Cinemática de la partícula

Física I

Grado en Ingeniería de Organización Industrial

Primer Curso

Ana Mª Marco Ramírez
Curso 2013/2014

Dpto.Física Aplicada III
Universidad de Sevilla

Índice

- Introducción
- Cinemática del movimiento en una dimensión (movimiento rectilíneo)
- Cinemática del movimiento en dos y tres dimensiones.

Introducción (I)

- La **Mecánica** es la parte de la Física que estudia el movimiento de los cuerpos, así como los conceptos relacionados de fuerza y energía.
- Clasificación:
  - **Cinemática**: descripción únicamente geométrica del movimiento, sin atender a las causas.
  - **Dinámica**: principios y leyes físicas. Fuerza, energía.
  - **Estática**: cuerpos en reposo permanente o equilibrio. Caso particular de la dinámica.

Introducción (I)

- Modelo de **partícula o punto material.**
- **Definición**: cuerpo de dimensiones tan pequeñas comparadas con las distancias que recorre que podemos representarlo como un punto geométrico.

  Ej: La Tierra, en su movimiento en torno al Sol, puede ser tratada como una partícula:

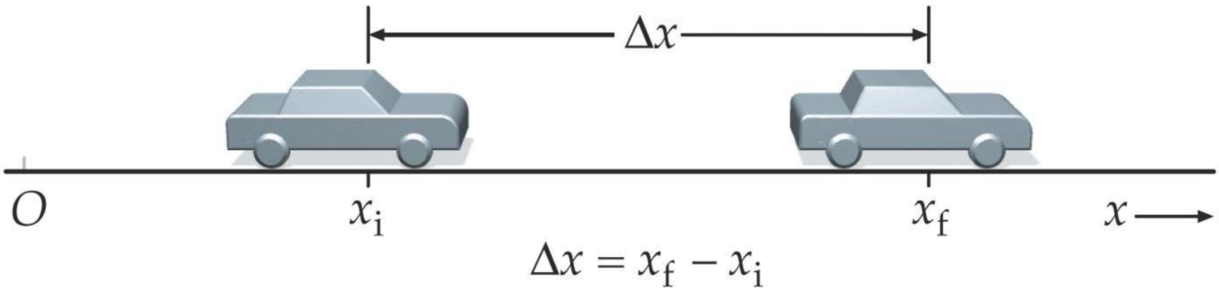
  Diámetro Tierra $\sim 13 \times 10^{6}$m

  Distancia Tierra-Sol $\sim 15 \times 10^{10}$m

Índice

- Introducción
- Cinemática del movimiento en una dimensión (movimiento rectilíneo)
  - Posición y desplazamiento
  - Velocidad: media e instantánea
  - Aceleración
  - Ejemplos de movimiento rectilíneo
- Cinemática del movimiento en dos y tres dimensiones.

Cinemática del movimiento en una dimensión: Posición y desplazamiento



En la figura, x_i es la posición inicial; x_f, la posición final, y Δx, el desplazamiento.

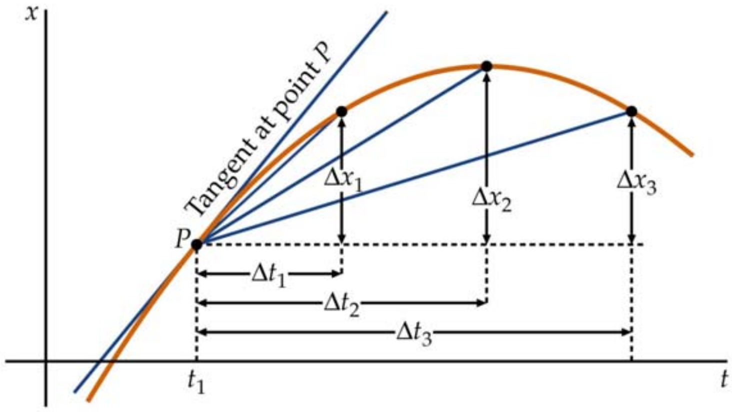
Dimensiones: $[\Delta x] = L$ (longitud)   Unidad SI: metro (m)

Ojo: No confundir desplazamiento con distancia recorrida. Si volvemos al punto de partida, el desplazamiento es nulo aunque la distancia recorrida no lo sea.

