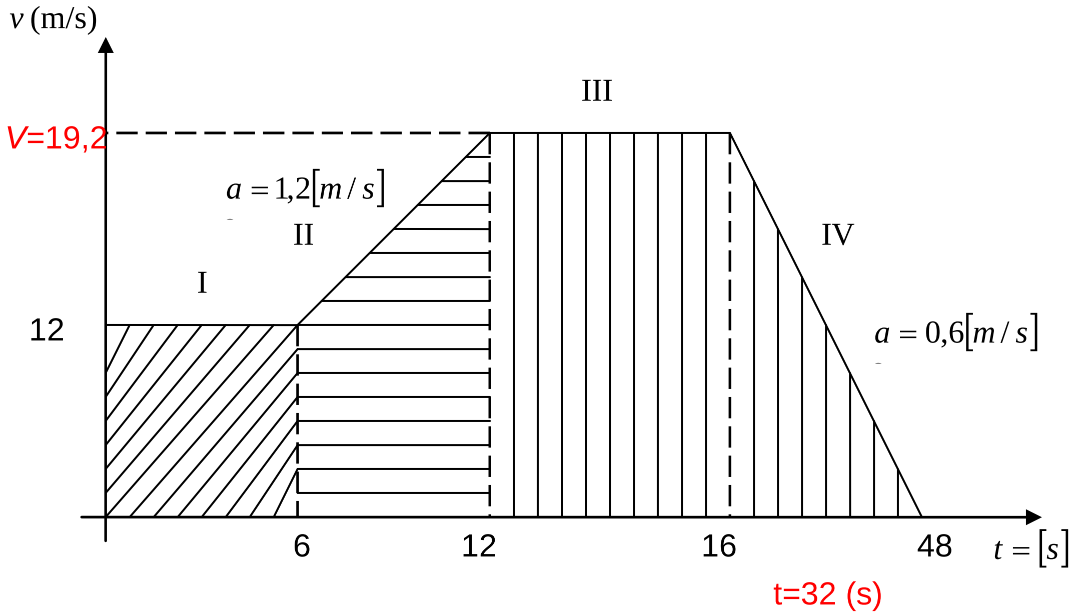
$$-v_0 = at$$

$$-\frac{v_0}{a} = t$$

$$t = \frac{-19,2[\cancel{m}/\cancel{s}]}{-0,6[\cancel{m}/s^2]}$$

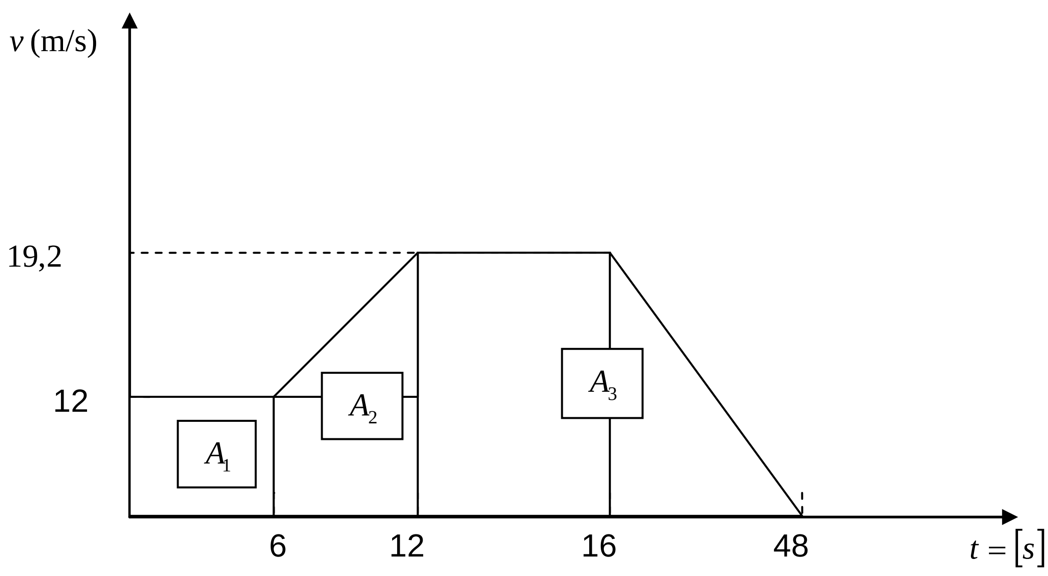
$$t = 32[s]$$

Grafica con todos los datos correspondientes:



b) Cálculo de la distancia final recorrida:

Para el cálculo de la distancia final recorrida se debe sacar el área que existe debajo de la línea del gráfico (área bajo la curva), para ellos este último se subdivide en diferentes partes, a modo que queden solamente figuras geométricas conocidas para nosotros y, por consiguiente, fácil de calcular. Por tal razón, separando las diferentes áreas se tiene:



La distancia total corresponde a:

$$d_{Total} = A_1 + A_2 + A_3$$

$$d_{Total} = (A_{\text{rectangulo}})_1 + (A_{\text{trapecio}})_2 + (A_{\text{trapecio}})_3$$

$$d_{Total} = (a \cdot b)_1 + \left(\frac{a+b}{2} \cdot h\right)_2 + \left(\frac{a+b}{2} \cdot h\right)_3$$

$$d_{Total} = (12 \cdot 6) + \left(\frac{19{,}2 + 12}{2} \cdot 6\right) + \left(\frac{36 + 4}{2} \cdot 19{,}2\right)$$

$$d_{Total} = 72 + 93{,}6 + 384$$

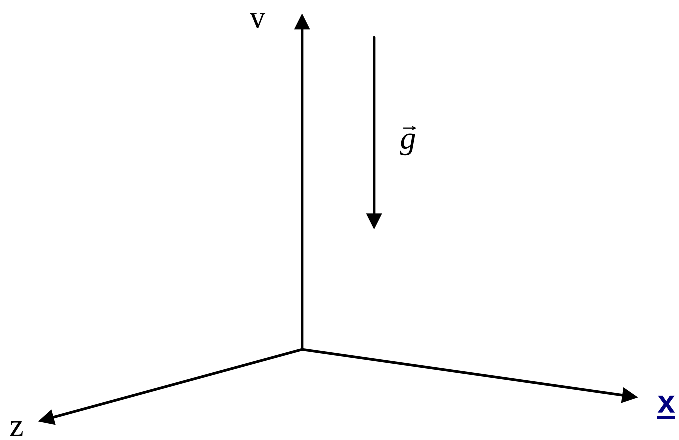
$$d_{Total} = 549{,}6[m]$$

Es decir, desde que se comienza el estudio del movimiento, la distancia total recorrida por el cuerpo es de 549,6 metros.

Caso particular del MRUA (Caída libre y lanzamientos verticales)

La caída libre al igual que los lanzamientos verticales son un caso particular del MRUA ya que en ellos la aceleración constante corresponde a la aceleración de gravedad $\vec{g}$ que es un vector dirigido verticalmente hacia el centro de la tierra y cuyo valor (módulo) promedio aproximadamente es

$980\,\frac{cm}{s^2}$ o $9{,}8\,\frac{m}{s^2}$ o $32{,}2\,\frac{\text{pie}}{\text{s}^2}$



Como se trata de un caso particular del MRUA, las ecuaciones a utilizar son las mismas reglas de oro de la cinemática vistas anteriormente, pero en este caso se reemplazará la variable x por la variable y y la aceleración constante a se reemplazará por la aceleración de gravedad g, resultando:

$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ Vector de posición o Ec. itinerario (Ec. que entrega la posición y en el tiempo t)

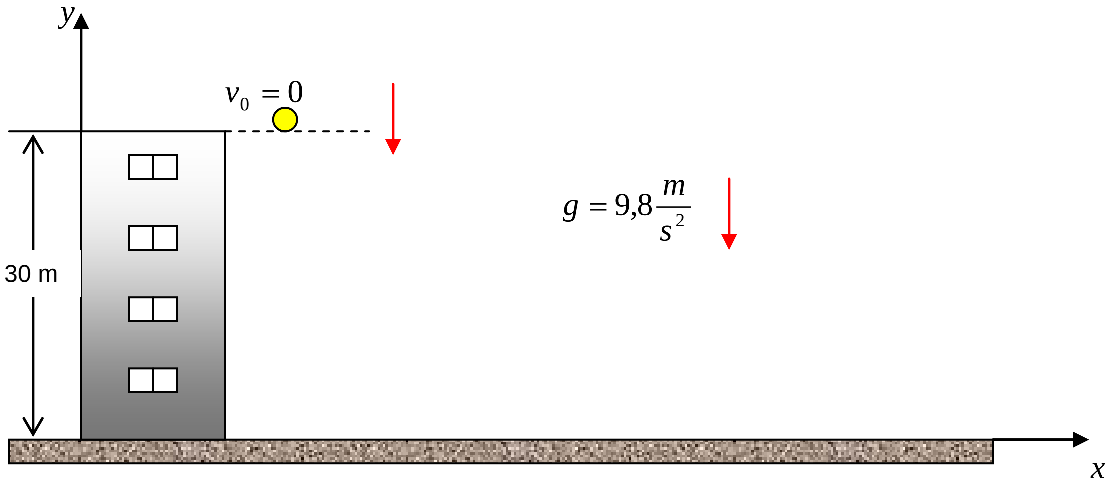
$v = v_0 - gt$ Ecuación de velocidad en el tiempo t (Ec. que entrega la velocidad en el tiempo t)

$y = y_0 - \frac{v^2 - {v_0}^2}{2g} = y_0 + \frac{{v_0}^2 - v^2}{2g}$ Ecuación de posición independiente del tiempo t

Ejemplo 1

Desde lo alto de un edificio de 30 metros de altura, se suelta un cuerpo, determinar:

a) Tiempo que demora el cuerpo en llegar al suelo
b) Velocidad con que el cuerpo llega al suelo



Solución (a): Tiempo que el cuerpo demora en llegar al suelo.

Eligiendo el origen del sistema de referencia en el suelo, se tiene que $y_0 = 30m$, $g = 9,8\frac{m}{s^2}$ y además como el cuerpo se suelta, significa que $v_0 = 0$, de acuerdo a esta información es posible utilizar la ecuación de posición dependiente del tiempo, esto es:

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

La posición final se alcanza cuando el cuerpo llega al suelo, por lo tanto $y = 0$. Reemplazando los valores numéricos, resulta:

$$0 = 30m + 0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9,8\frac{m}{s} t^2$$

$$0 = 30m - 4,9\frac{m}{s} t^2$$

Despejando t se tiene:

$$4,9\frac{m}{s} t^2 = 30m$$

$$t^2 = \frac{30m}{4,9\frac{m}{s}}$$

$$t^2 = 6,122s$$

Aplicando raíz cuadrada resulta:

$$\boxed{t = 2{,}474s}$$

Es decir, le tiempo que demora el cuerpo en llegar al suelo es de 2,474 segundos.

Solución (b): velocidad con que el cuerpo llega al suelo.

En este caso, para calcular la velocidad con que el cuerpo llega al suelo (velocidad final), se puede utilizar las ecuaciones:

$$v = v_0 + at$$

o

$$y = y_0 + \frac{v_0{}^2 - v}{2g}$$

Claramente nos quedaremos con la primera ecuación ya que es directa y más simple, por lo tanto:

$$v = v_0 - gt$$

Reemplazando los valores correspondientes resulta:

$$v = 0 - 9{,}8\frac{m}{s^2} \cdot 2{,}474s$$

Cancelando por segundo y multiplicando se obtiene el valor de la velocidad que se busca, es decir:

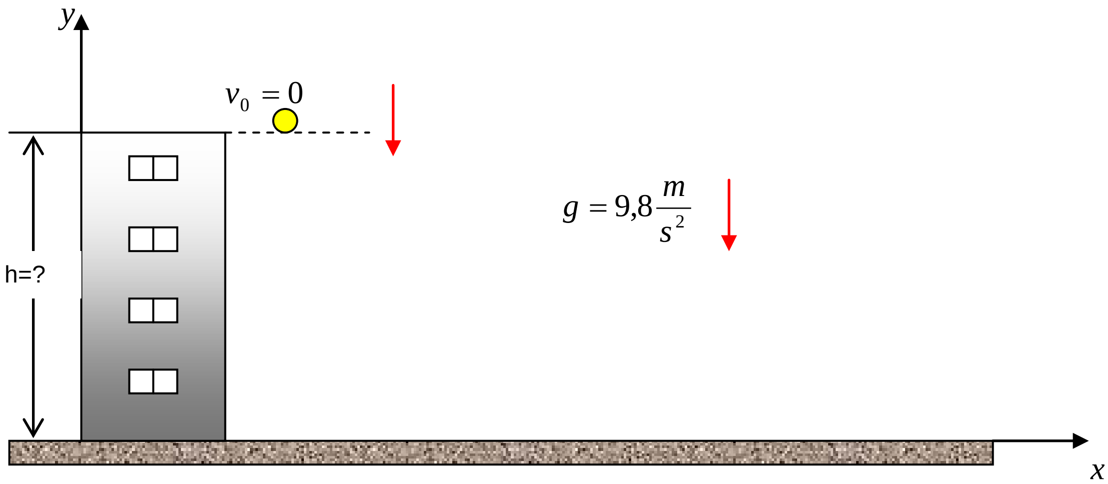
$$\boxed{v = -24{,}245\frac{m}{s}}$$

El signo negativo de la velocidad significa que el cuerpo se dirige hacia abajo.

Ejemplo 2

Un cuerpo demora 3,5 segundos en caer al suelo, desde cierta altura, determinar:

a) altura de donde cae el cuerpo.
b) velocidad con que llega al suelo



Solución (a): altura desde donde cae el cuerpo.

Eligiendo nuevamente el suelo como el origen del sistema de referencia, se tiene que $y_0 = h$, $y = 0$, $v_0 = 0$, $t = 3{,}5\,s$ y $g = 9{,}8\frac{m}{s^2}$, con estos datos, para calcular la altura de donde cae el cuerpo, se debe utilizar la ecuación de posición dependiente del tiempo, esto es:

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Reemplazando los valores antes indicados, se tiene:

$$0 = h + 0 \cdot 3{,}5s - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\frac{m}{s} \cdot 3{,}5^2 s^2$$

$$0 = h - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\frac{m}{s} \cdot 3{,}5^2 s^2$$

$$0 = h - 60{,}025m$$

Despejando resulta:

$$\boxed{h = 60{,}025m}$$

El resultado anterior significa que la altura de donde cae el cuerpo es de 60,025 metros.

Solución (b): velocidad con que el cuerpo llega al suelo

Como se conoce la velocidad inicial $v_0 = 0$, la aceleración de gravedad $g = 9{,}8\frac{m}{s^2}$ y el tiempo de caída $t = 3{,}5s$, se puede utilizar la ecuación velocidad en función del tiempo, es decir:

$$v = v_0 - gt$$

Reemplazando los valores antes indicados se tiene:

$$v = 0 - 9{,}8\frac{m}{s^2} \cdot 3{,}5s$$

$$\boxed{v = -34{,}3\frac{m}{s}}$$

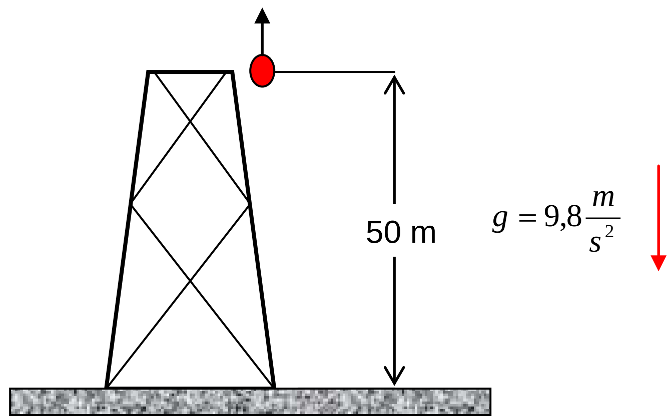
Por lo tanto el valor de la velocidad del cuerpo, al llegar al suelo es de 34 m/s, el signo negativo indica que el cuerpo se dirige hacia la superficie de la tierra.

Ejemplo 3

Desde lo alto de una torre de 50 metros se lanza un proyectil, verticalmente hacia arriba con una velocidad de 60 m/s, determinar:

a) Posición del proyectil al tiempo de 4 segundos, respecto al suelo.
b) Velocidad del proyectil al tiempo de 4 segundos.

c) Altura máxima alcanzada por el proyectil respecto al suelo.
d) Tiempo que demora el proyectil en alcanzar la altura máxima.
e) Tiempo total de vuelo.
f) Velocidad con que el proyectil llega al suelo.



Solución (a): Posición al tiempo de 4 segundos

Ecuación posición dependiente del tiempo:

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

Reemplazando valores:

$$y = 50m + 60\frac{m}{s}\cdot 4s - \frac{1}{2}9{,}8\frac{m}{s^2}\cdot 16s^2$$

Cancelando unidades de segundo y multiplicando:

$$y = 50m + 240m - 78{,}4m$$

Sumando y restando:

$$\boxed{y = 211{,}6m}$$

Es decir, la posición del proyectil al tiempo de 4 segundos, respecto al suelo es de 211,6 metros.

Solución (b): velocidad al tiempo de 4 segundos

Como se conoce la velocidad inicial y el tiempo de 4 segundos, se debe aplicar la ecuación de velocidad dependiente del tiempo, es decir:

$$v = v_0 - gt$$

Reemplazando valores correspondientes:

$$v = 60\frac{m}{s} - 9{,}8\frac{m}{s^2} \cdot 4s$$

Cancelando la unidad de segundo, multiplicando y restando se obtiene el valor de la velocidad al tiempo de 4 segundos, es decir:

$$\boxed{v = 20{,}8\frac{m}{s}}$$

Solución (c): Altura máxima del proyectil respecto al suelo

En la altura máxima alcanzada por un cuerpo, la velocidad es cero, por lo tanto utilizando la ecuación de posición independiente del tiempo, se obtiene el valor d la altura máxima, esto es:

$$y = y_0 + \frac{{v_0}^2 - v^2}{2g}$$

Reemplazando valores numéricos se obtiene:

$$y = 50m + \frac{60^2\frac{m^2}{s^2} - 0}{2 \cdot 9{,}8\frac{m}{s^2}}$$

Cancelando unidades de metro, segundos y dividiendo:

$$y = 50m + 183{,}673m$$

Sumando se tiene el valor pedido:

$$\boxed{y = 233{,}673m}$$

Es decir, la altura máxima alcanzada por el proyectil, que es disparado de una altura de 50metros, es 233, 673metros.

