CAP. 4: CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA.

Modelo de partícula: se aplica a cuerpos muy pequeños comparados con el diámetro de la menor esfera donde cabe la trayectoria completa del cuerpo. Equivale a considerar al objeto como un punto, sin dimensiones de largo, ancho y altura. (En el análisis de las interacciones –en la Dinámica– se considera, además, que la partícula tiene masa, aunque sean despreciables sus dimensiones).

Sistema de referencia: conjunto de cuerpos físicos en reposo relativo, y relojes sincronizados asociados a cada cuerpo de referencia, que sirven para describir el movimiento mecánico de los cuerpos respecto a esos tomados como referencia.

Sistema coordenado: sistema de ejes y variables de posición que sirven para localizar cada punto del espacio con respecto al sistema de referencia. Los ejes se orientan a lo largo de los cuerpos de referencia y su origen se coloca en alguno de estos cuerpos. Son usuales las coordenadas cartesianas, (x,y,z), las cilíndricas, (ρ,φ,z) y las esféricas (r,φ,θ). Las coordenadas polares son un caso especial de las cilíndricas (ρ,φ) o de las esféricas (r,φ).

Movimiento rectilíneo: la trayectoria de la partícula es una línea recta respecto al sistema de referencia. Es usual tomar un eje de referencia cartesiano, x o y, a lo largo de la trayectoria, para describir el movimiento con una sola variable.

Movimiento curvilíneo: la trayectoria es curva respecto al sistema de referencia. Si se trata de una curva plana se usan dos variables para describir el movimiento (x,y) o (r,φ). Si es una curva tridimensional, se usarán tres coordenadas.

Ley del movimiento: funciones matemáticas que describen el movimiento de la partícula, expresando cada coordenada como función del tiempo: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, si se usan coordenadas cartesianas; o $\rho = \rho(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $z = z(t)$, si se usan coordenadas cilíndricas; o

$r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $\theta = \theta(t)$ si se usan coordenadas esféricas. Si el movimiento es rectilíneo, basta una sola ecuación para dar la ley del movimiento de la partícula. Si es circular, es cómodo usar las cilíndricas $\rho = const.$, $\varphi = \varphi(t)$, o las esféricas en el plano ecuatorial $r = const.$, $\varphi = \varphi(t)$.

Vector de posición: vector $\boldsymbol{r}$ dirigido desde el origen de coordenadas al punto (posición) donde está la partícula en cada instante. Si la partícula se mueve es un vector que cambia con el tiempo, y la ley de movimiento se puede expresar en la forma: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, ecuación vectorial que puede escribirse en tres componentes, correspondientes a las tres coordenadas utilizadas. En el Sistema Internacional de unidades (SI) se mide en metros (m).

Vector unitario: vector de magnitud unidad (valor 1), sin unidades, cuya dirección indica hacia dónde apunta un vector cualquiera. Así, si $\boldsymbol{r}$ es un vector de posición de magnitud r, y $\hat{\boldsymbol{r}}$ es el unitario que apunta en la dirección de $\boldsymbol{r}$, entonces el vector $\boldsymbol{r}$ se puede expresar como $\boldsymbol{r} = r\hat{\boldsymbol{r}}$ (donde $|\hat{\boldsymbol{r}}| = 1$).

Vectores unitarios cartesianos: son tres vectores unitarios, cada uno apuntando en la dirección en que aumenta cada una de las tres coordenadas x,y,z. Se simbolizan por: $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$, $\hat{\boldsymbol{z}}$, o por $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. En función de estos vectores unitarios, un vector de posición cualquiera puede expresarse como

$$\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}, \qquad \text{o} \qquad \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

Vectores unitarios cilíndricos: son tres vectores unitarios, cada uno apuntando en la dirección en que aumenta cada una de las tres coordenadas r,φ,z. Se simbolizan por: $\hat{\boldsymbol{\rho}}$, $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$, $\hat{\boldsymbol{z}}$. En función de estos vectores unitarios, un vector de posición cualquiera puede expresarse como

$$\boldsymbol{r} = \rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + z\hat{\boldsymbol{z}}.$$

Vector desplazamiento: es el vector que une el punto de partida con el punto de llegada en cierto intervalo de tiempo escogido:

$$\boldsymbol{\Delta r} = \boldsymbol{r}_{final} - \boldsymbol{r}_{inicial}$$

Su magnitud mide la distancia entre el punto inicial y el final, medida en línea recta. En el SI se expresa en metros (m).

Longitud recorrida sobre la trayectoria: es la distancia recorrida, s, a lo largo de la trayectoria, medida siempre positivamente en la dirección en que avanza la partícula:

$$s = \Sigma\Delta s_i$$

Cada Δs_i se considera positiva, independientemente del signo de cada desplazamiento:

$$\Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2 + \Delta z_i^2}$$

En el límite: $s = \int ds$ donde $ds = \sqrt{ds^2 + dy^2 + dz^2}$. Se cumple: $s \geq |\Delta \boldsymbol{r}|$. En el SI se expresa en metros (m).