Cinemática del movimiento en una dimensión: velocidad

- Velocidad media: $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$
- Velocidad instantánea: $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$

Dimensiones: $[v] = L \cdot T^{-1}$ Unidades SI: m/s



Cinemática del movimiento en una dimensión: aceleración

- Aceleración: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

Puede escribirse también: $a = \dot{v} = \ddot{x}$

Dimensiones: $[a] = L \cdot T^{-2}$ Unidades SI: m/s^2

Conocida $a(t)$, pueden obtenerse v y x:

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t)dt$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t)dt = x_0 + v_0 t + \int_0^t \left(\int_0^t a(t)\, dt \right) dt$$

Cinemática del movimiento en una dimensión: ejemplos

- Movimiento rectilíneo uniforme:

$$a = 0$$
$$v = v_0$$
$$x = x_0 + v_0 t$$

- Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado:

$$a = cte$$
$$v = v_0 + at$$
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Índice

- Introducción
- Cinemática del movimiento en una dimensión (movimiento rectilíneo)
- Cinemática del movimiento en dos y tres dimensiones
  - Desplazamiento, velocidad y aceleración
  - Movimiento de proyectiles (tiro parabólico)
  - Movimiento circular

Cinemática del movimiento en dos y tres dimensiones: $\vec{r}$ y $\Delta\vec{r}$

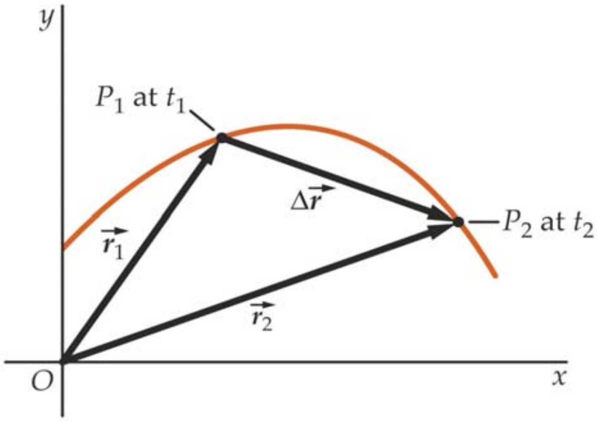
- Vector posición $\vec{r}$:

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \qquad |\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- Vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1} = (x_2 - x_1)\vec{\imath} + (y_2 - y_1)\vec{\jmath} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



Cinemática del movimiento en dos y tres dimensiones: $\vec{v}_m$ y $\vec{v}$

- Vector velocidad media:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{\imath} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{\jmath} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}$$

- Vector velocidad instantánea:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}$$

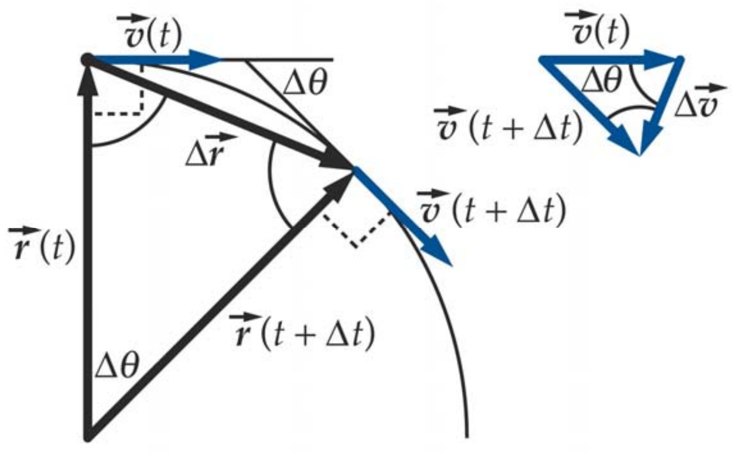
$$\vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k}$$

Celeridad:

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

Cinemática del movimiento en dos y tres dimensiones: $\vec{a}$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$



$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k} \qquad |\vec{a}| = a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

Cinemática del movimiento en dos y tres dimensiones: $\vec{a}$, $\vec{a}_t$ y $\vec{a}_n$ (I)

- Usamos el doble producto vectorial para descomponer el vector $\vec{a}$, aceleración, en una componente tangencial y otra ortogonal respecto del vector $\vec{v}$, velocidad:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \quad ; \quad \vec{a}_t \parallel \vec{v} \ ; \ \vec{a}_n \perp \vec{v} \quad ; \quad |\vec{a}| = a = \sqrt{{a_t}^2 + {a_n}^2}$$

$$\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{a}) = (\vec{v} \cdot \vec{a})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{v})\vec{a} = (\vec{v} \cdot \vec{a})\vec{v} - v^2\vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{(\vec{v} \cdot \vec{a})\vec{v}}{v^2} - \frac{\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{a})}{v^2} = \frac{(\vec{v} \cdot \vec{a})\vec{v}}{v^2} + \frac{(\vec{v} \times \vec{a}) \times \vec{v}}{v^2}$$

$$\vec{a}_t = \frac{(\vec{v} \cdot \vec{a})\vec{v}}{v^2} \qquad ; \qquad \vec{a}_n = \frac{(\vec{v} \times \vec{a}) \times \vec{v}}{v^2}$$