Solución (d): Tiempo en que el proyectil alcanza la altura máxima

Como se conoce: velocidad inicial, velocidad final y aceleración de gravedad, se utiliza la ecuación de velocidad dependiente del tiempo, esto es:

$$v = v_0 - gt$$

Como la velocidad final $v = 0$, resulta:

$$0 = v_0 - gt$$

Despejando tiempo:

$$gt = v_0$$

$$t = \frac{v_0}{g}$$

Reemplazando valores numéricos se tiene el tiempo empleado en la altura máxima:

$$t = \frac{60\frac{m}{s}}{9{,}8\frac{m}{s^2}}$$

Cancelando unidades de medida y dividiendo se obtiene:

$$\boxed{t = 6{,}122s}$$

Es decir el tiempo que tarda el proyectil en alcanzar la altura máxima es de 6,122 segundos.

Solución (e): Tiempo total de vuelo

El tiempo total de vuelo se pude obtener de diferentes maneras y una de ellas es aplicando la ecuación de posición dependiente del tiempo debido a que se conoce la posición inicial, la posición final ($y = 0$), la velocidad inicial y la aceleración de gravedad.

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Reemplazando valores numéricos resulta:

$$0 = 50m + 60\frac{m}{s} t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\frac{m}{s^2} t^2$$

Obviando las unidades de medida debido a que son homogéneas, se tiene:

$$0 = 50 + 60t - 4{,}9t^2$$

Ordenando la ecuación de segundo grado resulta:

$$4{,}9t^2 - 60t - 50 = 0$$

Aplicando la formula de solución a la ecuación cuadrática se tiene:

$$t = \frac{60 \pm \sqrt{60^2 - 4 \cdot 4{,}9 \cdot -50}}{2 \cdot 4{,}9} = \frac{60 \pm \sqrt{60^2 + 4 \cdot 4{,}9 \cdot 50}}{9{,}8}$$

Resolviendo la operatoria al interior de la raíz se tiene:

$$t = \frac{60 \pm \sqrt{4580}}{9{,}8}$$

Resolviendo la raíz cuadrada resulta:

$$t = \frac{60 \pm 67{,}676}{9{,}8}$$

Resultan dos valores para el tiempo, pero un de ellos es negativo por lo tanto no existe, el valor positivo del tiempo resulta sumando en el numerador, esto es:

$$t = \frac{60 + 67{,}676}{9{,}8} = \frac{127{,}676}{9{,}8} = 13{,}028$$

Es decir, le tiempo que demora el proyectil, desde que es disparado hasta que llega al suelo es de 13,028 segundos.

Solución (f): Velocidad con que el proyectil llega al suelo.

Como ahora se conoce el tiempo que tarda el proyectil en llegar al suelo, la velocidad de llegada es fácil determinarla aplicando la ecuación de velocidad dependiente del tiempo, esto es:

$$v = v_0 - gt$$

Reemplazando los valores numéricos resulta:

$$v = 60\frac{m}{s} - 9{,}8\frac{m}{s^2} \cdot 13{,}028s$$

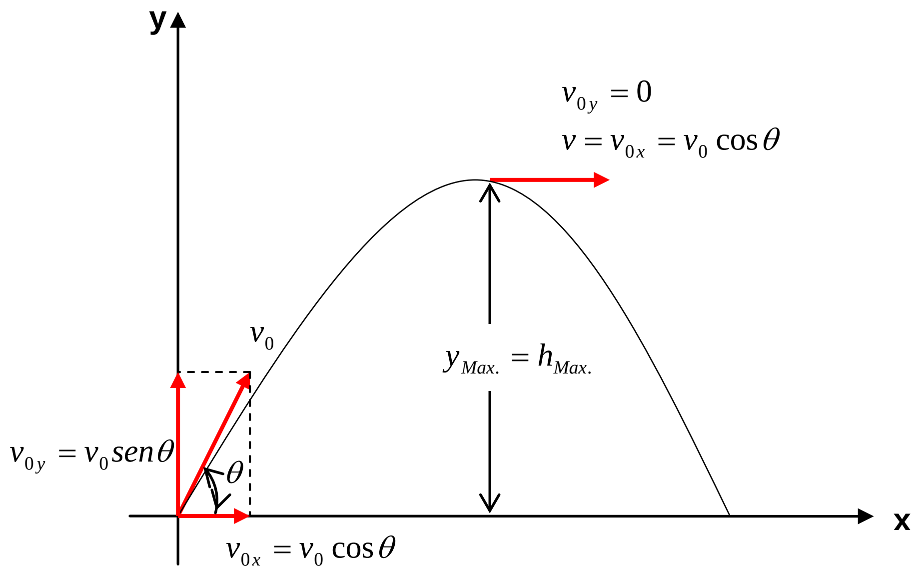
Cancelando unidad de segundo, multiplicando y restando se obtiene la velocidad pedida.

$$\boxed{v = -67{,}674\frac{m}{s}}$$

El signo negativo significa que el proyectil viene hacia abajo con un valor de velocidad de 67,674 m/s.

Lanzamiento de proyectiles

El lanzamiento de proyectiles corresponde a una superposición de dos movimientos rectilíneos en forma simultánea, su trayectoria es una curva parabólica., El caso más simple es aquel en que uno de los movimientos se realiza horizontalmente a lo largo del eje **X** con velocidad constante, y el otro movimiento se realiza verticalmente a lo largo del eje **Y** con la aceleración de gravedad g. Para simplificar el estudio, se debe separar los movimientos desde su inicio en dos movimientos componentes, uno para el eje **X** (movimiento uniforme) y otro para el eje **Y** (movimiento rectilíneo uniformemente acelerado).



Las ecuaciones que rigen este movimiento corresponden a las reglas de oro de la cinemática.

Movimiento para eje X:

$$x = x_0 + v_0 \cos\theta \cdot t$$

Movimiento para eje Y:

$$y = y_0 + v_0 sen\theta \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$v = v_0 - g \cdot t$$

$$y = y_0 + \frac{(v_0 sen\theta)^2 - v^2}{2g}$$

Como el movimiento tiene dos componentes, se debe tener cuidado al momento de calcular le velocidad del proyectil ya que:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$

Y por lo tanto el valor o magnitud de la velocidad del proyectil queda determinada por Pitágoras, es decir:

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{(\vec{v}_x)^2 + (\vec{v}_y)^2}$$

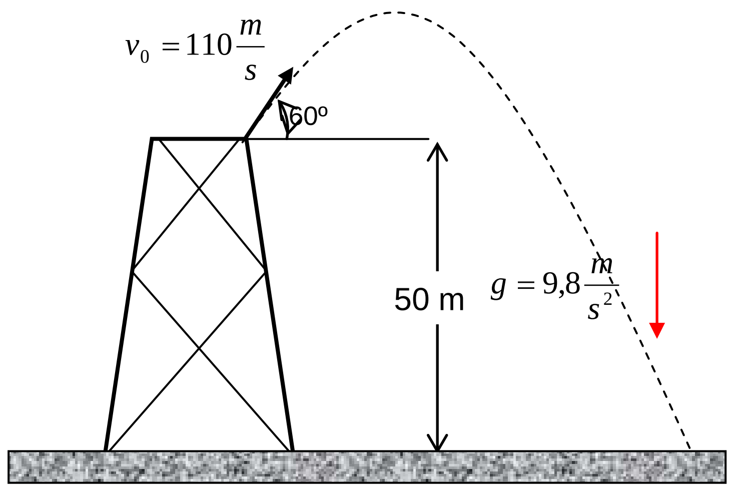
Y su dirección queda determinada por:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\vec{v}_y}{\vec{v}_x}\right)$$

Ejemplo:

Desde lo alto de una torre de 50 metros, se dispara un proyectil con una velocidad de $110\frac{m}{s}$ a un ángulo de 60º por encima de la horizontal, determinar:

a) Altura máxima alcanzada por el proyectil, respecto al suelo
b) Tiempo que el proyectil alcanza la altura máxima
c) Tiempo total de vuelo del proyectil
d) Alcance horizontal máximo del proyectil
e) Velocidad con que el proyectil llega al suelo



Solución (a): Altura máxima respecto al suelo:

Como una altura está asociada al eje Y, se debe trabajar con las ecuaciones de dicho eje, ahora como en la altura máxima, la velocidad del eje Y se hace cero, la ecuación nº 3 satisface las condiciones conocidas, es decir:

$$y = y_0 + \frac{(v_0 sen\theta)^2 - v^2}{2g}$$

Eligiendo un sistema coordenado a partir del suelo y además como en altura máxima $v = 0$ resulta:

$$y = y_0 + \frac{(v_0 sen\theta)}{2g}$$

Reemplazando los valores correspondientes para posición inicial, velocidad de disparo, ángulo de disparo y aceleración de gravedad resulta:

$$y = y_{max.} = 50m + \frac{(110sen60^{o})^2 \frac{m^2}{s^2}}{2 \cdot 9{,}8 \frac{m}{s^2}}$$

Realizando operatoria básica se tiene:

$$\boxed{y = y_{max.} = 513{,}010m}$$

Es decir la altura máxima alcanzada por el proyectil respecto al suelo es de 513,010 metros.

Solución (b): Tiempo en que el proyectil alcanza la altura máxima.

Para calcular el tiempo en que el proyectil alcanza la altura máxima es posible utilizar la ecuación de posición dependiente del tiempo como también la ecuación de velocidad dependiente del tiempo ya que ambas tienen todas las condiciones que se necesita, obviamente es preferible trabajar con la ecuación de posición dependiente del tiempo debido a que es más simple su tratamiento.

$$v = v_0 sen\theta - gt$$

Como se indico anteriormente en la altura máxima la velocidad del eje Y es igual a cero, por lo tanto:

$$0 = v_0 sen\theta - gt$$

Despejando el tiempo resulta:

$$gt = v_0 sen\theta$$

$$t = \frac{v_0 sen\theta}{g}$$

Reemplazando valores numéricos resulta:

$$t = \frac{110 sen 60º \frac{m}{s}}{9{,}8 \frac{m}{s^2}}$$

Realizando la operatoria básica resulta el tiempo que se desea:

$$\boxed{t = 9{,}721\, s}$$

Es decir el tiempo en que el proyectil alcanza la altura máxima es de 9,721 segundos.

Solución ©: Tiempo total de vuelo del proyectil.

Hasta el momento ha sido imposible utilizar la ecuación del eje x debido a que no presenta toda la información para trabajar con ella y en esta oportunidad se volverá a trabajar en dicho eje. La ecuación que permite trabajar de inmediato el tiempo total de vuelo es la ecuación de posición dependiente del tiempo, es decir:

$$y = y_0 + v_0 sen\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

Para este caso la posición final del eje Y es igual a cero, ya que el proyectil llega al suelo y como todas las unidades de medida son homogéneas, es posible obviar le escritura de las unidades de medida y sólo trabajar con lo valores numéricos, esto es:

$$0 = 50 + 110 sen 60 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 t^2$$

Ordenando para que el término que acompaña al tiempo al cuadrado resulte positivo se tiene:

$$4{,}9 t^2 - 95{,}263 t - 50 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática resulta:

$$t = \frac{95{,}263 \pm \sqrt{(-95{,}263)^2 - 4 \cdot 4{,}9 \cdot -50}}{2 \cdot 4{,}9}$$

Resolviendo la raíz cuadrada se tiene:

$$t = \frac{95{,}263 \pm 100{,}275}{2 \cdot 4{,}9}$$

Realizando la operatoria resulta:

$$t_1 = \frac{95{,}263 + 100{,}275}{9{,}8} = \frac{178{,}690}{9{,}8} = 19{,}953s$$

Es decir, el tiempo en que el proyectil tarda en llegar al suelo es de 19,953 segundos. El tiempo 2 no existe por ser negativo.

Solución (d): Alcance horizontal máximo alcanzado por el proyectil.

Como se conoce el tiempo total de vuelo, es posible utilizar la ecuación del eje X para obtener el alcance horizontal máximo.

$$x = x_0 + v_0 \cos\theta \cdot t$$

Al reemplazar los datos se tiene que la posición inicial para el eje X es cero, por lo tanto:

$$x = 0 + 110\frac{m}{s}\cos 60^{\circ} \cdot 19{,}953s$$

Realizando la operatoria se tiene:

$$\boxed{x = 1097{,}415m}$$

Es decir el alcance máximo alcanzado por el proyectil respecto al suelo es de 1097,415 metros.

Solución (d): Velocidad con que el proyectil llega al suelo

La velocidad con que el proyectil llega al suelo corresponde a:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(\vec{v}_x)^2 + (\vec{v}_y)^2}$$

Componente horizontal de la velocidad del proyectil al llegar al suelo:

$$v_x = v_0 \cos\theta \cdot t$$

Reemplazando valores numéricos resulta:

$$v_x = 110\frac{m}{s}\cos 60^{\circ}$$

Multiplicando se tiene la componente horizontal de la velocidad, es decir:

$$v_x = 55\frac{m}{s}$$

Componente vertical de la velocidad del proyectil al llegar al suelo:

$$v_y = v_0 sen\theta - gt$$

Reemplazando valores numéricos resulta:

$$v_y = 110\frac{m}{s}sen60º - 9,8\frac{m}{s^2}\cdot 19,953s$$

Multiplicando y dividiendo se tiene la componente vertical de la velocidad, es decir:

$$v_y = -100,277\frac{m}{s^2}$$

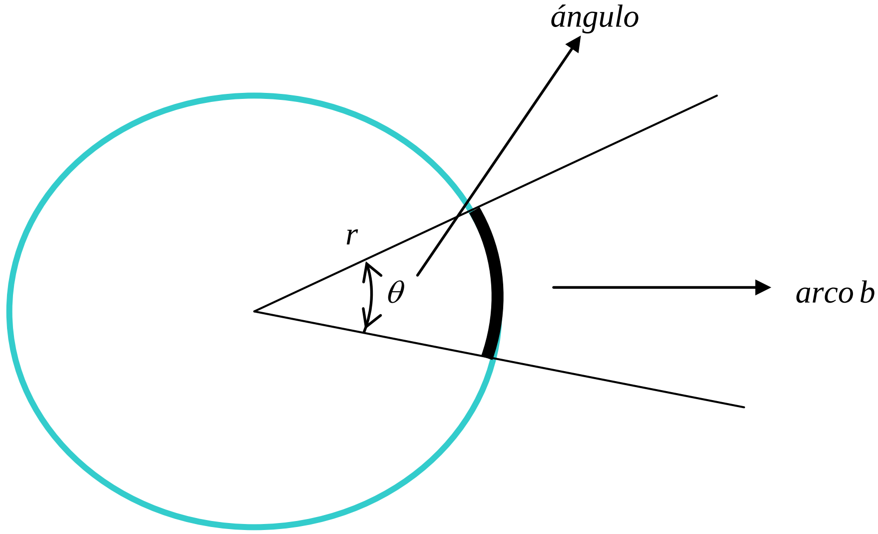
Por lo tanto la velocidad del proyectil al momento de llegar al suelo es de:

$$|\vec{v}| = \sqrt{55^2 + (-100,277)^2}\,\frac{m}{s}$$

$$\boxed{|\vec{v}| = 114,370\frac{m}{s}}$$

Movimiento circular

Un movimiento es circular cuando su trayectoria es una circunferencia. En esta trayectoria circular el cuerpo describe al mismo tiempo **arco** de circunferencia (arco) y **ángulo central**
(ángulo).



b = Longitud de arco de circunferencia = arco medido en unidades de longitud.
θ = Ángulo central medido en radianes
r = Radio de la circunferencia

El arco, ángulo y el radio cumplen con la relación:

$$b = r \cdot \theta$$

Ejemplo 1:

Determinar el ángulo central θ correspondiente a un arco de circunferencia de 28 cm siendo el radio de la circunferencia igual a 8 cm.

Solución:
La relación entre arco, radio y ángulo central es $b = r \cdot \theta$, como en este ejemplo se conoce arco y radio de la circunferencia, se debe despejar el ángulo θ, es decir:

$$b = r \cdot \theta$$

$$\frac{b}{r} = \theta$$

Reemplazando valores correspondientes:

$$\frac{28cm}{8cm} = \theta$$

Al resolver la división se cancelan las unidades de longitud y se dice que
el resultado obtenido queda expresado en radianes, es decir:

$$3{,}5\,rad = \theta$$

Ejemplo 2

Determinar el radio de una circunferencia sabiendo que un ángulo central de 5,2 rad intersecta a un arco de 14 cm de longitud.

Solución:

En este caso se conoce el ángulo θ y el arco b, por lo tanto, de la expresión $b = \theta \cdot r$, se debe despejar el radio, esto es:

$$\frac{b}{\theta} = r$$

Reemplazando los valores correspondientes resulta:

$$\frac{24cm}{5{,}2rad} = r$$

Dividiendo:

$$4{,}615cm = r$$

Es decir, el radio de la circunferencia es de 4,615 cm.

A diferencia del movimiento recto en el movimiento circular se presentan dos velocidades, estas son:

- Velocidad lineal o tangencial que en la industria metalúrgica se conoce con el nombre de velocidad circunferencial o velocidad periférica o velocidad de corte.(velocidad referida a la línea descrita cuando el cuerpo cambia de posición)
- Velocidad angular Velocidad referida al ángulo descrito por el radio vector.

Rapidez lineal o circunferencial media (módulo de la velocidad lineal media) v

Se define como el cuociente entre en arco descrito y el tiempo empleado en describirlo, es decir:

$$v = \frac{arco}{tiempo} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{b_2 - b_1}{t_2 - t_1} \quad \text{O simplemente} \quad v = \frac{b}{t}$$

Ejemplo 3
Un cuerpo recorre un arco de circunferencia de 60cm empleando un tiempo de 12 segundos ¿Con qué rapidez lineal se recorrió el arco?, expresar el resultado en cm/s y m/s.