Velocidad media en un intervalo de tiempo dado: mide el desplazamiento por unidad de tiempo, a ritmo constante, con el que se logra el mismo desplazamiento en el mismo tiempo que el movimiento real para el intervalo analizado:

$$\boldsymbol{v_m} = \boldsymbol{\Delta r}/\Delta t$$

Es un vector. En el SI se expresa en metros por segundo (m/s).

Rapidez media (o celeridad media) en un intervalo de tiempo dado: mide la distancia recorrida por unidad de tiempo a lo largo de la trayectoria, a ritmo constante, con la que se logra recorrer la misma distancia recorrida en el mismo tiempo que el movimiento real para el intervalo analizado:

$$c_m = \Delta s/\Delta t$$

Se cumple $c_m \geq |\boldsymbol{v_m}|$. Es un escalar positivo. En el SI se expresa en metros por segundo (m/s).

Velocidad instantánea: representa la velocidad media en intervalos infinitesimales de tiempo,

$$\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt$$

En movimientos rectilíneos se trabaja como un escalar, v_x, positivo o negativo, pero es en realidad la componente única del vector velocidad: $\boldsymbol{v} = v_x\,\hat{\boldsymbol{x}}$, donde $v_x = dx/dt$. En movimientos curvilíneos:

$$\boldsymbol{v} = v_x\,\hat{\boldsymbol{x}} + v_y\,\hat{\boldsymbol{y}} + v_z\,\hat{\boldsymbol{z}},$$

donde $v_x = dx/dt, \quad v_y = dy/dt \quad \text{y} \quad v_z = dz/dt$

Es un vector que apunta en cada instante en la dirección en que se mueve la partícula (es un vector tangente a la trayectoria en cada instante). En el SI se expresa en metros por segundo (m/s).

Rapidez instantánea (o celeridad instantánea): representa la rapidez media en intervalos infinitesimales de tiempo, $c = ds/dt$. Es un escalar positivo. Para valores instantáneos, se cumple que

$$c = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

En el SI se expresa en metros por segundo (m/s).

Vector unitario tangente a la trayectoria: es un vector unitario que en cada punto de la trayectoria es tangencial a ésta, y apunta en la dirección del vector velocidad: $\hat{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{v} / v$. El vector velocidad instantánea puede expresarse:

$$\boldsymbol{v} = v\,\hat{\boldsymbol{T}}.$$

Aceleración media: representa el cambio del vector velocidad por unidad de tiempo a ritmo constante, en un intervalo de tiempo dado,

$$\boldsymbol{a}_m = \Delta\boldsymbol{v}/\Delta t$$

Es un vector que apunta en la dirección en que cambia el vector velocidad en el intervalo considerado. En el SI se expresa en metros por segundo cuadrado (m/s^2).

Aceleración instantánea: representa el cambio del vector velocidad por unidad de tiempo en cada instante,

$$\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{v}/dt$$

Es un vector que apunta en la dirección en que cambia el vector velocidad en cada instante. En el SI se expresa en metros por segundo cuadrado (m/s^2). Si el movimiento es rectilíneo, el vector aceleración es tangente a la trayectoria, en la misma dirección del vector velocidad si la rapidez del movimiento se incrementa (movimiento impulsado), y en dirección opuesta la vector velocidad si el movimiento es de frenado. Si el movimiento es curvo, el vector aceleración apunta en cada instante hacia donde se desviará el vector velocidad durante el recorrido en cada instante, esto es, apunta hacia la concavidad de la curva.

Componente tangencial de la aceleración: es la componente del vector aceleración tangencial a la trayectoria en cada instante:

$$\boldsymbol{a_t} = a_t\,\widehat{\boldsymbol{T}}$$

donde $a_t = dc/dt$, o $a_t = d|v|/dt$

Notar que no es la derivada del vector velocidad instantánea, sino la derivada de la rapidez instantánea. Esta a_t es negativa en frenados y positiva en impulsiones.

Radio de curvatura de una curva: es el radio de la circunferencia que mejor ajusta a la curva en cada punto (ajuste a un diferencial *ds* de longitud). Lo representaremos por *R*. Mientras más cerrada es una curva, menor es su radio de curvatura.