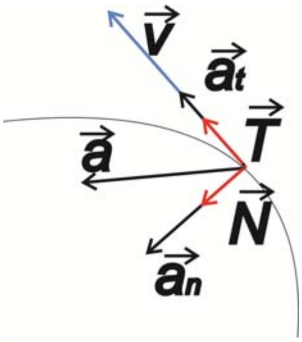
Cinemática del movimiento en dos y tres dimensiones: $\vec{a}$, $\vec{a}_t$ y $\vec{a}_n$ (II)

Introduciendo el vector unitario tangente, $\vec{T} = \frac{\vec{v}}{v}$:

$$\vec{a}_t = \frac{(\vec{v}\cdot\vec{a})\vec{v}}{v^2} = (\vec{T}\cdot\vec{a})\vec{T} = a_t\vec{T} \quad ; \quad a_t = a_{\parallel\vec{v}} = (\vec{T}\cdot\vec{a})$$

$$\vec{a}_n = \frac{(\vec{v}\times\vec{a})\times\vec{v}}{v^2} = (\vec{T}\times\vec{a})\times\vec{T} \quad ; \quad a_n = a_{\perp\vec{v}} = |\vec{T}\times\vec{a}|$$

Definiendo el vector unitario normal, $\vec{N} = \frac{\vec{a}_n}{a_n} = \frac{(\vec{T}\times\vec{a})\times\vec{T}}{|\vec{T}\times\vec{a}|}$:



$$\vec{a}_n = a_n\vec{N}$$

$$\vec{a} = a_t\vec{T} + a_n\vec{N}$$

Cinemática del movimiento en dos y tres dimensiones: $\vec{a}$, $\vec{a}_t$ y $\vec{a}_n$ (III)

A partir de $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ y de $\vec{v} = v\vec{T}$, obtenemos:

$$\vec{a} = \frac{d(v\vec{T})}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + v\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + v\left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right|\frac{d\vec{T}/dt}{|d\vec{T}/dt|}$$

Identificamos el vector unitario normal $\vec{N} = \frac{d\vec{T}/dt}{|d\vec{T}/dt|}$, y vamos a probar que $\vec{N} \perp \vec{T}$. Para ello, basta probar que $\vec{T}\cdot\frac{d\vec{T}}{dt} = 0$:

$$\vec{T}\cdot\frac{d\vec{T}}{dt} = \left(\frac{1}{2}\right)2\vec{T}\cdot\frac{d\vec{T}}{dt} = \left(\frac{1}{2}\right)\left[\vec{T}\cdot\frac{d\vec{T}}{dt} + \frac{d\vec{T}}{dt}\cdot\vec{T}\right] = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{d(\vec{T}\cdot\vec{T})}{dt} = 0$$

c.q.d.

Cinemática del movimiento en dos y tres dimensiones: $\vec{a}$, $\vec{a}_t$ y $\vec{a}_n$ (IV)

$a_t = \dfrac{dv}{dt}$ (cambio en la celeridad)

$a_t = 0 \quad \Leftrightarrow$ Movimiento uniforme

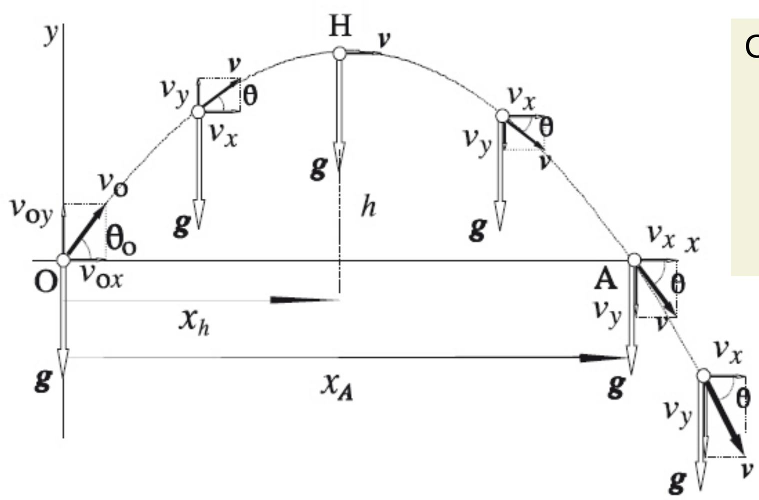
$a_t = cte \Leftrightarrow$ Mov. uniformemente acelerado