Solución:

Se pide determinar la rapidez lineal con que se recorrió un arco, por lo tanto se debe aplicar la definición antes indicada, es decir:

$$v = \frac{b}{t}$$

Reemplazando los valores de arco, tiempo y dividiendo se obtiene la velocidad lineal que se pide:

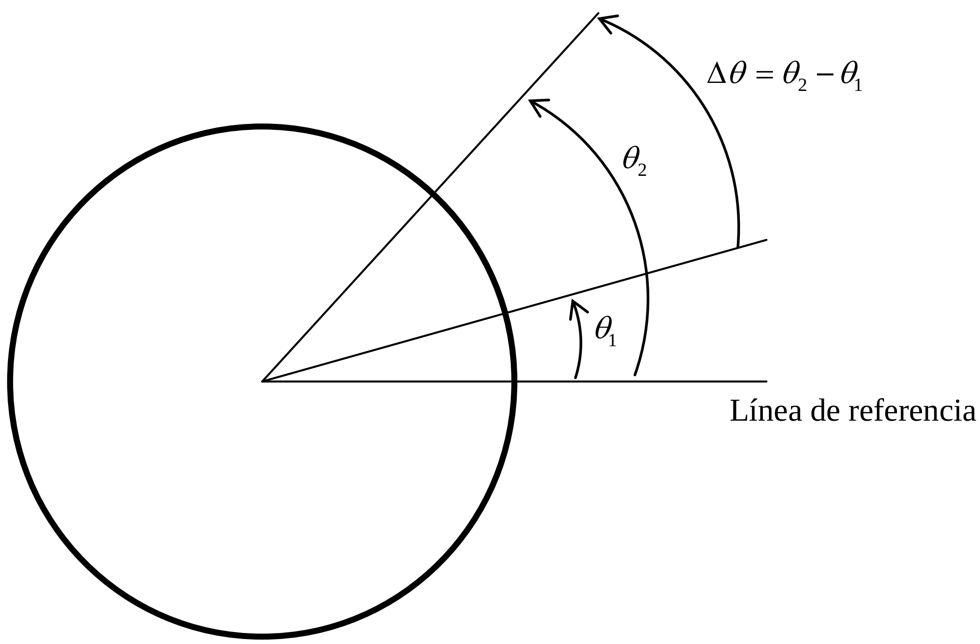
$$v = \frac{60cm}{12s} = 5\frac{cm}{s} = 0{,}05\frac{m}{s}$$

Rapidez angular media (módulo de la velocidad angular media) ω

$$\omega = \frac{angulo}{tiempo} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} \quad \text{O simplemente} \quad \omega = \frac{\theta}{t}$$

La rapidez angular se mide en:

$\frac{rad}{s}$, $\frac{rad}{\min}$, $\frac{rad}{h}$, etc.



Ejemplo 4

Un deportista, en una pista circular describe un ángulo de 40º en un tiempo de 25 segundos. ¿Con qué rapidez angular se movió el deportista?

Solución:
La definición indica que la rapidez angular queda determinada por:

$$\omega = \frac{\theta}{t}$$

El ángulo θ debe expresarse en radianes, por lo tanto se transformará los 40º en radianes.
Para transformar grados sexagesimales en radianes, se debe dividir por 57,3 (ya que 1 radian corresponde aproximadamente a 57,3º).

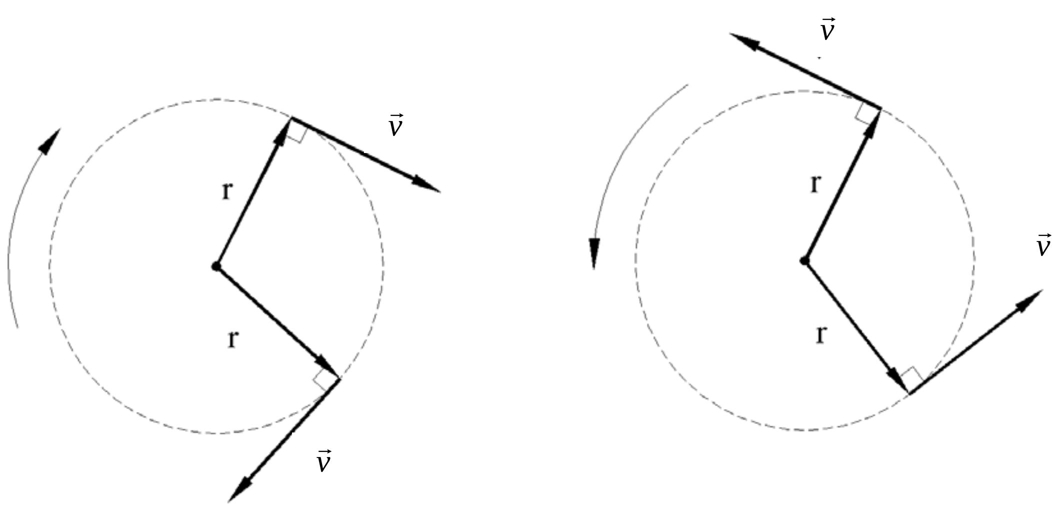
$$40º = \frac{40}{57,3} = 0,698 rad$$

Entonces:

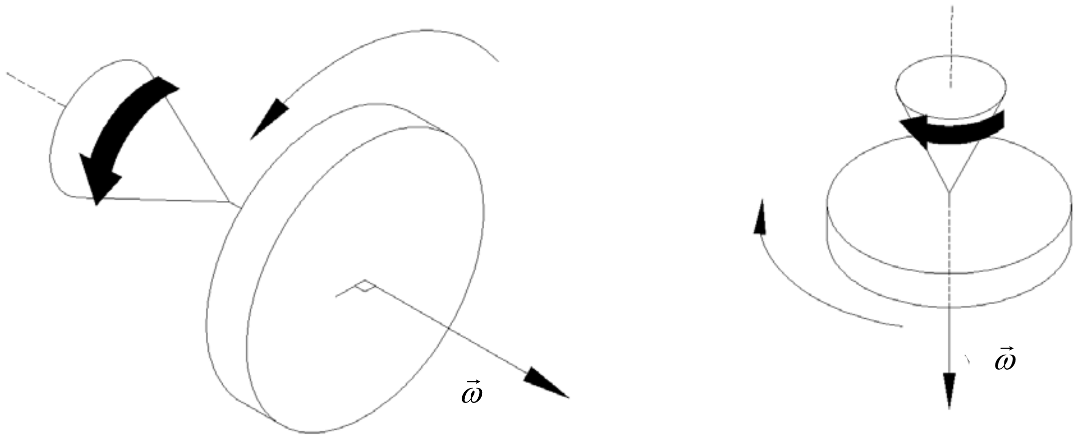
$$\omega = \frac{0,698 rad}{25 s} 0,028 \frac{rad}{s}$$

Velocidad tangencial y angular

La velocidad tangencial $\vec{v}$ queda expresada por un vector tangente a la circunferencia en un punto cualquiera de esta.



La velocidad angular $\vec{\omega}$ queda determinada por un vector perpendicular al plano de la circunferencia, justo en su centro. El sentido de $\vec{\omega}$ queda determinado por la regla del tornillo de rosca derecha, que debe penetrar en el plano de la circunferencia al hacerlo girar en el sentido del movimiento (o regla de la mano derecha).



De aquí en adelante, se utilizará el concepto de velocidad como sinónimo de rapidez a no ser que sea estrictamente necesario hacer la diferencia

Movimiento circular uniforme MCU

Un cuerpo tiene movimiento circular uniforme cuando describe **arcos iguales en tiempos iguales**, es decir, cuando el módulo (rapidez) de la velocidad lineal v permanece constate en el tiempo.
Lo anterior es equivalente a decir que un cuerpo tiene movimiento circular uniforme cuando **describe ángulos iguales en tiempos iguales**, es decir cuando el módulo de la velocidad angular ω permanece constante en el tiempo.

En este movimiento, el radio vector, la velocidad lineal y la aceleración lineal cambian de dirección en cada instante.

En este movimiento también es importante definir los conceptos de periodo y frecuencia:

Período (T):

Es el tiempo en que el cuerpo tarda en completar una vuelta o revolución.

Frecuencia (f):

Es el número de vueltas o revoluciones que el cuerpo alcanza a dar en una unidad de tiempo (1segundo, 1 minuto, 1 hora, etc.), Las unidades de medidas más comunes son:

$$\frac{vueltas}{segundo} = \frac{revoluciones}{segundo} = \frac{rev}{s} = rps = s^{-1}$$

$$\frac{vueltas}{\min uto} = \frac{revoluciones}{\min uto} = \frac{rev}{\min} = rpm = \min^{-1}$$

Frecuencia y periodo son el valor reciproco uno del otro, matemáticamente cumplen con la siguiente relación:

$$T = \frac{1}{f}$$

Ejemplo 5
Determinar el período y frecuencia de un cuerpo que tiene movimiento circunferencial uniforme y da 24 vueltas en 6 segundos.

Solución

El concepto de período significa que es el tiempo que el cuerpo demora en dar una vuelta, como es un movimiento circular uniforme (cíclico), significa que hay una proporcionalidad directa entre nº de vuelta y tiempo empleado, por lo tanto se puede anotar:

Nº de vueltas	**Tiempo empleado (s)**
24	6
1	T

Como se trata de una proporción directa, se multiplica cruzado y se despeja el periodo, esto es:

$$T = \frac{1 \cdot 6}{24}$$

Multiplicando y dividiendo:

$$T = 0{,}25 \text{ s}$$

Es decir, el cuerpo demora 0,25 segundos en dar una vuelta.

Como la frecuencia es el valor reciproco del periodo, significa que:

$$f = \frac{1}{T}$$

Por lo tanto:

$$f = \frac{1}{0{,}25} = 4$$

Este resultado quiere decir que el cuerpo da 4 vueltas en cada segundo, es lo mismo que anotar $f = 4rps$ (4 revoluciones por segundo), si se quiere ver cuantas revoluciones por minuto (rpm) basta multiplicar por 60, es decir $f = 4rps = 240rpm$

Ejemplo 6

Expresar la frecuencia de 540 rpm, rps y rad/s.

Solución: conversión de rpm a rps

$$540rpm = 540\frac{vueltas}{\min.} = 540\frac{vueltas}{60s} = \frac{540}{60}\frac{vueltas}{s} = 9\frac{vueltas}{s} = 9rps$$

Conversión de rpm a rad/s

Recordar que 1 vuelta equivale a un ángulo de 2π radianes. (usar $\pi = 3{,}142$)

$$540rpm = 540\frac{vueltas}{\min.} = 9\frac{vueltas}{s} = 9\frac{2\pi rad}{s} = 18\pi\frac{rad}{s} = 56{,}556\frac{rad}{s}$$

Considerando los conceptos de período y frecuencia, se tiene que para una vuelta completa se cumple que:

Arco descrito (b) = $2 \cdot \pi \cdot r = \pi \cdot \phi$ (perímetro de la circunferencia), ϕ = diámetro

Angulo descrito (θ) = $2 \cdot \pi$

Tiempo empleado (t) = T

Reemplazando esta información en las formulas de rapidez tangencial y angular resulta:

$$\boxed{v = \frac{arco}{tiempo} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} = \frac{\pi \cdot \phi}{1/f} = \pi \cdot \phi \cdot f}$$

y

$$\boxed{\omega = \frac{\acute{a}ngulo}{tiempo} = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{1/f} = 2 \cdot \pi \cdot f}$$

Ejemplo 7

La polea de un motor eléctrico de 8 cm de radio gira a 30 rpm, calcular:

a) Período
b) Velocidad lineal en m/s
c) Velocidad angular en rad/s

Solución (a) Periodo

En primer lugar se transformará de rpm a rps.

$$30\,\mathrm{rpm} = \frac{30}{60}\,\mathrm{rps} = 0{,}5\,\mathrm{rps} = 0{,}5\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

El valor de 30 rpm = 0,5 rps corresponde a la frecuencia, y como el periodo es valor reciproco de la frecuencia, se tiene que:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}5\frac{1}{s}} = 2\,\mathrm{s}$$

Solución (b) Velocidad lineal en m/s (usar $\pi = 3{,}142$)

La velocidad lineal queda determinada por:

$$v = \pi \cdot \phi \cdot f$$

El diámetro corresponde al doble del radio, es decir:

$$\phi = 2 \cdot r = 2 \cdot 8\,cm = 16\,cm = 0{,}16\,m$$

Reemplazando valores correspondientes se tiene:

$$v = \pi \cdot \phi \cdot f = 3{,}142 \cdot 0{,}16\,m \cdot 0{,}5\frac{1}{s}$$

Multiplicando se obtiene el valor de la velocidad lineal es decir:

$$\boxed{v = 0{,}251\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

Solución (c) Velocidad angular en rad/s (usar $\pi = 3{,}142 rad$)

La velocidad angular queda determinada por:

$$\omega = 2\pi \cdot f$$

Reemplazando valores para π y f resulta:

$$\omega = 2 \cdot 3{,}142 rad \cdot 0{,}5\frac{1}{s}$$

Multiplicando se obtiene el valor de la velocidad angular, es decir:

$$\boxed{\omega = 3{,}14\frac{rad}{s}}$$

Relación entre v y ω

Como $v = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot \mathrm{r}}{\mathrm{T}}$ $\Rightarrow$ $T = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot r}{v}$

y

$\omega = \dfrac{2 \cdot \pi}{\mathrm{T}}$ $\Rightarrow$ $T = \dfrac{2 \cdot \pi}{\omega}$

Igualando estos dos resultados se tiene:

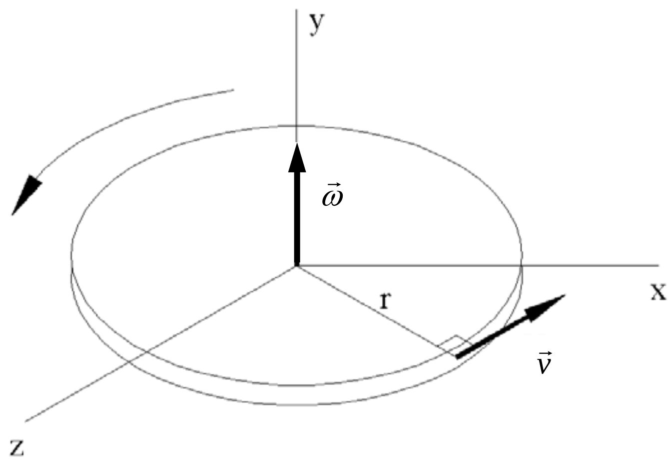
$$\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$$

Multiplicando cruzado:

$$\omega \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot v$$

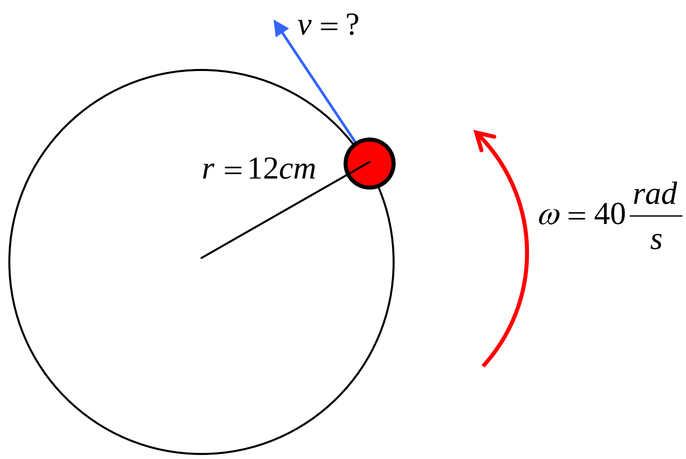
Cancelando por $2 \cdot \pi$, se tiene:

$$\boxed{\omega \cdot r = v}$$



Ejemplo 8

Un cuerpo se mueve en una trayectoria circular de 12 cm de radio y con una velocidad angular de 40 rad/s. ¿Cuál es el valor de la velocidad lineal?



Solución:

Utilizando la relación entre velocidad lineal y velocidad angular, se tiene:

$$v = \omega \cdot r$$

En este caso solo se debe reemplazar valores ya que se conoce la velocidad angular y el radio de l a circunferencia, por lo tanto:

$$v = 40\frac{rad}{s}\cdot 12cm$$

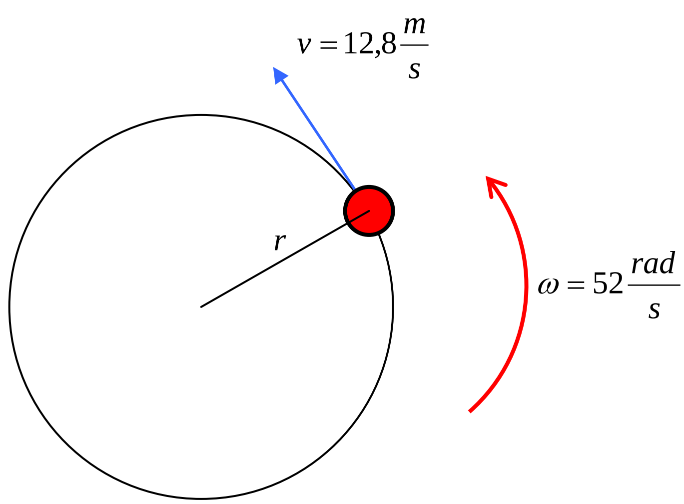
Multiplicando:

$$\boxed{v = 480\frac{cm}{s} = 4,8\frac{m}{s}}$$

Recuerde para pasar de cm a m se debe dividir por 100.

Ejemplo 9

Si la velocidad lineal y angular de un cuerpo, en movimiento circular uniforme son 12,8 m/s y 52 rad/s respectivamente, determinar el radio de la circunferencia descrita.



Solución:
Como en este caso se conocen ambas velocidades, se debe despejar el radio a partir de la ecuación que relaciona la velocidad lineal con la velocidad angular, esto es:

$$v = \omega \cdot r$$

Despejando el radio r:

$$\frac{v}{\omega} = r$$

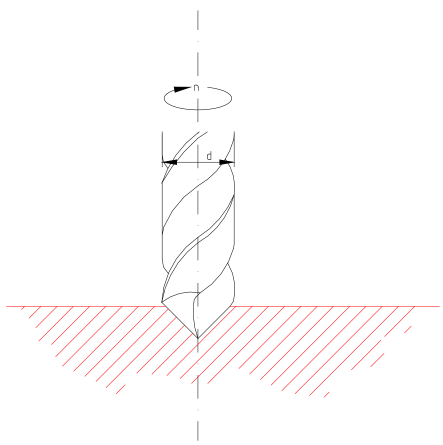
Reemplazando los valores de velocidad lineal y velocidad angular, se tiene el radio que se pide:

$$\frac{12{,}8\,\frac{m}{s}}{52\,\frac{rad}{s}} = r$$

Dividiendo se obtiene el valor del radio, es decir:

$$\boxed{0{,}246\,m = 24{,}6\,cm = r}$$

9. ¿Con qué velocidad de corte, trabaja una broca espiral de 25 mm de diámetro, que ejecuta $128\,\frac{1}{\min}$?