Componente normal de la aceleración: es la componente del vector aceleración perpendicular a la trayectoria en cada instante, y representa la rapidez con que cambia de dirección el vector velocidad. Se llama también "aceleración centrípeta" y apunta hacia el centro de la circunferencia que mejor se ajusta a la curva en cada punto. Si llamamos $\widehat{\boldsymbol{N}}$ al vector unitario normal a la trayectoria en cada punto, y que apunta hacia el centro de curvatura, entonces la componente normal de la aceleración se expresa como

$$\boldsymbol{a_n} = a_n\widehat{\boldsymbol{N}}$$

donde $a_n = v^2/R$

(v: rapidez instantánea; R: radio de curvatura). Esta a_n es siempre positiva hacia el centro de la curva.

Relación entre la aceleración instantánea y sus componentes: en función de sus componentes cartesianas se cumple:

$$\boldsymbol{a} = a_x\,\widehat{\boldsymbol{x}} + a_y\,\widehat{\boldsymbol{y}} + a_z\,\widehat{\boldsymbol{z}}$$

donde $a_x = dv_x/dt$, $a_y = dv_y/dt$ y $a_z = dv_z/dt$,

con $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

En función de sus componentes normal y tangencial:

$$\boldsymbol{a} = a_t\,\widehat{\boldsymbol{T}} + a_n\,\widehat{\boldsymbol{N}}$$

donde $a_t = d|v|/dt$ y $a_n = v^2/R$,

con $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$.

Leyes cinemáticas:

Las siguientes son leyes particulares para algunos tipos de movimientos, o para relacionar las cantidades cinemáticas observadas en un sistema S y en otro sistema S'.

a) Movimiento rectilíneo con aceleración constante:

$x = x_o + v_o t + \frac{1}{2} at^2$, $\Delta x = v_o t + \frac{1}{2} at^2$, $v = v_o + at$, $v^2 = v_o^2 + 2a\Delta x$, $v_m = (v_o + v)/2$

b) Movimiento de proyectiles:

$x = x_o + v_o t \cos\theta_o$, $y = y_o + v_o t \operatorname{sen}\theta_o - \frac{1}{2} gt^2$, $v_x = v_o \cos\theta_o$, $v_y = v_o \operatorname{sen}\theta_o - gt$ con $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$

c) Movimiento circular uniforme con centro en el origen (en contra del reloj):

$x = R \cos\omega t$, $y = R \operatorname{sen}\omega t$ en cartesianas, o $\rho = R$, $\theta = \omega t$ en cilíndricas (polares)

d) Movimiento armónico simple:

$x = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$, $v = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$, $a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$, $x = -\omega^2 x$

e) Suma clásica de velocidades:

$\boldsymbol{v}_{ps} = \boldsymbol{v}_{ps'} + \boldsymbol{V}_{s's}$

f) Suma clásica de aceleraciones:

$\boldsymbol{a}_{ps} = \boldsymbol{a}_{ps'} + \boldsymbol{A}_{s's}$

PROBLEMAS DE CINEMÁTICA.

4.1-Un carro parte del reposo con una aceleración constante de 4.0 m/s^2 a lo largo de 50 m. Con la velocidad alcanzada continúa por 10 s sin aceleración y finalmente frena en una distancia 80 m con aceleración constante.

a)¿Qué velocidad alcanzó en la primera etapa?

b)¿Qué distancia total recorrió desde que arrancó hasta que se detuvo?

c)¿Qué tiempo total se estuvo moviendo?

d)¿Cuál fue la aceleración de frenado?

e)¿Cuál fue la velocidad media de todo el recorrido?

Solución:

Hay tres etapas en el movimiento: una de impulsión (con $x_o=0$, $v_o = 0$, $a = 4.0$ m/s^2, una sin aceleración (con la velocidad v que ganó al final de la primera etapa y durante $t = 10$ s), y una tercera etapa en que frena (el frenado comienza con la velocidad v que trae de la etapa anterior, termina con velocidad cero y se desplaza 80 durante el frenado).

50 m impulsado | 10 s sin aceleración | 80 m frenando | x

a) $v^2 = v_o^2 + 2a\Delta x_1$. De aquí: $v=\sqrt{2a\Delta x_1} = \sqrt{2 \times 4 \times 50} = 20$ m/s

b) En la segunda etapa, sin aceleración, recorre: $\Delta x_2 = v\Delta t = 20\times 10 = 200$ m.