Solución

En primer lugar identificaremos las variables anotando los datos entregados

Datos

Velocidad de corte = Velocidad circunferencial = v = ?

Diámetro = ϕ = 25 mm = 0,025 m

Frecuencia (revoluciones) f = 128 $\frac{1}{\min}$ = 128 r.p.m.

De acuerdo a los datos entregados la formula a utilizar es:

$$v = \pi \cdot \phi \cdot f$$

Reemplazando los datos y multiplicando obtenemos la velocidad que se pide, es decir:

$$v = \pi \cdot 0{,}025 \text{ m} \cdot 128 \frac{1}{\text{min}}$$

$$\boxed{v = 10{,}05 \frac{\text{m}}{\text{min}}}$$

Ejemplo 11

Un cuerpo que gira en una circunferencia de 5 cm de radio, tiene una velocidad de 12 m/s, ¿Cuál es el valor de la velocidad angular?

Solución:

En este caso se conoce el radio de la circunferencia descrita y la velocidad lineal del cuerpo que la describe, por lo tanto de la relación entre velocidad lineal y velocidad angular se debe despejar esta última, esto es:

$$v = \omega \cdot r$$

$$\frac{v}{r} = \omega$$

Reemplazando valores correspondientes resulta:

$$\frac{12\frac{m}{s}}{0{,}05m} = \omega$$

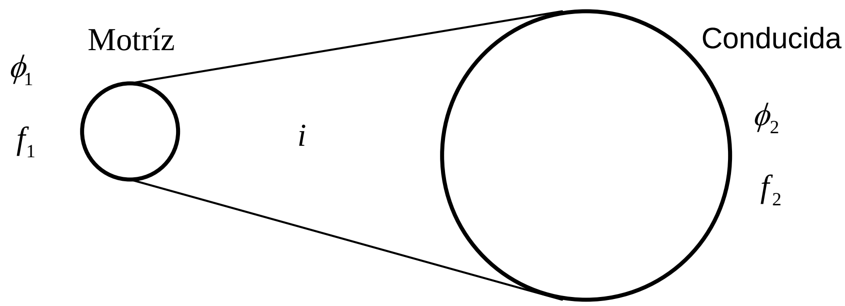
Al cancelarse los metros debe entenderse que la unidad que queda corresponde a radian.

Dividiendo y cancelando la unidad de metro, se obtiene el valor de la velocidad angular, es decir:

$$\boxed{\omega = 240\frac{rad}{s}}$$

Ecuación de transmisión del movimiento

Cuando se tienen dos ruedas o poleas, de distinto diámetro, unidas por una correa o por una cadena, se produce una transmisión de movimiento, la polea en donde se origina el movimiento, se llama **motríz** (generadora), mientras que la otra se llama **conducida** (arrastrada). En esta transmisión de movimiento se cumple que la frecuencia es mayor en la polea de menor diámetro (en un mismo tiempo la polea pequeña da un mayor número de vueltas), lo que quiere decir que la rapidez angular es mayor en la polea de menor diámetro, en cambio la rapidez circunferencial, (tangencial) es la misma para ambas poleas debido a que en un instante el desplazamiento de la correa es el mismo en la polea grande como en la polea pequeña.



Como la rapidez lineal es la misma en ambas poleas, se puede anotar:

$$v_1 = v_2$$

Pero:

$$v = \pi \cdot \phi \cdot f$$

Entonces

$$\pi \cdot \phi_1 \cdot f_1 = \pi \cdot \phi_2 \cdot f_2$$

Dividiendo por π, se obtiene:

$$\boxed{\phi_1 \cdot f_1 = \phi_2 \cdot f_2}$$

Expresión denominada **Ecuación de transmisión del movimiento**

Considerando la ecuación de transmisión:

$$\phi_1 \cdot f_1 = \phi_2 \cdot f_2$$

Se puede escribir:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\phi_2}{\phi_1}$$

Expresión conocida con el nombre de relación de transmisión, y designada por i, es decir:

$$i = \frac{f_1}{f_2} = \frac{\phi_2}{\phi_1}$$

Expresión que indica que la frecuencia es inversamente proporcional al diámetro de la polea, es decir, a mayor diámetro de la polea, menor es el número de vueltas.

Observaciones:

1- Poleas concéntricas o solidarias significan que giran en un mismo eje, con la misma frecuencia

2- Los subíndices impares representan poleas o ruedas motrices, mientras que los subíndices pares, representan poleas conducidas o arrastradas.

3- En caso que la transmisión sea por engrane, la ecuación de transmisión se transforma en:

$$Z_1 \cdot f_1 = Z_2 \cdot f_2$$

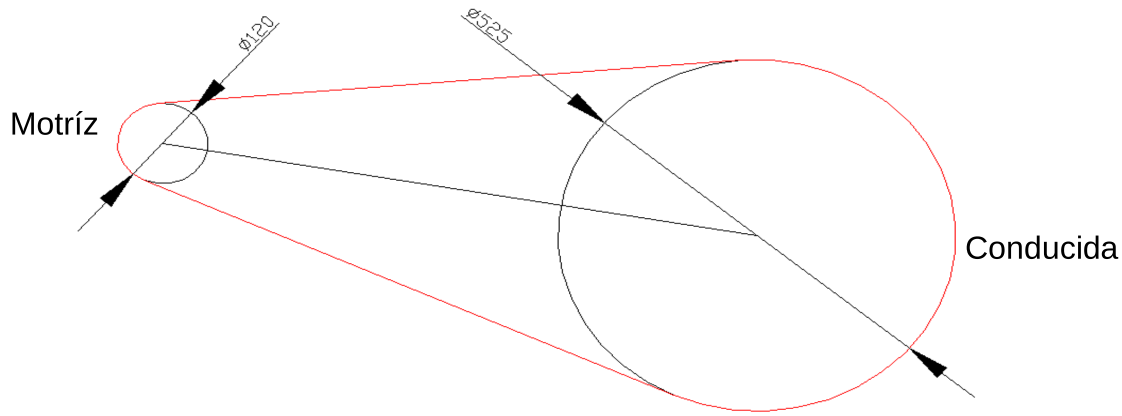
Donde Z es el número de dientes.

4- La relación de transmisión total (i_{Total}) se obtiene por la multiplicación de las relaciones de transmisiones parciales, es decir:

$$i_{\text{Total}} = i_1 \cdot i_2 \cdot \ldots \quad \ldots \cdot i_n$$

Ejemplo 12

La rueda motríz de 120 mm de D de un motor eléctrico, gira con 1400 [1/min], ¿qué diámetro tendría que tener la rueda accionada al girar con 320 [1/min]?



Solución

Este problema corresponde a una transmisión de movimiento, por lo tanto se debe utilizar **la ecuación de transmisión del movimiento**, es decir:

$$\phi_{motriz} \cdot f_{motriz} = \phi_{conducida} \cdot f_{conducida}$$

Como se conoce el diámetro y frecuencia de la rueda motriz, además de la frecuencia de la rueda conducida, la solución consiste simplemente en despejar el diámetro de la rueda conducida:

$$\phi_{conducida} = \frac{\phi_{motriz} \cdot f_{motriz}}{f_{conducida}}$$

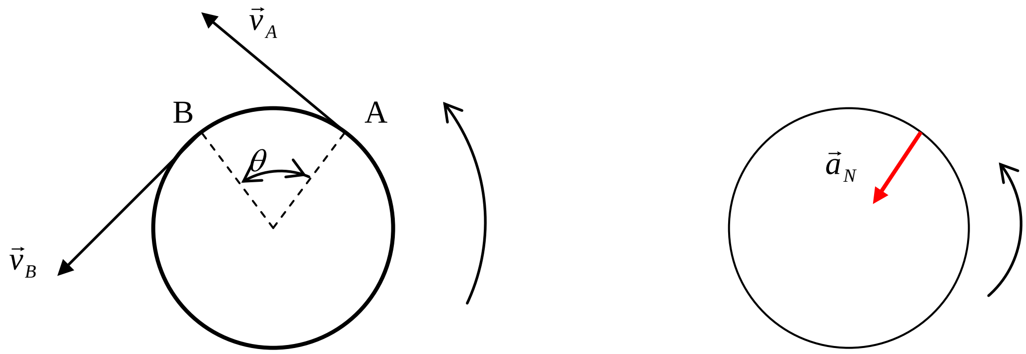
Reemplazando valores y realizando la operatoria, resulta:

$$\phi_{conducida} = \frac{120\ mm \cdot 1400\ [1/\min]}{320\ [1/\min]}$$

$$\boxed{\phi_{conducoda} = 525\ mm}$$

Aceleración Centrípeta (a_N)

En este movimiento existe una **aceleración lineal**, debida a que la **velocidad lineal** del cuerpo cambia de dirección en cada instante, siendo su magnitud o módulo constante en el tiempo.



La aceleración normal queda definida vectorialmente como el producto cruz entre la velocidad angular $\vec{\omega}$ y la velocidad lineal $\vec{v}$, es decir:

$$\vec{a}_N = \vec{\omega} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \vec{\omega}_x & \vec{\omega}_y & \vec{\omega}_z \\ \vec{v}_x & \vec{v}_y & \vec{v}_z \end{vmatrix}$$

La aceleración normal es un vector dirigido hacia el centro de curvatura.

Escalarmente la aceleración normal o centrípeta queda definida por:

$$a_N = \omega^2 \cdot r = \frac{v^2}{r}$$

Donde:

$\omega =$ Módulo de la velocidad angular
$v =$ Módulo de la velocidad lineal
$r =$ Radio de la circunferencia.

Ejemplo 13
La polea de un motor eléctrico tiene un radio de 2,5 cm y gira a 30 rpm. Calcular la aceleración normal en un punto situado en la periferia de la polea.

Solución:
Como se pide calcular la aceleración normal en un punto de la periferia de la polea, se necesita conocer la velocidad angular o la velocidad lineal. En este caso se conoce la

frecuencia y el radio de la polea por lo tanto es posible calcular ambas velocidades, en esta ocasión se calculará la velocidad angular ω.

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

Antes de reemplazar valores se transformara los 30 rpm a rps para trabajar en las unidades de $\frac{rad}{s}$:

$$30rpm = \frac{30}{60}rps = 0{,}5rps = 0{,}5\frac{1}{s}$$

Hora es posible determinar la velocidad angular, esto es:

$$\omega = 2 \cdot 3{,}142rad \cdot 0{,}5\frac{1}{s}$$

Multiplicando:

$$\omega = 3{,}142\frac{rad}{s}$$

Como ya se conoce la velocidad angular, entonces se calcula la aceleración centrípeta por medio de la formula:

$$a_N = \omega^2 \cdot r$$

Reemplazando los valores de la velocidad angular y el radio de la polea, se tiene:

$$a_N = 3{,}142^2 \frac{rad^2}{s^2} \cdot 2{,}5cm$$

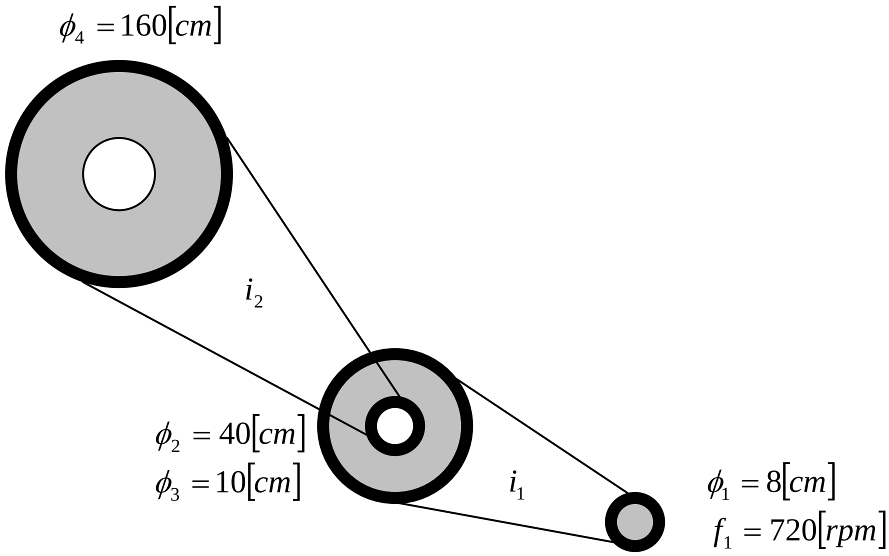
Elevando al cuadrado y multiplicando se obtiene el valor de la aceleración centrípeta, es decir:

$$\boxed{a_N = 24{,}680\frac{cm}{s} = 0{,}247\frac{m}{s}}$$

Recordar que la multiplicación entre una unidad angular y una de longitud arroja una unidad de longitud.

Ejemplo 14

Para la transmisión indicada en la figura, se pide determinar: velocidad lineal en la polea 2, aceleración centrípeta en polea 3, velocidad angular en polea 4, y relación total de transmisión.



Solución:

a) Para sacar la velocidad lineal en 2 se necesita saber su frecuencia, por lo cuál primero se calculará la frecuencia de esta polea, para esto se aplica la ecuación de transmisión del movimiento, esto es:

$$f_1 \cdot \phi_1 = f_2 \cdot \phi_2$$
$$f_2 = \frac{f_1 \cdot \phi_1}{\phi_2}$$
$$f_2 = \frac{12[1/s] \cdot 8[cm]}{40[cm]}$$
$$f_2 = 2{,}4[1/s]$$

b) Velocidad lineal en polea 2.

$$v_2 = \pi \cdot \phi_2 \cdot f_2$$
$$v_2 = 3{,}14 \cdot 2{,}4[1/s] \cdot 0{,}4[m]$$
$$v_2 = 3{,}014[m/s]$$

c) Aceleración centrípeta en polea 3.

$$a_{N3} = \frac{V_3^2}{r_3} = \omega_3^2 \cdot r_3 = (2\pi \cdot f_3)^2 \cdot r^3$$
$$a_{N3} = (6{,}28 \cdot 2{,}4)^2 \left[rad^2 / s^2\right] \cdot 0{,}05[m]$$
$$a_{N3} = 11{,}358\left[m / s^2\right]$$

d) Velocidad angular en polea 4.

$$\omega_4 = 2\pi \cdot f_4$$

- Para obtener la velocidad angular de la polea 4, se necesita saber la frecuencia, para esto se aplica la ecuación de transmisión del movimiento, esto es:

$$\phi_3 \cdot f_3 = \phi_4 \cdot f_4$$

$$f_4 = \frac{\phi_3 \cdot f_3}{\phi_4}$$

$$f_4 = \frac{10[cm] \cdot 2{,}4[1/s]}{160[cm]}$$

$$f_4 = 0{,}15[1/s]$$

- Obteniendo este resultado se regresa a la ecuación original:

$$\omega_4 = 2\pi \cdot f_4$$

$$\omega_4 = 6{,}28[rad] \cdot 0{,}15[1/s]$$

$$\omega_4 = 0{,}942[rad/s]$$

e) Relación total de transmisión.

$$i_{Total} = i_1 \cdot i_2 = \frac{\phi_2}{\phi_1} \cdot \frac{\phi_4}{\phi_3} = \frac{40cm}{8cm} \cdot \frac{160cm}{10cm} = \frac{80}{1}$$

Movimiento circular uniformemente acelerado MCUA

Es un movimiento de trayectoria circunferencial y experimenta una variación en el módulo de la velocidad angular que se mantiene constante en el tiempo, es decir se produce una aceleración angular constante.

Las ecuaciones que rigen este movimiento corresponden a las reglas de oro de la cinemática, pero en ellas se debe cambiar las variables lineales por variables angulares, es decir:

$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2$ Ecuación de posición angular (Entrega la posición angular en el tiempo t)

$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$ Ecuación de velocidad angular en el tiempo t

$\theta = \theta_0 + \frac{\omega^2 - {\omega_0}^2}{2 \cdot \alpha}$ Ecuación de posición angular independiente del tiempo

Además existe una aceleración lineal que tiene dos componente, una tangencial y la otra normal y se cumple que:

$a = a_c + a_t$ (Aceleración lineal)

$a_c = \omega^2 \cdot r$ (Aceleración centrípeta)

$a_t = \alpha \cdot r$ (Aceleración tangencial)

Simbología utilizada

$\theta(t) =$ Posición angular en el tiempo t

$\theta =$ Posición angular independiente del tiempo

$\theta_0 =$ Posición angular inicial

$\omega_0 =$ Módulo de velocidad angular inicial

$\omega =$ Módulo de velocidad angular final

$\alpha =$ Módulo de aceleración angular

$a =$ Módulo de aceleración lineal

$a_c =$ Módulo de aceleración normal o centrípeta

$a_t =$ Módulo de aceleración lineal

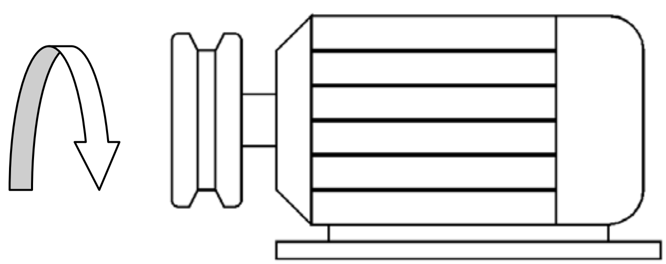
$r =$ Radio de la circunferencia

Ejemplo

Cuando se arranca un motor eléctrico, este alcanza su velocidad nominal a 3300 rpm en 6 s, y cuando se apaga el motor, este demora en detenerse 80 s. Suponiendo un movimiento uniforme acelerado. Hallar el número de vueltas que da el motor.

a) Hasta alcanzar su velocidad nominal
b) Hasta detenerse

Solución



Arranque del motor

$\omega_0 = 0$

ω = 3300 rpm = $55\left[\frac{rev}{s}\right]$ = $345{,}5\left[\frac{rad}{s}\right]$

t = $6[s]$

Cálculo de aceleración angular α hasta que se alcanza la velocidad nominal.

Ecuación velocidad dependiente del tiempo $\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$

Despejando α se obtiene:

$$\frac{\omega - \omega_0}{t} = \alpha$$

$$\frac{55\left[\frac{rev}{s}\right] - 0}{6[s]} = \alpha$$

Dividiendo:

$$57{,}567\left[\frac{rad}{s^2}\right] = 9{,}167\left[\frac{rev}{s^2}\right] = \alpha$$

Cálculo del nº de revoluciones en alcanzar velocidad nominal

Ecuación de posición angular dependiente del tiempo $\theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2$

En el encendido tanto la posición angular inicial como la velocidad angular inicial son iguales a cero, por lo tanto resulta:

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2$$

Reemplazando valores correspondientes se tiene:

$$\theta = \frac{1}{2} \cdot 9{,}167\left[\frac{rev}{\cancel{s^2}}\right] \cdot 36\left[\cancel{s^2}\right]$$

Multiplicando resulta el número de revoluciones que se pide:

$$\theta = 165[rev]$$

Apagado del motor

ω_0 = 3300 rpm = $55\left[\frac{rev}{s}\right]$ = 345,5 $\left[\frac{rad}{s}\right]$

$\omega = 0$

$t = 80[s]$

Cálculo de la aceleración angular en la detención.

Como se conoce ambas velocidades angulares y el tiempo transcurrido, se debe utilizar la ecuación de velocidad angular dependiente del tiempo, es decir:

$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$

$$0 = \omega_0 + \alpha \cdot t$$

Despejando α

$$\alpha = \frac{-\omega_0}{t}$$

Evaluando:

$$\alpha = \frac{-55\left[\frac{rev}{s}\right]}{80[s]}$$

Dividiendo:

$$\alpha = -0{,}6875\left[\frac{rev}{s^2}\right]$$

Cálculo de nº de revoluciones del motor hasta detenerse

En esta oportunidad se utilizará la ecuación 3(posición angular independiente del tiempo)

$$\theta = \theta_0 + \frac{\omega^2 - \omega_0{}^2}{2\alpha}$$

Reemplazando valores numéricos y dividiendo se obtiene el nº de revoluciones:

$$\theta = 0 + \frac{0 - 55^2\left[\frac{rev^2}{s^2}\right]}{2 \cdot -0{,}6875\left[\frac{rev}{s}\right]}$$

$$\theta = 2200[rev]$$

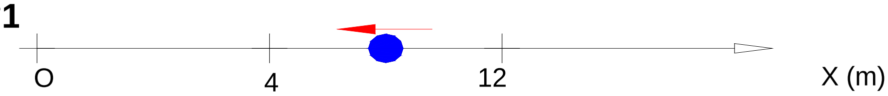
Problemas resueltos – cinemática de la partícula

Problema n°1

Una partícula que se mueve a lo largo del eje X se localiza en x_0 = 12 m en t_0 = 1 s y en x = 4 m en t =3s.

Encuentre el desplazamiento, velocidad promedio y rapidez promedio durante este intervalo de tiempo.

Solución problema n°1



Datos:

$$x_0 = 12[m] \text{ en } t_0 = 1[s]$$
$$x = 4[m] \text{ en } t = 3[s]$$
$$\Delta x = ? \text{ en } \Delta \mathrm{t}$$
$$\vec{v}_m = ? \text{ en } \Delta \mathrm{t}$$
$$v = ? \text{ en } \Delta \mathrm{t}$$

Calculo del desplazamiento:
Para determinar el desplazamiento se necesita conocer las posiciones final e inicial para luego aplicar directamente la definición, es decir:

$$\Delta x = x - x_0 \quad \text{reemplazando los valores correspondientes se teine :}$$
$$\Delta x = 4[m] - 12[m] \text{ es decir :}$$
$$\Delta x = -8[m] \text{ o } \vec{d} = -8\hat{\imath}[m] \text{ el signo negativo significa que el cuerpo se dirige hacia la izquierda}$$

Calculo de velocidad promedio:
Para determinar la velocidad promedio se debe aplicar directamente el concepto que la define ya que se conocen los datos suficientes, es decir:

Por definición e tiene que: $\vec{v} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ reemplazando los valores correspondientes se tiene que:

$$\vec{v} = \frac{8\hat{i}\ (\mathrm{m})}{3\,(\mathrm{s}) - 1\,(\mathrm{s})} = \frac{-8\hat{i}}{2}\ (\mathrm{m/s})$$

$$\boxed{\vec{v} = -4\hat{i}\ \ (\mathrm{m/s})}$$

Calculo de rapidez promedio:
La rapidez promedio se define como el cuociente entre el camino recorrido(o distancia) y el tiempo empleado en recorrer dicho camino, en términos matemáticos se expresa por:

$v = \frac{d}{t}$ la distancia d corresponde a los 8 metros y el tiempo t a los 2 segundos, por lo tanto :

$v = \frac{8[m]}{2[s]}$, es decir :

$$\boxed{v = 4\left[\frac{m}{s}\right]}$$

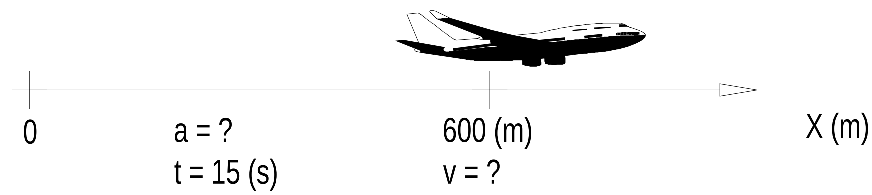
Problema n°2

Un avión, para despegar, realiza un recorrido de 600 m. (a) ¿Cuál es su aceleración, supuesta constante, si abandona el terreno 15 segundos después de su salida?,(b) ¿Con qué velocidad en km/h despegará?

Solución problema n°2

Datos:

$$x_0 = 0$$
$$x = 600[m]$$
$$t = 15[s]$$
$$v_0 = 0$$
$$a = ?$$
$$v = ?$$



Cálculo de aceleración:

Observando los datos entregados es fácil darse cuenta que la aceleración se puede determinar aplicando la primera regla de oro de la cinemática, que corresponde al vector de posición o ecuación itinerario, es decir:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \text{ como } x_0 = 0 \text{ y } v_0 = 0, \text{ se tiene :}$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 \text{ despejando a, se tiene :}$$

$$\frac{2x}{t^2} = a \text{ reemplazando los valores numericos resulta que :}$$

$$a = \frac{2 \cdot 600\,[\mathrm{m}]}{(15)^2[\mathrm{s}^2]} = \frac{1200[m]}{225[s^2]} \text{ es decir :}$$

$$\boxed{a = 5{,}33\left[\frac{m}{s}\right] \text{ en la dirección del desplazamiento } x}$$

Cálculo de Velocidad de despegue:

Conocida la aceleración es posible determinar la velocidad de despegue utilizando la segunda regla de oro de la cinemática (vector velocidad), es decir:

$$v = v_0 + at \text{ pero } v_0 = 0 \text{ entonces :}$$

$$v = at \quad \text{reemplazando valores numericos se tiene :}$$

$$v = 5{,}33\,(\mathrm{m/s^2}) \cdot 15\,(\mathrm{s}) \text{ multiplicando resulta :}$$

$$\mathrm{v} = 79{,}995\,(\mathrm{m/s}) \text{ en la dirección del desplazamiento } x$$

$$\boxed{\mathrm{v} = 287{,}982\,(\mathrm{km/h})}$$

Problema n°3

Un electrón incide sobre una pantalla de televisión con una velocidad de 3×10^6 m/s. Suponiendo que ha sido Acelerado desde el reposo a través de una distancia de 0,004 m. Encontrar la aceleración promedio.

Solución problema n°3

Solución:

Observando los datos e incógnitas nos damos cuenta que utilizando la tercera regla de oro (vector posición independiente del tiempo t) es posible determinar la aceleración promedio, esto es:

$$x = x_0 + \frac{v^2 - v^2{}_0}{2a} \text{ como, } x_0 = 0 \text{ y } v_0 = 0 \text{ resulta :}$$

$$x = \frac{v^{\ 2}}{2a} \textit{ despejando} \text{ la aceleración se obtiene :}$$

$$a = \frac{v^2}{2x} \text{ reemplazando los valores numericos se tiene :}$$

$$a = \frac{\left(3\times10^6\right)^2 \ (\text{m}^2 / s^2)}{2\cdot 4\times10^{-3} \ (\text{m})} \text{ realizando la operatoria se obtiene la aceleracion}$$

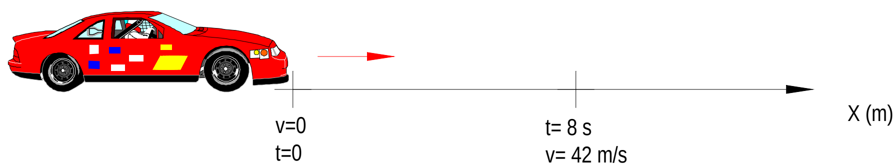
$$a = \frac{9\times10^{12}}{8\times10^{-3}} (\text{m} / s^2)$$

$$\boxed{a = 1{,}125\times10^{15} \ (\text{m} / s^2)}$$

Problema n°4

Un fabricante de cierto automóvil afirma que su auto deportivo acelera desde el reposo hasta una rapidez de 42,0 m/s en 8,00 s**.** En el improbable caso en que la aceleración sea constante: (a) determine la aceleración del automóvil en m/s^2, (b) Encuentre la distancia que el automóvil recorre los primeros 8,00 s, (c) ¿Cuál es la rapidez del automóvil después de que inicia su movimiento? Suponga que continúa acelerando a la tasa promedio de 5,25 m/s^2.

Solución problema n°4



Datos:
$v_0 = 0$
$x_0 = 0$
v = 42,0 (m/s)
t = 8,00 (s)
a =?
d =? (m) en 8,00 (s)
v =? en 10 (s)

Cálculo de aceleración:

Observando los datos entregados es fácil darse cuenta que el valor de la aceleración se puede determinar utilizando la segunda regla de oro, esto es:

$$v = v_0 + at \quad \text{pero } v_0 = 0 \text{ por lo tanto resulta :}$$
$$v = at \quad \text{despejando la aceleración se tiene :}$$
$$\frac{\text{v}}{\text{t}} = a \ \text{ reemplazando los valores numericos queda :}$$
$$a = \frac{42{,}0\,(\text{m/s})}{8\,(\text{s})}$$
$$\boxed{a = 5{,}25\,(\text{m/s}^2)}$$

Cálculo de distancia a los 8 (s):

Como ahora, además se conoce la aceleración es posible utilizar la tercera regla de oro para determinar la distancia recorrida por el auto, es decir:

$$x = x_0 + \frac{v^2 - v^2{}_0}{2a} \text{ pero } x_0 = v_0 = 0 \text{ por lo tanto :}$$

$$x = \frac{v^2}{2a} \text{ reemplazando los valores numericos se tiene :}$$

$$\mathrm{x} = \frac{(42{,}0)^2\ (\mathrm{m}^2 / s^2)}{2 \cdot 5{,}25\,(\mathrm{m}/s^2)} \text{ realizando la operatoria resulta :}$$

$$\mathrm{x} = 168\,(\mathrm{m}) \quad \text{como la distancia queda determinada por } \mathrm{d} = |\mathrm{x} - \mathrm{x}_0|, \text{ se tiene :}$$

$$\mathrm{d} = |168\,(\mathrm{m}) - 0|$$

$$\Rightarrow \mathrm{d} = |168(\mathrm{m})| \quad \text{Por lo tanto y finalmente se tiene que la distancia pedida es :}$$

$$\boxed{d = 168\,(\mathrm{m})}$$

Cálculo de Rapidez a los 10 (s):

La rapidez a los 10 segundos queda determinada utilizando segunda regla de oro de la cinemática, es decir:

$$v = v_0 + at$$

$$\Rightarrow v = at \quad \text{porque } v_0 = 0$$

$$\Rightarrow v = 5{,}25\left(m/s^2\right)\cdot 10\,(\mathrm{s})$$

$$\boxed{\Rightarrow \mathrm{v} = 52{,}5\,(\mathrm{m/s})}$$

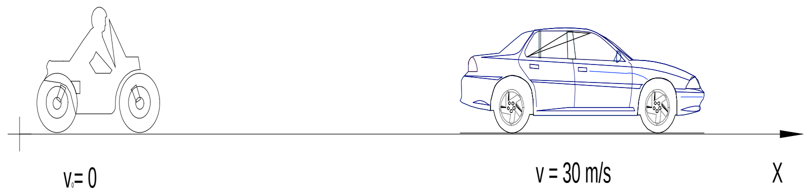
Problema n°5

Un automóvil viaja a una velocidad constante de 30,0 m/s y pasa por un anuncio detrás del cual se oculta un policía. Un segundo después de que el auto pasa, el policía inicia la persecución con una aceleración constante de 3,00 m/s^2. ¿Cuánto tarda el policía en superar al automóvil?

Solución problema n°5
En este caso se trata de un problema de encuentro ya que en el instante en que el policía alcanza al automóvil, necesariamente se encuentran en la misma posición, es decir, se cumple que:

Datos:
Policía:
$v_{01} = 0$
$t_1 = t$
$a = 3{,}00$ m/s^2

Automóvil:
$v = 30{,}0$ m/s
$t_2 = t+1$



El movimiento del policía es acelerado y el movimiento del automovilista es uniforme, por lo tanto la igualdad anterior queda expresada como sigue:

$$x(t_1) = x(t_2)$$

$$\Rightarrow x_{01} + v_{01}t_1 + \frac{1}{2}at^2{}_1 = x_{02} + v_2 t_2 \quad \text{pero } x_{01} = x_{02} = v_{01} = 0 \text{ por lo tanto resulta:}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}at^2{}_1 = v_2 t_2 \quad \text{reemplazando } t_1 = t \quad \text{y} \quad t_2 = t+1 \text{ resulta:}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}at^2 = v_2(t+1)$$

Reemplazando los datos y resolviendo se tiene:

$$\Rightarrow \frac{1}{2}3t^2 = 30(t+1)$$

$$\Rightarrow 1{,}5t^2 = 30t + 30$$

$$\Rightarrow t^2 = 20t + 20$$

$$\Rightarrow t^2 - 20t - 20 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2}$$

$$\Rightarrow t = \frac{20 \pm 21{,}908}{2}$$

$$\Rightarrow t = \frac{41{,}908}{2}$$

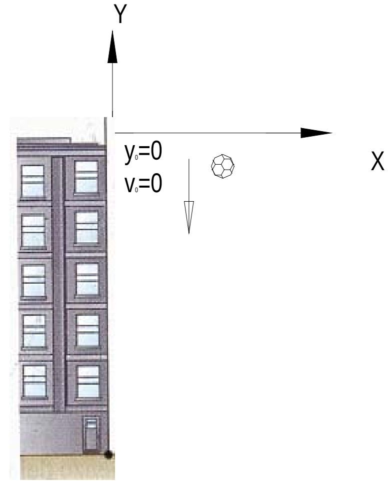
$$\boxed{\Rightarrow t = 20{,}95(s)}$$

Problema n°6

Una pelota de golf se deja caer a partir del reposo desde la azotea de un edificio muy alto. Desprecie la resistencia del aire y calcule la posición y velocidad de la pelota después de 1.00, 2.00 y 3.00 s.

Solución problema n°6

Datos:
$v_0 = 0$
$y_0 = 0$
En t = 1, 2 y 3 (s)
y = ?
v = ?
g= 9,8 (m/s^2)



En este problema se ha elegido el origen del sistema coordenado en aquel punto donde se deja caer la pelota es decir desde lo más alto del edificio.

Cálculo de posición en los instantes indicados:

Como el problema pide calcular la posición, obviamente se debe utilizar ésta ecuación, es decir:

$$y(t) = y_0 + v_0 - \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{pero } y_0 = v_0 = 0, \text{ entonces:}$$
$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2$$

Para 1(s):

$$\mathrm{y(t)} = -\frac{1}{2}9{,}8 \cdot 1^2 \ \mathrm{(m)}$$
$$\boxed{\Rightarrow \mathrm{y} = -4.9\,\hat{\jmath}\,\mathrm{(m)}}$$

Para 2(s):

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2$$
$$\mathrm{y(t)} = -\frac{1}{2}9{,}8 \cdot 2^2 \ \mathrm{(m)}$$
$$\boxed{\Rightarrow \mathrm{y} = -19{,}6\,\hat{\jmath}\ \mathrm{(m)}}$$

Para 3(s):

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2$$
$$\mathrm{y(t)} = -\frac{1}{2}9{,}8 \cdot 3^2 \ \mathrm{(m)}$$
$$\boxed{\Rightarrow \mathrm{y} = -44{,}1\,\hat{\jmath}\ \mathrm{(m)}}$$

Los signos negativos indican que el cuerpo se encuentra por debajo de la posición de caída

Cálculo de Velocidad en los instantes indicado:

De acuerdo a los datos obtenidos, la ecuación apropiada es:

$$\vec{v} = v_0 - gt$$

Para 1 (s):

$$\vec{v} = -9{,}8\,(\mathrm{m/s}^2) \cdot 1\,(\mathrm{s})$$

$$\boxed{\vec{\mathrm{v}} = -9{,}8\ \hat{\jmath}\,(\mathrm{m/s})}$$

El signo negativo en la velocidad indica que el cuerpo se mueve hacia abajo.