La distancia total recorrida es: $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = 50 + 200 + 80 = 330$ m

c) El tiempo total será la suma de los tiempos de las tres etapas:

t_1: $v = v_o + at$. De aquí: $t_1 = v/a = 20/4.0 = 5.0$ s

$t_2 = 10$ s, por dato

$t_3 = (v - v_o)/a_{frenado}$. La $a_{frenado}$ se obtiene de $a_{frenado} = (v^2 - v_o^2)/(2\,\Delta x_3) = (0 - 400)/160 =$

$= -2.5$ m/s^2 (que es la respuesta a la pregunta d). Así:

$t_3 = (v - v_o)/a_{frenado} = (0 - 20)/(-2.5) = 8.0$ s

El tiempo total es entonces: $t = 5 + 10 + 8 = 23$ s.

d) $a_{frenado} = -2.5$ m/s^2 (calculado antes).

e) La velocidad media en todo el movimiento es: $v_{media} = \Delta x/\Delta t = 330/23 = 14$ m/s

4.2-Se lanza hacia arriba un bloque con una velocidad inicial de 8.0 m/s, desde un balcón. A la vez se lanza hacia abajo otro cuerpo, a 2.0 m/s, desde otro balcón que está a 30 m por arriba del primero.

a)¿Al cabo de que tiempo están los bloques a la misma altura?

b)¿Qué velocidad lleva cada uno en el instante del encuentro?

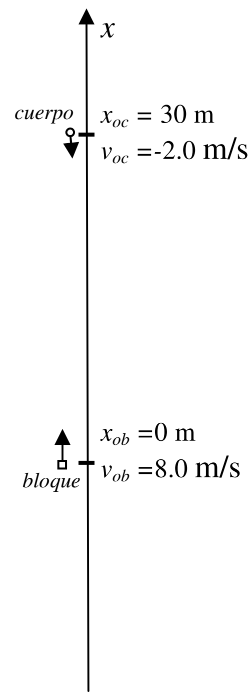
c)En el encuentro: ¿van en direcciones opuestas o en la misma dirección?

d)¿A qué distancia del balcón inferior se encuentran?

Solución:

Haremos uso de las ecuaciones del movimiento con aceleración constante: $x = x_o + v_o t + ½\, at^2$ y $v = v_o + at$, con la aceleración de caída libre g =9.80 m/s^2.

La figura adjunta muestra los dos balcones, en un eje x positivo hacia arriba. El balcón inferior está en $x_{ob} = 0$, que representa la coordenada inicial del bloque, con velocidad inicial positiva v_{ob} = 8.0 m/s. El balcón superior está en x_{oc}= 30 m, que es la coordenada inicial del cuerpo que se lanza hacia abajo, con velocidad negativa –2.0 m/s. La aceleración para ambos es negativa: $a_b = a_c = -9.8$m/s^2.



La ley de movimiento para cada cuerpo es:

$x_b = 8.0t - ½{\times}9.8t^2 = 8.0t - 4.9t^2$ y

$x_c = 30 - 2.0t - 4.9t^2$

a)Cuando estén a la misma altura: $x_b = x_c$, o sea:

$8.0t - 4.9t^2$=$30 - 2.0t - 4.9t^2$. Se despeja t: t = 3.0 s.

b)Tendremos: v_b = 8.0 – 3.0×9.8 = -21.4 m/s

y v_c = -2.0 – 3.0×9.8 = -31.4 m/s.

c)En el encuentro van cayendo los dos cuerpos, pues ambas velocidades son negativas.

d)En el encuentro: x_b = 8.0×3.0 – 4.9×3.0^2 = -20 m. O sea, el cuerpo que se lanza hacia abajo desde el balcón superior alcanza al bloque 20 m por debajo del balcón inferior. (El bloque subió y bajó, y el cuerpo lanzado desde arriba lo alcanza por debajo del balcón inferior). También se puede calcular con x_c = 30 – 2.0×3.0 – 4.9×3.0^2 = -20 m.

4.3-Se lanza hacia arriba un bloque con una velocidad inicial de 30 m/s, desde un balcón. A la vez se lanza hacia arriba otro cuerpo, a 8.0 m/s, desde otro balcón que está a 20 m por arriba del primero. (*Como el problema anterior, pero con cambio de las condiciones iniciales*)

a)¿Al cabo de qué tiempo están los bloques a la misma altura?

b)¿Qué velocidad lleva cada uno en el instante del encuentro?

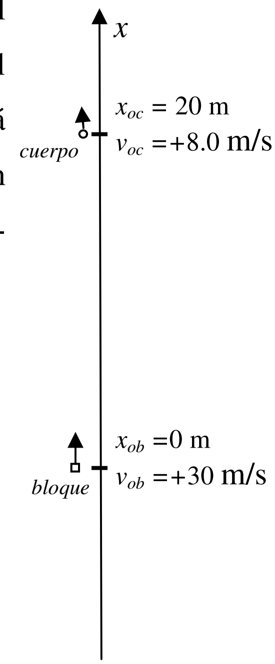
c)En el encuentro: ¿van en direcciones opuestas o en la misma dirección?

d)¿A qué distancia del balcón inferior se encuentran?

Solución:

Haremos uso de las ecuaciones del movimiento con aceleración constante: $x = x_o + v_o t + ½\, at^2$ y $v = v_o + at,$ con la aceleración de caída libre g =9.80 m/s^2.