Para 2 y 3 (s):

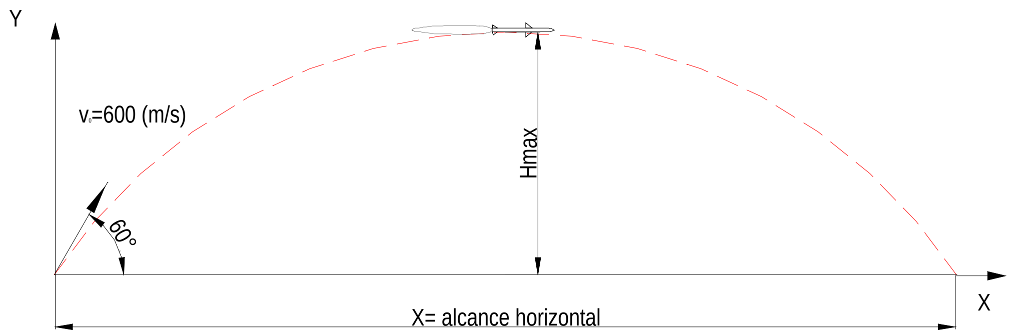
$$\vec{v} = -9{,}8\,(\mathrm{m/s^2}) \cdot 2\,(\mathrm{s})$$
$$\boxed{\vec{v} = -19{,}6\,\hat{j}\,(\mathrm{m/s})}$$

$$\vec{v} = -9{,}8\,(\mathrm{m/s^2}) \cdot 3\,(\mathrm{s})$$
$$\boxed{\vec{v} = -29{,}4\,\hat{j}\,(\mathrm{m/s})}$$

Problema n° 7

Un proyectil es disparado con una velocidad de 600 m/s haciendo un ángulo de 60° con la horizontal. Calcular: (a) el alcance horizontal máximo, (b) La altura máxima, (c) la velocidad y altura después de 30 s, (d) La velocidad y el tiempo cuando el proyectil se encuentra a 10 km de altura.

Solución problema n° 7
Este problema corresponde a lanzamiento de proyectiles y se debe de utilizar simultáneamente las ecuaciones de la cinemática para movimiento uniforme y movimiento uniformemente acelerado. Realizando un esquema para la información dada, se tiene:



Antes de comenzar la solución a este problema se debe tener muy presente que la aceleración de gravedad **g** actúa solo en el movimiento vertical, por lo tanto el **movimiento en el eje horizontal es uniforme** y el **movimiento en el eje vertical es uniforme acelerado** con la aceleración de gravedad **g**

Cálculo de alcance horizontal:

El alcance horizontal se obtiene aplicando la ecuación de posición en el eje horizontal (eje x), es decir:

$x = x_0 + (v_0 \cos\theta)\cdot t$, pero $x_0 = 0$, por lo tanto

$$x = (v_0 \cos\theta)\bullet t$$

Por información se tiene v_0 y θ, luego hay que conocer el tiempo de vuelo o tiempo en que el cuerpo permanece en el airea, para esto aplicamos la ecuación de posición en el eje y ya que se cuenta con todos los datos, esto es:

$$y = y_0 + v_0 sen\theta \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad , y_0 = 0$$

$$\Rightarrow y = v_0 sen\theta \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Cuando el cuerpo llega a tierra se tiene que y = 0, luego:

$$0 = v_0 sen\theta \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$\Rightarrow 0 = 600 sen 60° \cdot t - \frac{1}{2} 9{,}8 \cdot t^2$$

$$\Rightarrow 0 = 519{,}615 \cdot t - 4{,}9 t^2$$

$$\Rightarrow 4{,}9 t^2 - 519{,}615 \cdot t = 0$$

$$\Rightarrow t(4{,}9 t - 519{,}615) = 0$$

$$\Rightarrow t = 0 \ \vee \ 4{,}9 t - 519{,}615 = 0$$

$$\boxed{\Rightarrow t = \frac{519{,}615}{4{,}9} = 106{,}044(s)}$$

Conocido el tiempo t, es posible calcular definitivamente el alcance horizontal, es decir:

$$x = (v_0 \cos\theta) \cdot t$$
$$\Rightarrow x = (600(m/s) \cdot \cos 60°) \cdot 106{,}044(s)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \Rightarrow x = 31813{,}2(m) \\ \Rightarrow x = 31{,}8132(km) \end{array}}$$

Cálculo de altura máxima:

Para calcular la altura máxima se necesita conocer el tiempo que demora el proyectil en tal posición, para esto usaremos la ecuación $v_y = v_0 \operatorname{sen}\theta - gt$, pero en la altura máxima se tiene que $v_y = 0$, por lo tanto la ecuación anterior resulta:

$$0 = v_0 \operatorname{sen}\theta - gt$$
$$\Rightarrow gt = v_0 \operatorname{sen}\theta$$
$$\Rightarrow t = \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$$
$$\Rightarrow t = \frac{600(m/s) \operatorname{sen} 60°}{9{,}8(m/s^2)}$$

$$\boxed{\Rightarrow t = 53{,}022(s)}$$

Conocido el tiempo en alcanzar la altura máxima, es posible calcular la altura máxima aplicando la ecuación de posición

$$H_{\max} = y_{\max} = y_0 + v_0 sen\theta \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad , \mathrm{y}_0 = 0$$
$$\Rightarrow H_{\max} = v_0 sen\theta \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$
$$\Rightarrow \mathrm{H}_{\max} = 600(m/s) \cdot sen 60° \cdot 53{,}022(s) - \frac{1}{2} 9{,}8(m/s^2)(53{,}022(s))^2$$
$$\Rightarrow \mathrm{H}_{\max} = 27551{,}039(m) - 13775{,}529(m)$$

$$\boxed{\Rightarrow \mathrm{H}_{\max} = 13775{,}51(m)}$$

Cálculo de velocidad a los 30 (s):

Para este caso, se aplica directamente la ecuación de velocidad, es decir:

$$v_y = v_0 sen\theta - gt$$

$$\Rightarrow v_y = 600(m/s)\cdot sen60° - 9,8(m/s^2)\cdot 30(s)$$

$$\boxed{\Rightarrow v_y = 225,615(m/s)}$$

Cálculo de altura a los 30 (s):

En este caso se debe de utilizar nuevamente la ecuación de posición en el eje vertical y utilizar el tiempo de 30 segundos, es decir:

$$y = y_0 + v_0 sen\theta \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad , \mathrm{y}_0 = 0$$

$$\Rightarrow y = v_0 sen\theta \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$\Rightarrow y = 600(m/s)\cdot sen60° \cdot 30(s) - \frac{1}{2} 9,8(m/s^2)\cdot (30(s))^2$$

$$\boxed{\Rightarrow y = 11178,457(m)}$$

Cálculo de Velocidad a los 10 km de altura:

Para este caso se utilizará la ecuación de posición independiente del tiempo (eje y), ya que se conocen todos los datos y solo basta con despejar la velocidad, es decir:

$$y = y_0 - \frac{(v_y)^2 - (v_0 sen\theta)^2}{-2g} \quad \text{pero } y_0 = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{(v_y)^2 - (v_0 sen\theta)^2}{-2g}$$

$$\Rightarrow -2gy = (v_y)^2 - (v_0 sen\theta)^2$$

$$\Rightarrow -2gy + (v_0 sen\theta)^2 = (v_y)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{-2gy + (v_0 sen\theta)^2} = v_y$$

$$\Rightarrow \sqrt{-2 \cdot 9{,}8(m/s^2) \cdot 10000(m) + (600(m/s) sen 60°)^2} = v_y$$

$$\boxed{\Rightarrow v_y = \pm 272{,}029 (m/s)}$$

El signo positivo de la velocidad corresponde cuando el cuerpo va en subida y el signo negativo cuando el cuerpo viene en bajada y en ambos casos su valor es de 272,029 (m/s).

Cálculo del Tiempo a los 10 km de altura:

En este caso, se utilizará el vector de posición dependiente del tiempo y en él se despejará la variable tiempo, es decir:

$$y = y_0 + v_0 sen\theta \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad , y_0 = 0$$

$$\Rightarrow y = v_0 sen\theta \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$\Rightarrow 10000 = 600 sen 60° \cdot t - \frac{1}{2} 9{,}8 t^2$$

$$\Rightarrow 10000 = 519{,}615 t - 4{,}9 t^2$$

$$\Rightarrow 4{,}9 t^2 - 519{,}615 t + 10000 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{519{,}615 \pm \sqrt{(519{,}615)^2 - 4 \cdot 4{,}9 \cdot 10000}}{2 \cdot 4{,}9}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \Rightarrow t_1 = 80{,}780 (s) \\ \Rightarrow t_2 = 25{,}216 (s) \end{array}}$$

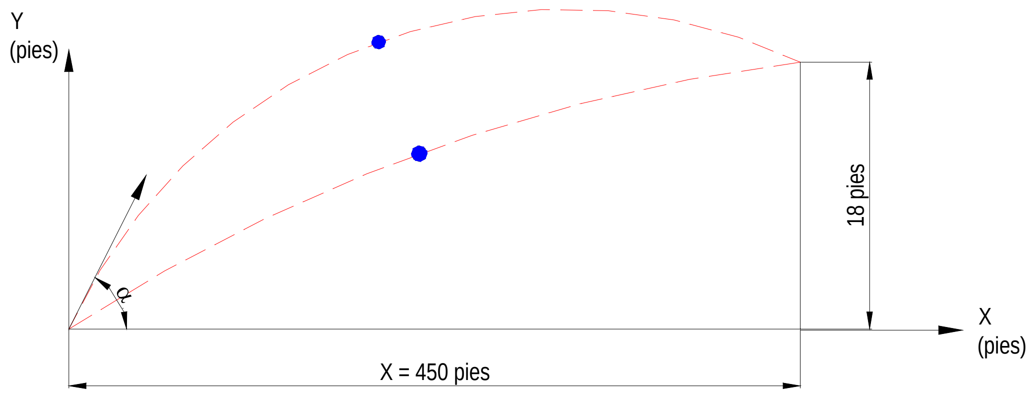
Esto significa que hay dos instantes en que el proyectil se encuentra a 10 km de altura, esto es a los 25,216 (s) y a los 80,780 (s).

Problema n° 8

Una ametralladora dispara una bala con una velocidad de 650 pies/s. Determine los ángulos bajo los cuales la bala alcanzara un blanco situado 450 pies de distancia y 18 pies de altura.

Solución problema n° 8

Realizando un esquema para la situación dada, se tiene:



Para determinar el ángulo α , es necesario utilizar simultáneamente las ecuaciones del movimiento horizontal y vertical, esto es:

$$1)\ \ x = x_0 + (v_0 \cos\theta)\cdot t$$

$$2)\ \ y = y_0 + (v_0 sen\theta)\cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

Cuando el cuerpo ha recorrido una distancia horizontal de 450 pie y una altura de 18 pie, se tiene que el tiempo transcurrido es uno solo, por lo tanto es el mismo en cada una de las ecuaciones anteriores. Si se considera que $x_0 = y_0 = 0$ se puede anotar que:

$$x = (v_0 \cos\theta)\cdot t \quad \Rightarrow 1)\ \ \mathrm{t} = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

$$2)\ \ y = (v_0 sen\theta)\cdot t - \frac{1}{2}g\cdot t^2$$

Reemplazando Ec. (1) en Ec. (2) se tiene:

$$y = \cancel{v}_0 sen\theta \cdot \frac{x}{\cancel{v}_0 \cos\alpha} - \frac{1}{2}g\cdot\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 \text{ cancelando por } v_0 \text{ y considerando que}$$

$$\frac{\mathrm{sen}\theta}{\cos\theta} = tg\theta \quad \text{y que } \frac{1}{\cos} = \sec\theta, \quad \text{se tiene que :}$$

$$y = x\cdot tg\theta - \frac{gx^2}{2v_0}\cdot\sec^2\theta \ \ \text{pero, } \sec^2\theta = tg^2\theta - 1, \text{por lo tanto resulta :}$$

$$y = x\cdot tg\theta - \frac{gx^2}{2v_0}\cdot\left(tg^2\theta - 1\right)$$

$$\Rightarrow y = x\cdot tg\theta - \frac{gx^2}{2{v_0}^2}\cdot tg^2\theta + \frac{gx^2}{2{v_0}^2}$$

Reemplazando los valores numéricos resulta:

$$18(pie) = 450(pie)\cdot tg\theta - \frac{32{,}16(pie/s^2)\cdot(450\,pie)^2\cdot tg^2\theta}{2\cdot(650\,pie/s)^2} - \frac{32{,}16(pie/s^2)\cdot(450\,pie)^2}{2\cdot(650\,pie/s)^2}$$

$$\Rightarrow 18(pie) = 450(pie)\cdot tg\theta - 7{,}707(pie)tg^2\theta - 7{,}707(pie)$$

Ordenando para formar una ecuación de segundo grado, se tiene:

$$7{,}707(pie)tg^2\theta - 450(pie)\cdot tg\theta + 7{,}707(pie) + 18(pie) = 0$$

$$\Rightarrow 7{,}707(pie)tg^2\theta - 450(pie)\cdot tg\theta + 25{,}707(pie) = 0 \text{ aplicando la solucion a la Ec. de 2° grado resulta :}$$

$$tg\theta = \frac{450 \pm \sqrt{450^2 - 4\cdot 7{,}707\cdot 25{,}707}}{2\cdot 7{,}707}$$

$$\Rightarrow tg\theta = \frac{450 \pm 449{,}119}{15{,}414} \quad \text{separando los dos valores, se tiene :}$$

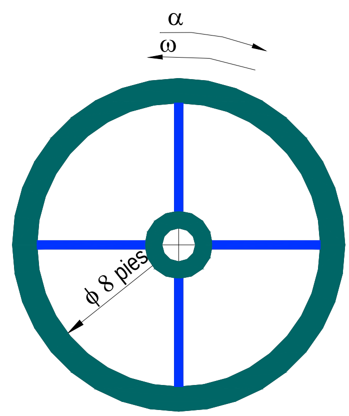
$$\boxed{\begin{array}{l} tg_1\theta = 58{,}331 \Rightarrow \theta = 89{,}018° \text{ y} \\ \\ \mathrm{tg}\theta_2 = 0{,}0572 \Rightarrow \theta = 3{,}274° \end{array}}$$

Problema n°9

Un volante cuyo diámetro es de 8 pie tiene una velocidad angular que disminuye uniformemente de 100 rpm en t = 0 (s), hasta detenerse cuando t = 4 (s). Calcular las aceleraciones tangencial y normal de un punto situado sobre el borde cuando t= 2 (s).

Solución problema n°9

Datos:
ϕ = 8 pies
ω_0 = 100 rpm
t_0 = 0
ω = 0
t = 4 s
a_t =?
a_N =?



Para calcular la aceleración tangencial hay que determinar primero la aceleración angular α, que de acuerdo a los datos entregados se puede obtener aplicando la ecuación de la velocidad angular en el tiempo t, es decir:

$$\omega = \omega_0 + \alpha \Delta t$$

$$\Rightarrow \omega - \omega_0 = \alpha \Delta t \quad \text{despejando } \alpha \text{ resulta :}$$

$$\frac{\omega - \omega_0}{\Delta t} = \alpha \quad \text{pero } \omega = 0 \text{ por lo tanto :}$$

$$\frac{-\omega_0}{\Delta t} = \alpha \text{ reemplazando los valores numericos y recordando las equivalencias de unidades resulta :}$$

$$\alpha = \frac{-100(rpm) \cdot 2\pi (rad/rev) \cdot \frac{1}{60}(\text{min}/s)}{4(s)} \quad \text{lo que da finalmente :}$$

$$\boxed{\Rightarrow \alpha = -2{,}6178(rad/s^2)} \quad \text{el signo negativo significa que el movimiento es desacelerado}$$

Cálculo de aceleración tangencial:

La aceleración tangencial se determina por aplicación de su definición , es decir:

$$a_t = \alpha \cdot r \quad \text{reemplazando los valores nuemricos resulta :}$$

$$a_t = -2{,}617(rad/s^2) \cdot 4(pie) \quad \text{lo que da un resultado de :}$$

$$\boxed{a_t = -10{,}467(pie/s^2)}$$

Cálculo de aceleración normal o centrípeta:

Al igual que la aceleración tangencial, la aceleración centrípeta se calcula por una aplicación directa de la fórmula, es decir:

$$a_N = \omega^2 \cdot r$$

Para esto necesitamos conocer la velocidad angular ω a los 2 (s), ésta la calculamos aplicando la ecuación de velocidad angular en el tiempo t, es decir:

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$$

ω_0= 100 rpm = 10,467 (rad/s), es decir:

$$\omega = 10{,}467(rad/s) - 2{,}617(rad/s^2) \cdot 2(s) \quad \text{realizando la operatoria se obtiene :}$$

$$\boxed{\omega = 5{,}233(rad/s)}$$

Ahora conocida la velocidad angular en el tiempo de 2 segundos es posible determinar la aceleración normal, es decir:

$$a_N = \left[5{,}233(rad/s^2)\right]^2 \cdot 4(pie) \quad \text{lo que da un resultado de :}$$

$$\boxed{a_N = 109{,}537(pie/s^2)}$$

Problema n°10

Un volante cuyo diámetro es de 3 m está girando a 120 rpm. Calcular: (a) Su frecuencia, (b) el período, (c) La velocidad angular, (d) La velocidad lineal de un punto P sobre el borde.

Solución problema n°10

Datos:

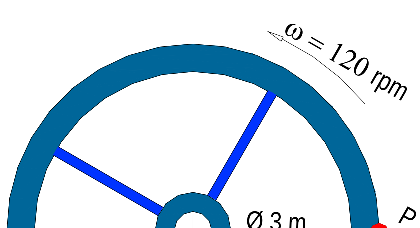
ϕ = 3 m

f = 120 rpm = $\frac{120}{60}(rps) = 2(rps) = 2(1/s)$

T =?

ω =?

v =?



Cálculo del período:

Como se conoce la frecuencia f del movimiento circular, el periodo se obtiene por aplicación directa de su formula, es decir:

$$T = \frac{1}{f}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2(1/s)}$$

$$\boxed{\Rightarrow T = 0,5(s)}$$

Cálculo de la velocidad angular*:*

Conocida la frecuencia, la velocidad angular queda determinada por aplicación directa de la formula:

$$\omega = 2\pi f \quad \text{reemplazando los valores correspondientes se tiene :}$$

$$\omega = 2 \cdot 3{,}14(rad) \cdot 2(1/s)$$

$$\boxed{\Rightarrow \omega = 12{,}56(rad/s)}$$

Cálculo de la velocidad lineal:
Al igual que en los casos anteriores la velocidad lineal se determina por aplicación directa de la fórmula:

$$v = \pi \cdot \phi \cdot f \quad \text{reemplazando los valores correspondientes se tiene :}$$

$$v = 3{,}14(rad) \cdot 3(m) \cdot 2(1/s)$$

$$\boxed{\Rightarrow v = 18{,}84(m/s)}$$

Problema n°11

La tierra da una vuelta completa alrededor de su eje en 23 horas y 56 min. Sabiendo que el radio medio de la tierra es 6370 Km. Hallar la velocidad lineal y la aceleración de un punto de la superficie terrestre.

a) En el ecuador
b) En Madrid a 40º de latitud norte
c) En el polo norte

Solución problema n°11

Datos

T= 23 horas, 56 min = 86160 [s]
R= 6370 Km = 6770000[m]

Velocidad lineal en el Ecuador.