La figura muestra los dos balcones, en un eje x positivo hacia arriba. El balcón inferior está en x_{ob} = 0, que representa la coordenada inicial del bloque, con velocidad inicial positiva v_{ob} = 30 m/s. El balcón superior está en x_{oc}= 20 m, que es la coordenada inicial del cuerpo que se lanza también hacia arriba, con velocidad 8.0 m/s. La aceleración para ambos es negativa: $a_b=a_c$ = - 9.8m/s^2.



La ley de movimiento para cada cuerpo es:

$x_b = 30t - ½{\times}9.8t^2 = 30t - 4.9t^2$ y

$x_c = 20 + 8.0t - 4.9t^2$

a)Cuando estén a la misma altura: $x_b = x_c$, o sea:

$30t - 4.9t^2 = 20 + 8.0t - 4.9t^2$. Se despeja t: t = 0.91 s.

b)Tendremos:

$v_b = 30 - 0.91{\times}9.8$ = 29 m/s y $v_c = 8.0 - 0.91{\times}9.8$ = -0.9 m/s.

c)En el encuentro ya va cayendo el cuerpo, pero el bloque sigue en ascenso, de acuerdo con los signos de las velocidades.

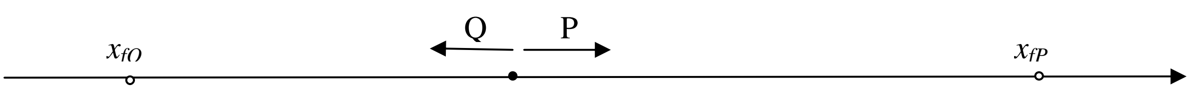
d)En el encuentro: $x_b = 30{\times}0.91 - 4.9{\times}0.91^2$ = 23 m. O sea, los cuerpos se encuentran a 23 m sobre el balcón inferior. También se puede calcular con $x_c = 20 + 8.0{\times}0.91 - 4.9{\times}0.91^2$ = 23 m.

4.4-Dos carros, P y Q, van al encuentro por una misma calle, en direcciones opuestas, ambos a 15 m/s. Al cruzarse ambos aceleran (se impulsan): P lo hace a 2.5 m/s^2 y Q, a 2.0 m/s^2.

a)¿A qué distancia están P y Q al cabo de 10 s de comenzar a acelerar ambos?

b)¿Qué velocidad tiene Q en ese instante *relativa* al carro P?

Solución:



Cruce en t = 0

Datos: x_{Po}= 0, v_{Po}= 15 m/s, a_P = 2.5 m/s^2, x_{Qo}= 0, v_{Qo}= −15 m/s, a_Q =− 2.0 m/s^2 (pueden intercambiarse los datos de P y Q y no altera el resultado de la distancia que los separa al cabo de 6.0 s).

A ambos aplica la ley: $x = x_o + v_o t + ½\, at^2$. Así: $x_P = 15t + 1.25\, t^2$ y $x_Q = -15t - 1.0t^2$.

La distancia pedida es: $d = x_{fP} - x_{fQ}$ (ver figura más atrás). O sea:

$d = 15t + 1.25\, t^2 - (-15t - 1.0t^2) = 30t + 2.25t^2$, cuando t=6.0 s.

Evaluando: d = 261 m ≈ 2.6×10^2 m.

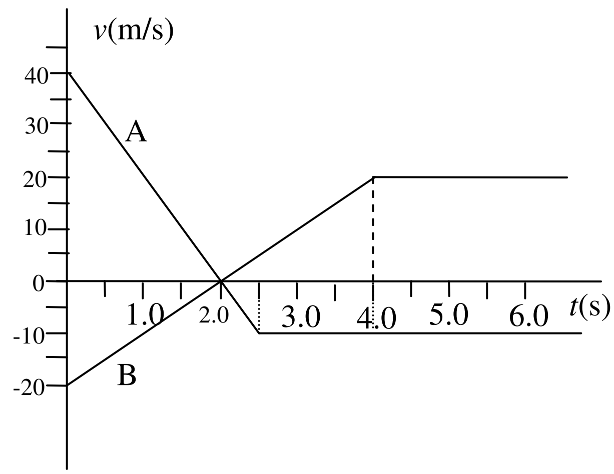
4.5-En los gráficos de la figura:

a)¿Cuál es la aceleración de cada móvil entre t = 0 y t = 2.0 s?

b)¿Qué desplazamiento realiza cada móvil entre 0 y 4.0 s?

c)¿Qué ocurre al movimiento de B en t = 4.0 s? (¿Se detiene? ¿Frena? ¿Invierte dirección de movimiento? ¿Se acelera?)

d)¿Los móviles A y B viajan siempre en direcciones opuestas, o en algún intervalo van en la misma dirección? Explique.