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Escalarmente:

$$v = \omega \cdot r$$

Como la Tierra tiene un movimiento circular uniforme, entonces:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{6{,}28[rad]}{86160[s]} = 7{,}289 \times 10^{-5}\left[\frac{rad}{s}\right]$$

En el ecuador la tierra tiene su radio mayor, Entonces:

$$v = \omega \cdot r = 7{,}289 \cdot 10^{-5}\left[\frac{rad}{s}\right] \cdot 6370000[m]$$

$$\Rightarrow$$

$$v = 464{,}294\left[\frac{m}{s}\right]$$

Cálculo de la aceleración en el Ecuador

Por ser un M.C.U. el movimiento no posee aceleración tangencial, por lo tanto:

$$\vec{a} = \cancel{\vec{a}_T} + \vec{a}_N$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_N = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$Escalarmente: a = 7{,}289 \cdot 10^{-5}\left[\frac{rad}{s}\right] \cdot 464{,}309\left[\frac{m}{s}\right]$$

$$Finalmente: a = 0{,}0338\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Otra forma

Por ser un M. C. U.

$$v = \frac{\pi \cdot \phi}{T}$$
$$v = \frac{3{,}14 \cdot 12740 \times 10^3 [m]}{86160 [s]}$$
$$v = 464{,}294 \left[\frac{m}{s}\right]$$

$$a = \frac{v^2}{r}$$
$$a = \frac{(464{,}294)^2 \left[\frac{m^2}{s}\right]}{6370000 [\cancel{m}]}$$
$$a = 0{,}0338 \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Velocidad en Madrid 40º Latitud Norte

Las expresiones para el calculo de la velocidad y aceleración son las mismas que en el caso anterior, pero en este el radio es menor que en el Ecuador.

Escalarmente:

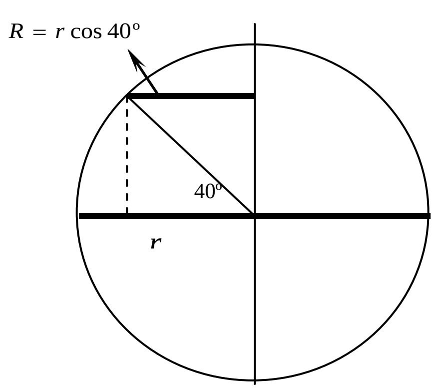
$$v = \omega \cdot r$$

Como la Tierra tiene un movimiento circular uniforme, entonces:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{6{,}28[rad]}{86160[s]} = 7{,}289 \times 10^{-5} \left[\frac{rad}{s}\right]$$

En Filadelfia, 40º latitud norte, la tierra tiene un radio igual a:

$$R = r \cdot \cos 40º = 6370000 m \cdot \cos 40º = 4879703{,}103 [m]$$



Por lo tanto:

$$v = \omega \cdot r = 7{,}289 \cdot 10^{-5}\left[\frac{rad}{s}\right] \cdot 4879703{,}103[m]$$
$$\Rightarrow$$
$$v = 355{,}682\left[\frac{m}{s}\right]$$

Cálculo de la aceleración en Madrid 40º latitud norte

Por ser un M.C.U. el movimiento no posee aceleración tangencial, por lo tanto:

$$\vec{a} = \cancel{\vec{a}_T} + \vec{a}_N$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_N = \omega \times \vec{v}$$
$$Escalarmente: a = 7{,}289 \cdot 10^{-5}\left[\frac{rad}{s}\right] \cdot 355{,}682\left[\frac{m}{s}\right]$$
$$Finalmente: a = 0{,}0259\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Velocidad y aceleración en el Polo Norte

En el polo Norte no hay velocidad lineal ya que el radio es igual a cero, por lo tanto sólo existe aceleración centrípeta y teóricamente es igual en módulo a la aceleración centrípeta del ecuador, su dirección es vertical dirigida hacia el centro de la Tierra.

$$\vec{a} = \vec{a}_N = \vec{\omega} \times \vec{v}$$
$$Escalarmente: a = 7{,}289 \cdot 10^{-5}\left[\frac{rad}{s}\right] \cdot 464{,}309\left[\frac{m}{s}\right]$$
$$Finalmente: a = 0{,}0338\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Problema n°12

La tierra ejecuta una revolución completa alrededor del sol en 365,24 días. Suponiendo que la órbita de la tierra sea una circunferencia de 150 millones de kilómetros, hallar la velocidad y la aceleración de la tierra.

Solución problema n°12:

Datos
1 rev = 2π

T = 365,24 días = 31556736 [s]
ϕ = 150000000 [km] = r =75000000000

Cálculo de velocidades

Escalarmente se tiene:

$$v = \omega \cdot r$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{31556736}\left[\frac{rad}{s}\right]$$

$$\omega = 1{,}991 \times 10^{-7}\left[\frac{rad}{s}\right] \text{Velocidad angular de la ierra}$$

$$\textit{Entonces}:$$

$$v = \omega \cdot r$$

$$v = \left(2 \times 10^{-7}\right) \cdot \left(750 \times 10^{8}\right)\left[\frac{rad}{s}\right] \cdot [m]$$

$$v = 14933{,}1\left[\frac{m}{s}\right] \text{ Velocidad lineal en la superficie de la tierra}$$

Cálculo de la aceleración

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N \quad \text{Pero } \vec{a}_N = 0, \text{entonces}$$

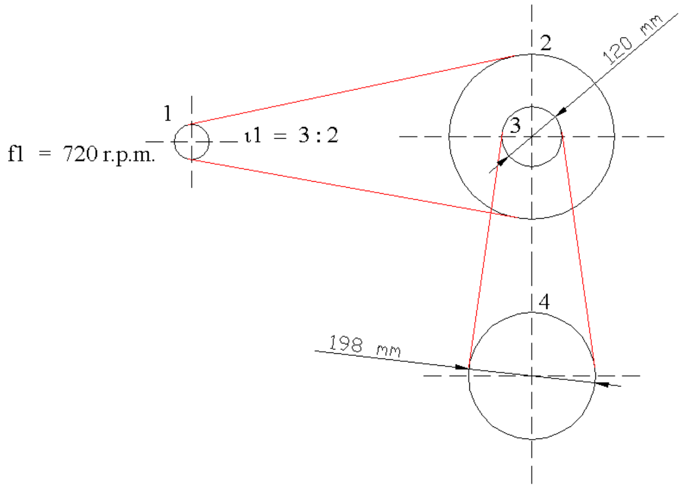
$$a = \omega^2 \cdot r \qquad o \qquad a = \frac{v^2}{r}$$

$$a = \left(2 \times 10^{-7}\right)^2 \frac{rad^2}{s^2} \cdot \left(750 \times 10^{8}\right) m$$

$$a = 0{,}003\left[\frac{m}{s^2}\right] \text{ dirigida hacia el centro de la tierra}$$

Problema n° 13

Para la transmisión múltiple indicada en la figura, determinar el Nº de revoluciones de la rueda 4



Solución problema nº 13:

Para calcular la frecuencia en la polea 4 es necesario conocer la frecuencia en la polea 3, para luego aplicar una ecuación de transmisión de movimiento.

La frecuencia en la polea 3, se puede calcular aplicando la relación de transmisión i_1 , es decir:

$$i_1 = \frac{f_1}{f_2} = \frac{3}{2}$$

Despejando f_2 , resulta:

$$f_2 = \frac{2 \cdot f_1}{3} \text{, es decir:}$$

$$f_2 = \frac{2 \cdot 720 \ r.p.m.}{3}$$

$$f_2 = 480 \text{ r.p.m.}$$

Como la rueda 2 y 3 son concéntricas (solidarias), significan que tienen igual frecuencia, es decir:

$$f_3 = f_2 = 480 \text{ r.p.m.}$$

Ahora, aplicando una ecuación de transmisión, entre polea 3 y polea 4, se tiene:

$$f_3 \cdot \phi_3 = f_4 \cdot \phi_4$$

Despejando f_4 se obtiene:

$$f_4 = \frac{f_3 \cdot \phi_3}{\phi_4}$$

Reemplazando los valores se obtiene:

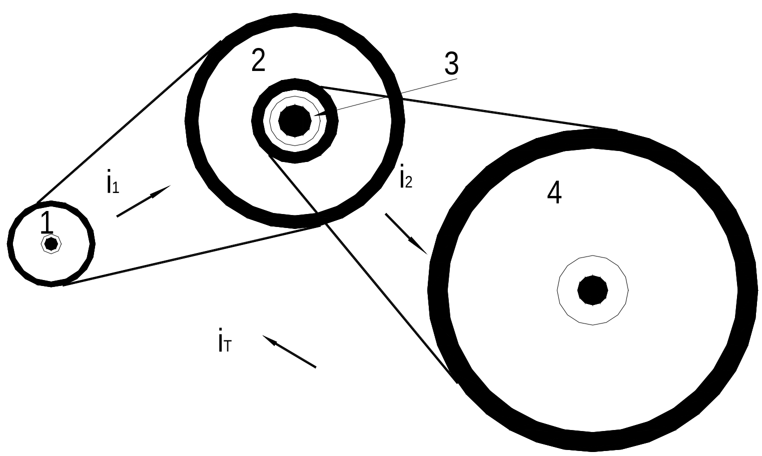
$$f_4 = \frac{480 \; r.p.m. \cdot 120 \; mm}{198 \; mm}$$

$$f_4 = 290{,}91 \; r.p.m.$$

Problema n° 14

Dada la transmisión representada por la figura y datos adjuntos. Determinar: (a) Frecuencia en la polea 2, (b) rapidez lineal en m/s en la polea 3, (c) arco descrito en m por la polea 3 en 90 s, (d) rapidez angular en rad/s en la polea 4, (e) ángulo en radian descrito en polea 4 en 90 s, (f) la aceleración centrípeta en m/s^2 en la polea 4 y (g) transmisión total.

Datos:
ϕ_1 =180 mm
f_1 = 9 rps
ϕ_2 =360 mm
ϕ_3 =200 mm
ϕ_2 =420 mm



Solución problema n° 14

Datos:
ϕ_1 =180 mm
f_1 = 9 rps
ϕ_2 =360 mm
ϕ_3 =200 mm
ϕ_2 =420 mm

Cálculo de frecuencia f_2 en la polea 2:

Para calcular la frecuencia en la polea 2 aplicamos la ecuación de transmisión entre polea 1 y polea 2 ya que se tienen todos los datos para esto, es decir:

$$\phi_1 \cdot f_1 = \phi_2 \cdot f_2$$

Despejando f_2, se tiene:

$$f_2 = \frac{\phi_1 \cdot f_1}{\phi_2} \text{ reemplazando valores numericos se tiene :}$$

$$f_2 = \frac{180(mm) \cdot 9(rps)}{360(mm)}$$

$$\boxed{\Rightarrow f_2 = 4{,}5(rps)}$$

Cálculo de rapidez lineal en polea 3:

Para ello es necesario conocer diámetro y frecuencia, ya que: $v_3 = \pi \cdot \phi_3 \cdot f_3$, como las poleas 2 y 3 son solidarias, significa que tienen la misma frecuencia, es decir, $f_2 = f_3 = 4{,}5$ (rps), luego:

$$v_3 = 3{,}14(rad) \cdot 0{,}2(m) \cdot 4{,}5(rps) \text{ es decir :}$$

$$\boxed{\Rightarrow v_3 = 2{,}826(m/s)}$$

Cálculo del arco descrito en polea 3 en un tiempo de 90 (s):

La ecuación que permite calcular el arco descrito en un tiempo t queda determinado por $s = v \cdot t$, como se conoce la rapidez lineal y el tiempo para la polea 3, se tiene que:

$$s = 2{,}826(m/s)\cdot 90(s) \text{ es decir :}$$

$$\boxed{s = 254.34(m)}$$

Cálculo de rapidez angular para la polea 4:

Para el cálculo de la rapidez angular se pueden utilizar las ecuaciones $\omega = 2\pi \cdot f$ **o** $\omega = \frac{v}{R}$, eligiendo la segunda ecuación ya que se conoce la velocidad lineal y el radio de la polea 4 se tiene:

$$\omega_4 = \frac{v_4}{R_4}, \quad \text{pero } v_4 = v_3 = 2{,}826 \text{ (m/s) por lo tanto:}$$

$$\omega_4 = \frac{v_3}{R_4}$$

$$\Rightarrow \omega_4 = \frac{2{,}826(m/s)}{0{,}210(m)}$$

$$\boxed{\Rightarrow \omega_4 = 13{,}457(rad/s)}$$

Cálculo de ángulo descrito por la polea 4 en un tiempo de 90 (s):

Para un movimiento circular el ángulo descrito en un tiempo determinado, queda determinado por la ecuación $\theta = \omega t$, como se conoce la rapidez angular ω_4 y el tiempo t, se tiene que:

$$\theta = 13{,}457(rad/s)\cdot 90(s)$$

$$\boxed{\Rightarrow \theta = 1211{,}13(rad)}$$

Cálculo de aceleración centrípeta en la polea 4:

La aceleración centrípeta queda determinada por la ecuación $a_c = \frac{v^2}{r}$ o $a_c = \omega^2 \cdot r$, eligiendo arbitrariamente la segunda ecuación, se tiene:

$$a_{c4} = \omega_4{}^2 \cdot r_4 \quad \text{al reemplazar los valores correspondientes resulta :}$$
$$a_{c4} = [13{,}457(rad/s)]^2 \cdot 0{,}210(m) \quad \text{lo que da un resultado de :}$$

$$\boxed{a_{c4} = 38{,}029(m/s^2)}$$

Cálculo de transmisión total:

El valor de la transmisión total o relación de transmisión, queda determinado por el producto de las relaciones de transmisiones parciales, es decir: $i_T = i_1 \cdot i_2$

Pero: $i = \dfrac{f_{\text{motriz}}}{f_{\text{conducido}}} = \dfrac{\phi_{\text{conducido}}}{\phi_{motriz}}$

Eligiendo trabajar con los diámetros se tiene:

$$i = \frac{\phi_{\text{conducido}}}{\phi_{motriz}}$$
$$\Rightarrow i_T = \frac{\phi_2}{\phi_1} \cdot \frac{\phi_4}{\phi_3} \quad \text{al reemplazar los valores correspondientes se tiene :}$$
$$i_T = \frac{360(mm)}{180(mm)} \cdot \frac{420(mm)}{200(mm)} \quad \text{simplificando resulta que :}$$

$$\boxed{i_T = \frac{21}{5}}$$

Esto significa que por cada 21 vueltas da le polea motriz 1, la polea conducida 4 da 5 vueltas.

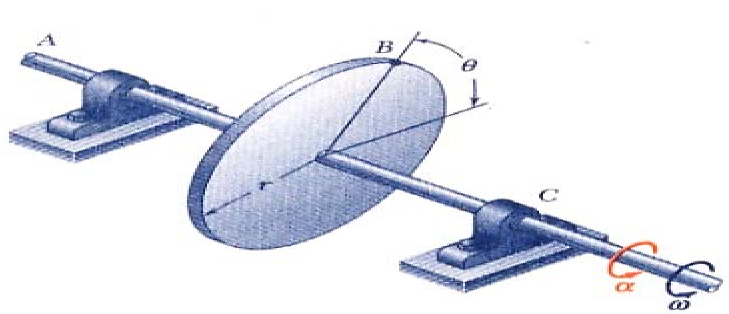
Problema n°15

La placa circular de la figura está inicialmente en reposo. Sabiendo que r = 200 mm y que la placa posee una aceleración angular constante de 0,3 $\frac{rad}{s^2}$.