Solución:

a)a_A=(0 – 40)/(2.0 – 0) = -20 m/s^2 ; a_B= [0 – (-20)] / (2.0 – 0) = 10 m/s^2

b)Δx_A = (área del triángulo superior entre 0 y 2.0 s) – (triangulo inferior entre 2.0 y 2.5 s) – (rectángulo inferior entre 2.5 y 4.0 s) = ½ (2.0)(40) – ½ (0.5)(10) – (1.5)(10) = 22.5 ≈ 22 m.

Δx_B = – (área del triángulo inferior entre 0 y 2.0 s) + (triángulo superior entre 2.0 y 4.0 s) = 0 (son triángulos de áreas iguales y signos opuestos).

c)El móvil B deja de acelerar y a partir de ahí continúa en la misma dirección con velocidad constante de 20 m/s. (En ese instante está justamente en la posición inicial).

d)Nunca van en la misma dirección, pues sus velocidades tienen siempre signos opuestos. En t = 2.0 s ambos móviles se detienen un instante, pero sus velocidades cambian las dos de signos y siguen opuestas.

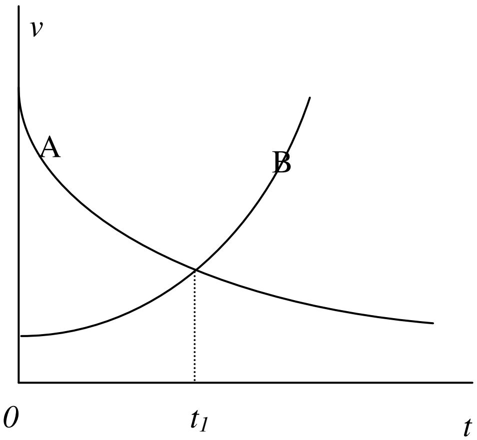
4.6-El gráfico muestra cómo cambian con el tiempo las velocidades de dos partículas, A y B.

a) ¿Cuál realizó mayor desplazamiento desde $t=0$ hasta t_1? Explique.

b) ¿Van en direcciones opuestas o en la misma dirección en t_1? Explique.

c) ¿Puede concluirse de la gráfica que se encuentren en algún instante? Explique.

d) ¿Qué signo tiene la aceleración de cada uno en t_1? Explique.



Solución:

a) $\Delta x_A > \Delta x_B$: porque es mayor el área bajo la curva de A entre 0 y t_1.

b) Van en la misma dirección: $v_A=v_B$ (mismo signo las dos velocidades)

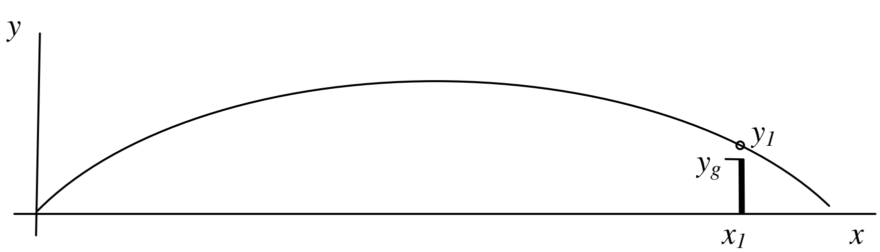
c) No se sabe de encuentros (no es gráfica de posición vs tiempo)

d) $a_A<0$ (−) y $a_B>0$ (+): el signo de la aceleración lo da la pendiente de cada curva en t_1 en esta gráfica v vs t.

4.7-En un entrenamiento, un jugador de balompié de frente a la portería patea la pelota desde un punto a 30.0 m por delante de dicha portería, y para lograr el gol la pelota debe pasar por debajo de la barra horizontal que está a 2.40 m sobre el suelo. La pelota pateada abandona el suelo con una rapidez de 28.0 m/s y con un ángulo de 18.0° sobre la horizontal. (a) ¿Qué tiempo demora la pelota en llegar a la portería? (b) ¿A qué distancia de la barra horizontal pasa la pelota? ¿Por arriba o por abajo? (g = 9.80 m/s^2)

Solución:

Datos: x_1 = 30 m, y_g= 2.40 m, v_o= 28.0 m/s, θ_o=18.0°

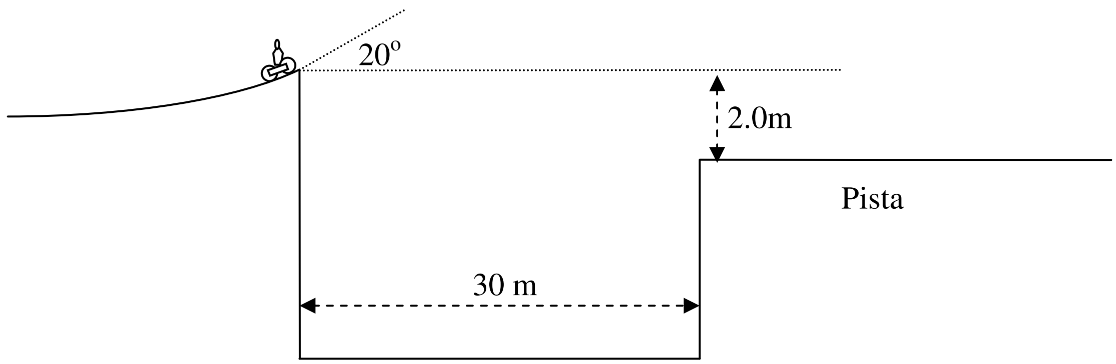


Cuando la pelota está en x_1 hay que averiguar en qué valor y_1 se encuentra para saber si pasa por arriba o por debajo de la altura del gol, y_g.

a)El tiempo en llegar a x_1 se obtiene de: $x_1 = v_o t \cos\theta_o$, por lo que $t = x_1 / (v_o \cos\theta_o) = 1.13$ s.

b)En ese instante está en: $y_1 = v_o\, t$ sen θ_o - $gt^2/2 = 3.53$ m. Pasa por arriba de la barra horizontal, a una distancia de: 3.53 – 2.40 = 1.13 m

4.8-Un motociclista va a 72 km/h cuando salta por una rampa con 20° de inclinación hacia arriba. El motociclista debe salvar la zanja que se muestra y llegar a la pista del otro lado.



a)¿Qué tiempo demora en sobrevolar los 30 m de la zanja?

b)¿A qué altura sobre la pista "de aterrizaje" está en ese instante?

Solución:

Colocamos el origen donde el motorista salta al aire. Los datos son entonces:

v_o= 72 km/h = 20 m/s, $\theta_o = 20^o$, $y_{pista} = -2.0$ m, $x_{borde\ zanja} = 30$ m

a)El tiempo en cruzar la zanja es el necesario para llegar a $x = x_{borde\ zanja} = 30$ m. De la ecuación: $x = v_o\, t \cos\theta_o$ se despeja t y se obtiene: $t = 1.6$ s.

b)Sustituyendo t en la ecuación $y = v_o\, t$ sen $\theta_o – ½\, gt^2$ se obtiene que en ese instante el motorista está en $y = -1.6$ m. Si está a esta distancia bajo el origen, aún está a 0.4 m sobre la pista, que es la diferencia entre -2.0 m y -1.6 m.

4.9-El vector de posición de una partícula está dado por $\mathbf{r} = 4t\,\mathbf{i} - 2t^3\mathbf{j}$ donde $|\mathbf{r}|$ se da en metros y el tiempo en segundos.

a)Por análisis dimensional determine las unidades de los factores 4 y 2.

c)Determine la velocidad y la rapidez instantáneas en $t = 5.0$ s.

d)Determine las componentes x y y de la aceleración en ese mismo instante.

Solución:

Se da el vector de posición: $\mathbf{r} = 4t\,\mathbf{i} - 2t^3\,\mathbf{j}$ (en metros y segundos).

a)Unidades de 4: m/s. Unidades de 2: m/s^3. (Las necesarias para que $4t$ y $2t^3$ den metros).

b)Velocidad instantánea en 5.0 s: primero encontramos la ley de **v:** $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = 4\,\mathbf{i} - 6t^2\,\mathbf{j}$. Evaluamos en t = 5.0 s: $\mathbf{v} = 4\,\mathbf{i} - 150\,\mathbf{j}$ (m/s).

La rapidez en ese instante es: $c = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4^2 + 150^2} \approx 150$ m/s = 1.5×10^2 m/s

c)La aceleración es: $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = -12t\,\mathbf{j}$ (m/s^2). Entonces $a_x = 0$ y $a_y = -12t$. Evaluando en t = 5.0 s:

$a_x = 0$ y $a_y = -60$ m/s^2.

4.10-Una partícula se mueve con una velocidad dada por $\boldsymbol{v}(t) = 80.0\ \text{sen}(20t)\,\boldsymbol{i} - 60.0\cos(20t)\,\boldsymbol{j}$ **,** donde t se da en segundos y la velocidad se obtienen en unidades m/s. En el instante $t = 0$ la partícula está pasando por el punto $x = -4.0$ m, $y = 0$. Calcule: (a) su vector de posición, $\boldsymbol{r}$, como función del tiempo, (b) su vector aceleración, $\boldsymbol{a}$, como función del tiempo, (c) la magnitud de su velocidad en t = 1.0 s y la dirección en que apunta este vector en ese instante.