Hallar el módulo de la aceleración total del punto B cuando:

a) t = 0

b) t = 2 (s)



Solución problema n°15:

Datos

$r = 0.2[m]$

$\alpha = 0,3\left[\frac{rad}{s}\right]$

$\omega_0 = 0$

Aceleración para t = 0

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$
$$escalarmente:$$
$$a = \alpha \cdot r + \omega^2 \cdot v = \alpha \cdot r + \omega^2 \cdot r$$

En t = 0, $\omega = 0$, por lo tanto:

$$a_B = \alpha \cdot r$$
$$a_B = 0{,}3\left[\frac{rad}{s^2}\right] \cdot 0{,}2[m]$$
$$a_B = 0{,}06\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Aceleración para t = 2 segundos

La aceleración tangencial permanece constante debido a que la aceleración angular es constante. Se debe calcular la velocidad angular para el tiempo de 2 segundos

$$\omega = \omega_0 + \alpha_0 \cdot t \quad \text{pero } \omega_0 = 0 \text{ por lo tanto:}$$

$$\omega = 0.3\left[\frac{rad}{s^{\cancel{2}}}\right] \cdot 2[\cancel{s}]$$

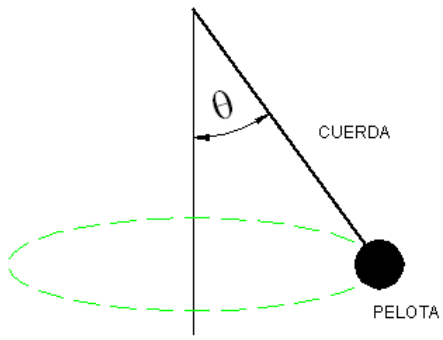
$$\omega = 0.6\left[\frac{rad}{s}\right]$$

Entonces reemplazando valores y calculando se tiene:

$$a_B = \alpha \cdot r + \omega^2 \cdot r$$
$$a_B = 0{,}06\left[\frac{m}{s^2}\right] + \left(0{,}6\left[\frac{rad}{s}\right]\right)^2 \cdot 0{,}2[m]$$
$$a_B = 0{,}06\left[\frac{m}{s^2}\right]e_T + 0{,}072\left[\frac{m}{s^2}\right]e_N$$
$$a_B = \sqrt{0{,}06^2 + 0{,}072^2} = 0{,}0937\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Problema 16

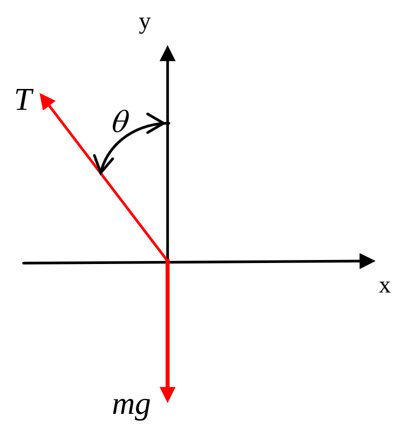
Una pelota con una masa de 2 kg., gira en un círculo horizontal de la forma indicada en la figura. Sabiendo que el ángulo θ = 37º, ¿Cuál es el valor aproximado, en Newton, de la tensión de la cuerda? (Usar g = 9,81 m/s^2)



Solución problema n°15:

El problema trata de un sistema dinámico, pero como el movimiento circular uniforme es horizontal, no existe aceleración en el eje vertical (eje y), por lo tanto para el eje y se tiene que:

Eje y:



$$\sum F = 0$$

Por diagrama vectorial se tiene que:

$$T \cdot \cos\theta - mg = 0$$

Despejando la tensión T resulta:

$$T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

Reemplazando valores numéricos: $m = 2kg$; $g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$ y $\theta = 37^{o}$:

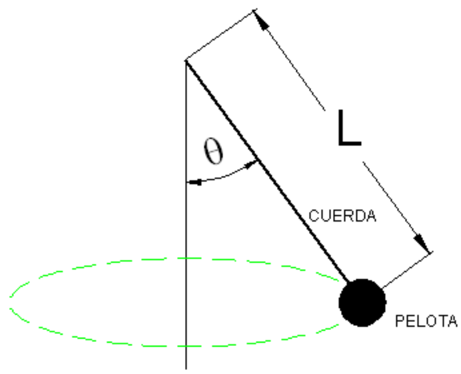
$$T = \frac{2kg \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}}{\cos 37^{o}}$$

Realizando la operatoria:

$$T = 24{,}567N$$

Problema 17

Una pelota con una masa de 2 kg., gira en un círculo horizontal en la forma indicada en la figura. Sabiendo que L = 1,2 m. y que el ángulo θ = 37º, ¿Cuál es el valor, aproximadamente, en m/s, de la velocidad lineal de la pelota? (usar 9,81 m/s^2)



Sistema dinámico, por lo tanto se cumple el 2º principio de Newton, es decir, se cumple que:

$$\sum F = m \cdot a$$

Como el movimiento es circular uniforme, la aceleración es centrípeta o normal, que está dirigida hacia el centro de curvatura, por lo tanto existe aceleración solo en un eje. Como la circunferencia descrita es horizontal se puede elegir el eje x horizontal y por tanto la aceleración normal corresponde al eje x. (no hay aceleración para el eje y) por lo tanto:

Eje x: $\sum F = m \cdot a_n = m \cdot \frac{v^2}{r}$, observando el diagrama de fuerzas:

$$T \cdot sen\theta = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Despejando v resulta:

$$\sqrt{\frac{r \cdot T \cdot sen\theta}{m}} = v$$

Por ejercicio anterior se tiene que:

$T = 24{,}567N$ por trigonometría elemental $sen\theta = \frac{r}{L}$, por lo tanto $r = L \cdot sen\theta$

Es decir: $r = 1{,}2m \cdot sen37^{o} = 0{,}722m$

Reemplazando los valores $r = 0{,}722m$; $T = 24{,}567kg\frac{m}{s^2}$; $m = 2kg$ y $\theta = 37^{o}$ se tiene:

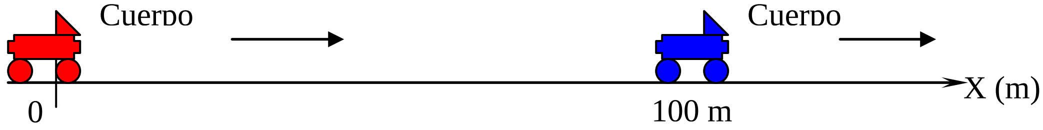
$$\sqrt{\frac{0{,}722m \cdot 24{,}567kg\frac{m}{s^2} \cdot sen37^{o}}{2kg}} = v$$

Realizando la operatoria resulta el valor de la velocidad máximas que puede tomar la pelota, es decir:

$v = 2{,}310\frac{m}{s}$

Ejercicios Propuestos – Cinemática de la Partícula

Un automóvil se encuentra en la posición de 100 m y viaja a razón de 95 km/h , una hora más tarde, desde el origen le sigue en la misma dirección y sentido un segundo automóvil que parte reposo y acelera a razón de 0,6 m/s^2 . (Preguntas 1, 2 y 3)



1. El tiempo transcurrido al momento en que el segundo cuerpo alcanza al primero es:

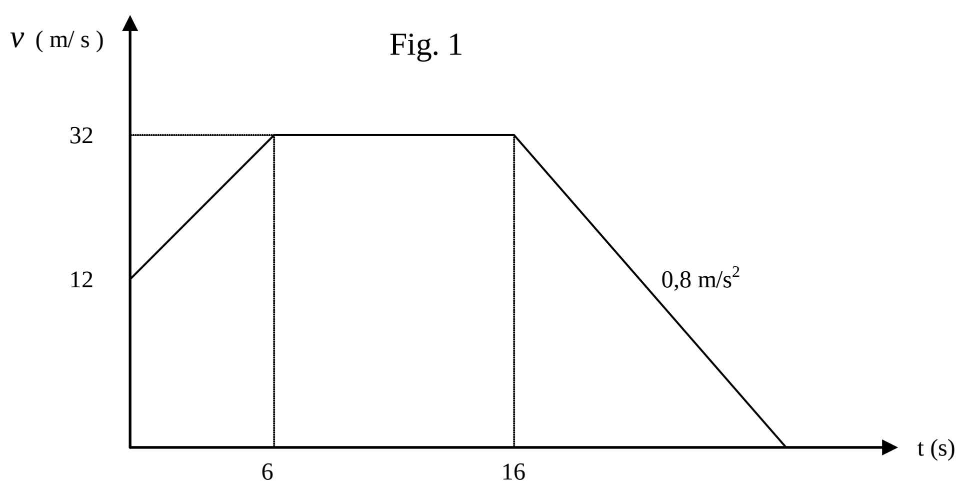
a) 151,884 h
b) 207,014s
c) 354.887 s
d) 608,724 s

2. La distancia en km, recorrida por el cuerpo 1 al momento del encuentro es:

a) 223,7 km
b) 111,063 km
c) 212,539 km
d) 537,5 km

3. La distancia en km, recorrida por el cuerpo 2 al momento del encuentro es:
a) 223,7 km
b) 111,164 km
c) 212,539 km
d) 537,5 km

El movimiento de un cuerpo está dado por la siguiente grafica:



Las preguntas 4, 5 , 6 y 7 corresponden a la grafica de la figura 1.

4. La aceleración del cuerpo al intervalo de tiempo comprendido entre 0 a 6 segundos es:

a) 3.333 m/s^2
b) 3,812 m/s^2
c) 4,024 m/s^2
d) 4,861 m/s^2

5. El tiempo total transcurrido en que el cuerpo queda en reposo es:
a) 26 s
b) 31 s
c) 40 s
d) 56 s

6. La distancia recorrida por el cuerpo, desde que comienza a frenar hasta que queda en reposo es:

a) 640 m
b) 860 m
c) 920 m
d) 972 m

7. La velocidad del cuerpo al segundo 20 es:
a) 25,62 m/s
b) 26,48 m/s
c) 28,8 m/s
d) 29,5 m/s

Las preguntas 8 , 9 , 10 , 11,12 , 13 y 14 se refieren al siguiente enunciado:
Desde lo alto de una torre de 120 m, es lanzado un proyectil con una velocidad de 100 m/s a un ángulo de 40º respecto de la horizontal (figura 2)

8. El tiempo total de vuelo es:

a) 7,871 s
b) 14,776 s
c) 17,068 s
d) 26,567 s

9. El alcance horizontal máximo es:

a) 683,558 m
b) 1131,91 m
c) 1307,485 m
d) 1960,247m

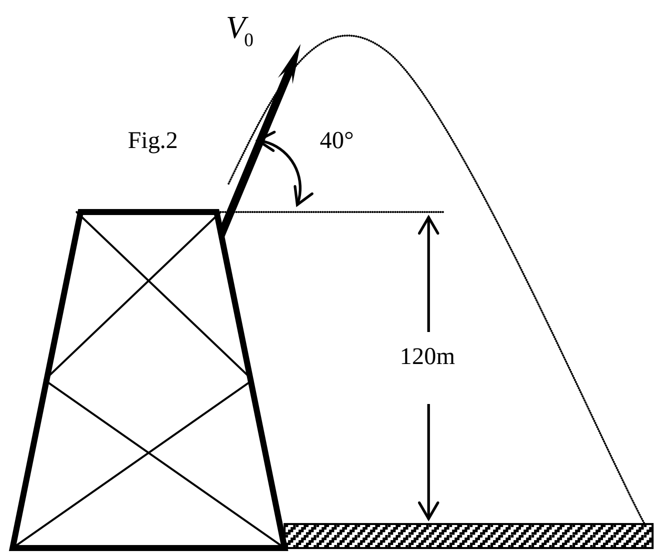


Fig.2

10. El tiempo que el proyectil demora en alcanzar la altura máxima es:

a) 6,6 s
b) 9,8 s

c) 12,7 s
d) 14,1 s

11. La altura máxima respecto al suelo es:

a) 240,321 m
b) 280,125m
c) 310,204 m
d) 330,804 m

12. La componente vertical de la velocidad del proyectil al momento de llegar al suelo es:

a) – 56,068 m/s
b) – 67,266 m/s
c) – 80,526 m/s
d) – 115,749 m/s

13. La componente horizontal de la velocidad del proyectil al momento de llegar al suelo es:

a) 76,604 m/s
b) –87,811 m/s
c) 95,867 m/s
d) –115,749 m/s

14. La magnitud de la velocidad del proyectil al llegar al suelo es:

a) 51,925 m/s
b) 67,811 m/s
c) 98,756 m/s
d) 111,142 m/s

Las preguntas 15, 16, 17, 18, 19 y 20 corresponden a la transmisión indicada en la figura 2.

15. La velocidad lineal en m/s de la polea 2 es aproximadamente:

a) 18,751
b) 3,014
c) 3,254
d) 15,072

16. La frecuencia en rps de la polea 3 es aproximadamente:

a) 0,5 rps
b) 1,2 rps
c) 2,0 rps
d) 120 rps

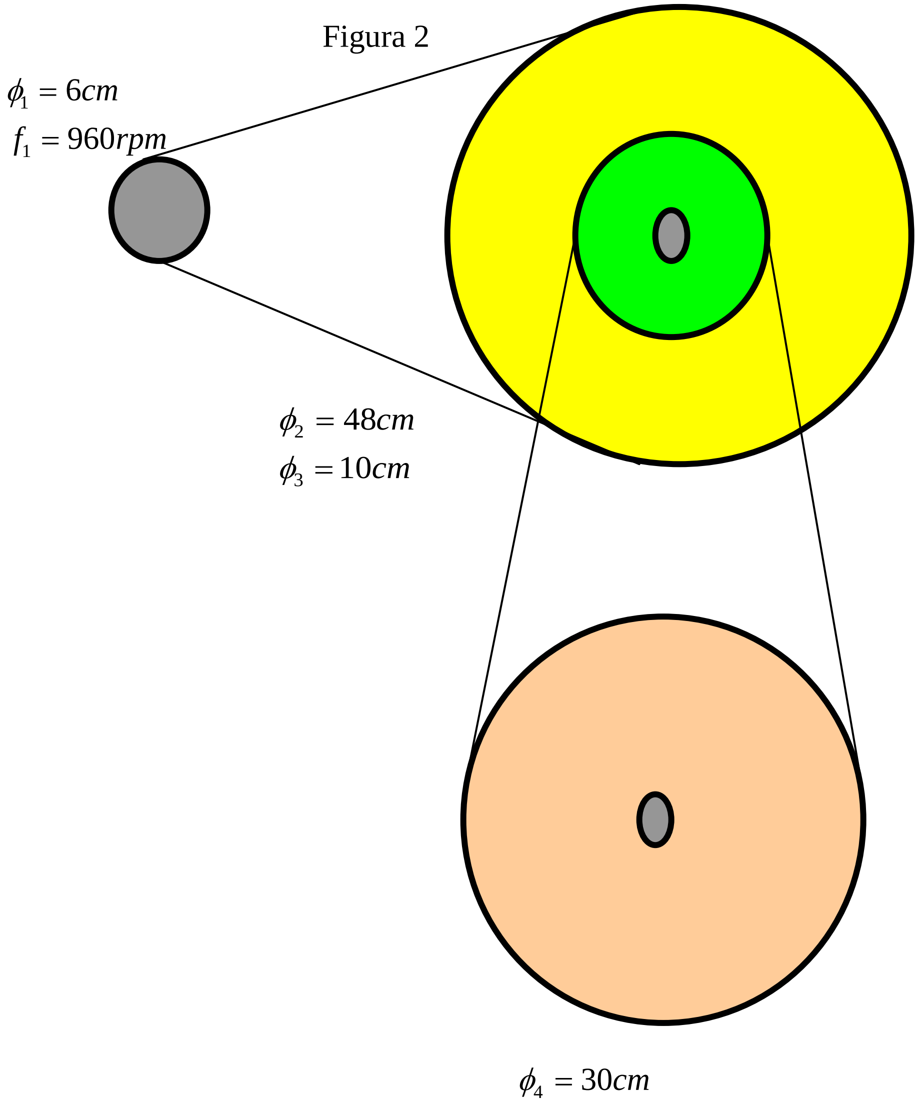
17. La velocidad angular en rad/s de la polea 3 es aproximadamente:

a) 6,28 rad/s
b) 3,14 rad/s
c) 16,24 rad/s
d) 12,56 rad/s

18. La velocidad lineal en m/s de la polea 4 es aproximadamente:

a) 0,628
b) 1,256
c) 45,324
d) 23,663

Figura 2



19. La aceleración centrípeta de la polea 4 es aproximadamente:

a) 2,63 m/s^2
b) 14,21 m/s^2
c) 2,13 m/s^2
d) 30,144 m/s^2

20. La relación total de transmisión es:
a) 5 es a 1
b) 24 es a 1
c) 80 es a 1
d) 15 es a 1

Una pequeña rueda de afilar está unida al eje o árbol de un motor eléctrico cuya velocidad nominal es de 3600 rpm. Cuando se enciende alcanza su velocidad nominal en 5 segundos y, al cortarse la energía, la rueda llega al reposo en 70 segundos. Suponer el movimiento uniformemente acelerado.
(Preguntas 21, 22, 23 y 24)

21. La aceleración angular en rad/s^2 de la rueda mientras alcanza la velocidad nominal es:

a) 75,36
b) 45,71
c) 47,5
d) 28,5

22. El número de vueltas que la polea alcanza a realizar hasta alcanzar la velocidad nominal es:
a) 401
b) 200
c) 150
d) 507

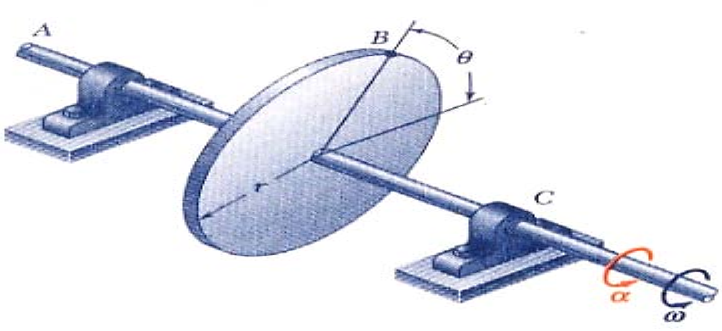
23. La aceleración angular en rad/s^2 de la polea, desde que se corta la energía hasta que se detiene es:

a) – 6,629 rad/s^2
b) – 1, 056 rad/s^2
c) – 2,54 rad/s^2
d) – 5,383 rad/s^2

24) El número de vueltas que la polea alcanza a realizar, desde que se corta la energía hasta que la polea se detiene es aproximadamente:
a) 1590,9
b) 1900
c) 2100
d) 4000

Las preguntas 25 y 26 corresponden al siguiente enunciado:

La placa circular de la figura está inicialmente en reposo. Sabiendo que r = 300 mm y que la placa posee una aceleración angular constante de $0{,}4 \ \frac{rad}{s^2}$.



BIBLIOGRAFÍA

25) El módulo de la aceleración total en rad/s^2 del punto B en el tiempo t = 0 es:

a) 0,06
b) 1,20
c) 2,10
d) 0,12

26) El módulo de la aceleración total en rad/s^2 del punto B en el tiempo t = 4 es:

a) 0,604
b) 0,777
c) 0,867
d) 0,120

Pregunta	a	b	c	d
1				x
2		x		
3			x	
4	x			
5				x
6	x			
7			x	
8	x			
9		x		

Pregunta	a	b	c	d
10	x			
11				x
12		x		
13	x			
14				x
15		x		
16			x	
17				x
18	x			

Pregunta	a	b	c	d
19	x			
20	x			
21	x			
22			x	
23				x
24			x	
25				x
26		x		

- Paúl E. Tippens	- Física, Conceptos y Aplicaciones M^c Gaw Hill, Quinta Edición, 1996
- Halliday – Resnick – Krane	- Física , Vol. 1 CECSA, 4ª Edición 1999
- Raymond A. Serway	- Física, Tomo I M^c Gaw Hill, 4ª Edición 1999
- Sears – Zemansky - Young - Freedman	- Física Universitaria, Vol. 1 Ed. Pearson, 9ª Edición 1996
- Frederick Bueche	- Fundamentos de Física, Tomo I
- F. Beer – R. Johnston	- Mecánica Vectorial para Ingenieros. Estática M^c Gaw Hill, 6ª Edición. 2000
- F. Beer – R. Johnston	- Mecánica Vectorial para Ingenieros. Dinamica M^c Gaw Hill, 6ª Edición. 2000
- M. Alonso – E Finn	Física Addison Wesley, 1995
- Alvaro Pinzon	Física. Conceptos fundamentales y su aplicación.
- Guías INACAP	