Solución:

Datos: $\boldsymbol{v}(t) = 80.0\ \text{sen}(20t)\,\boldsymbol{i} - 60.0\cos(20t)\,\boldsymbol{j}$ y en $t = 0$: $x = -4.0$ m y $y = 0$, o sea: $\boldsymbol{r}(0) = -4.0\boldsymbol{i}$.

a)$\Delta\boldsymbol{r} = \int_0^t \boldsymbol{v}\,dt$. O sea:

$\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(0) = \int_0^t [80.0\ \text{sen}(20t)\,\boldsymbol{i} - 60.0\cos(20t)\,\boldsymbol{j}]\,dt$

$\boldsymbol{r}(t) - (-4.0\boldsymbol{i}) = [-4.0\cos(20t)\,\boldsymbol{i} - 3.0\ \text{sen}(20t)\,\boldsymbol{j}\ ]\big|_0^t$ (evaluado entre 0 y t)

$\boldsymbol{r}(t) - (-4.0\boldsymbol{i}) = [-4.0\cos(20t)\,\boldsymbol{i} - 3.0\ \text{sen}(20t)\,\boldsymbol{j}] - [-4.0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j}]$

Por tanto: $\boldsymbol{r}(t) = -4.0\cos(20t)\,\boldsymbol{i} - 3.0\ \text{sen}(20t)\,\boldsymbol{j}$

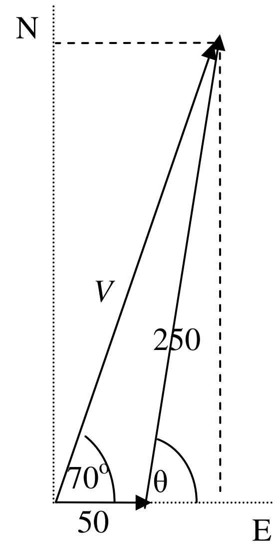
b)$\boldsymbol{a}(t) = d\boldsymbol{v}/dt = 1600\ \text{sen}(20t)\,\boldsymbol{i} + 1200\cos(20t)\,\boldsymbol{j}$

c)$\boldsymbol{v}(1) = 80.0\ \text{sen}(20\text{rad})\,\boldsymbol{i} - 60.0\cos(20\text{rad})\,\boldsymbol{j} = 73.0\,\boldsymbol{i} - 24.5\,\boldsymbol{j}$

Por tanto: $v(1) = [73^2 + 24.5^2]^{1/2} = 77$ m/s. Y: $\tan\theta = v_y/v_x = 73/(-24.5) = -2.98$, por lo que $\theta = -71^{\circ}$

4.11-Un avión vuela de manera que sus motores le imprimen una velocidad de 250 km/h respecto al aire. A la altura de vuelo, el aire se mueve hacia el Este con una velocidad de 50 km/h respecto a Tierra. El avión debe moverse en una dirección de 70° al Norte del Este para dirigirse a la ciudad de su destino. ¿En qué dirección respecto al Este debe el avión enfocar su proa para viajar en la dirección deseada?

Solución:



La dirección resultante debe ser de 70° al Norte del Este para dirigirse a la ciudad de su destino. El diagrama de vectores muestra la situación (*V* sería la rapidez resultante del avión, desconocida). Lo que debemos averiguar es la dirección θ en que debe orientarse el avión para que combinando su velocidad con la del viento pueda llegar a su lugar de destino, 70° al N del E. Del diagrama puede verse que:

$V \text{ sen}70 = 250 \text{ sen } \theta$

$V \cos 70 = 50 + 250 \cos \theta$

Dividiendo miembro a miembro la primera ecuación por la segunda:

$\tan 70 = 250 \text{ sen } \theta / (50 + 250 \cos \theta) = \text{sen } \theta / (0.20 + \cos \theta)$

$(\tan 70) (0.20 + \cos \theta) = \text{sen } \theta$

Sustituyendo: $\tan 70 = 2.747$ y $\text{sen } \theta = [1 - \cos \theta]^{1/2}$ se obtiene:

$2.747(0.20 + \cos \theta) = [1 - \cos^2 \theta]^{1/2}$.

Elevando al cuadrado ambos miembros obtenemos una ecuación cuadrática en cos θ de la cual se puede calcular θ:

$(0.5494 + 2.747 \cos \theta)^2 = 1 - \cos^2\theta$.

$8.546 \cos^2\theta + 3.018 \cos \theta - 0.6981 = 0$

Entonces: $\cos \theta = [-3.018 \pm (9.108 + 23.86)^{1/2}] / (17.10)$

Con dos soluciones: +0.159 y -0.512. La negativa es una solución extraña sin significado físico. La otra da un valor: $\theta \approx 81°$ (Nótese que en cálculos intermedios arrastramos más cifras de las permitidas y solamente al final redondeamos a las permitidas).