$a_n = \dfrac{v^2}{R}$ (cambio dirección trayectoria)

R, radio de curvatura $\quad R = \dfrac{v^2}{a_n}$

$a_n = 0 \quad \Leftrightarrow$ Movimiento rectilíneo ($R = \infty$)

Cinemática del movimiento en dos y tres dimensiones: tiro parabólico



Condiciones iniciales:

$$x_0 = 0 \qquad y_0 = 0$$
$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 \qquad v_{0y} = v_0 \sin\theta_0$$

Aceleración: $\vec{a} = -g\vec{j}$

Velocidad:

$$v_x = v_{0x} \qquad v_y = v_{0y} - gt$$

Posición:

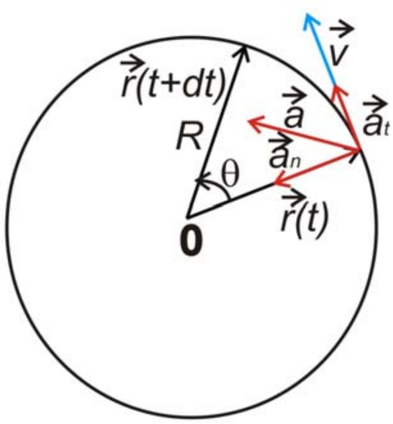
$$x = v_{0x}t \qquad y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Eliminando el tiempo en las ecuaciones de x e y:

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2 = (\tan\theta_0)\,x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}x^2$$

Ecuación de una parábola

Cinemática del movimiento en dos y tres dimensiones: movimiento circular (I)



La trayectoria es una circunferencia: radio de curvatura constante

$$|\vec{r}(t)| = |\vec{r}(t+\Delta t)| = R = cte$$

Se trata de un movimiento plano.

Se introduce $\vec{\omega}$, velocidad angular, vector de dirección perpendicular al plano de la trayectoria y módulo $\omega = \dot{\theta}$

Además, $\vec{v} \perp \vec{r}$. Vamos a probarlo:

$$\frac{d(R^2)}{dt} = 0 \quad (R^2 = cte)\ ; \quad \frac{d(R^2)}{dt} = 2R\frac{dR}{dt} = 2Rv = 2\vec{r}\cdot\vec{v} = 0$$

Así, escribimos $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ (en módulo, $v = \omega R = \dot{\theta} R$)

Cinemática del movimiento en dos y tres dimensiones: movimiento circular (II)

Derivamos para obtener la aceleración:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

con $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$, aceleración angular ($\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$ en módulo)

Tanto $\vec{\omega}$ como $\vec{\alpha}$ son vectores perpendiculares al plano de la trayectoria, y su sentido viene dado por la regla de la mano derecha.

Identificamos:

$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}$, $\vec{a}_t \parallel \vec{v}$, $a_t = \alpha R = \dot{\omega} R = \ddot{\theta} R$

$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$, $\vec{a}_n \perp \vec{v}$, $a_n = \omega^2 R = \dot{\theta}^2 R = \frac{v^2}{R}$

Cinemática del movimiento en dos y tres dimensiones: movimiento circular (III)

Ahora, desarrollamos para poner $\vec{a}_n = a_n\vec{N}$:

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \cancel{(\vec{\omega} \cdot \vec{r})}\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})\vec{r} = -\omega^2\vec{r} = -\left(\frac{v}{R}\right)^2 \vec{r}$$

Podemos escribir $\quad \vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{N}$, $\quad$ siendo $\vec{N} = -\frac{\vec{r}}{R}$

Y para $\vec{a}_t = a_t\vec{T}$:

Como ya sabemos que $\vec{T} = \frac{\vec{v}}{v}$, podemos escribir

$$\vec{a}_t = a_t\vec{T} = |\vec{\alpha} \times \vec{r}|\vec{T} = \alpha R\vec{T} = \dot{\omega}R\vec{T} = \ddot{\theta}R\vec{T} = \dot{v}\vec{T}$$

Cinemática del movimiento en dos y tres dimensiones: movimiento circular (IV)

Caso particular:

Movimiento circular uniforme $\left(v = v_0 = cte \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_t = \vec{0}\right)$

Vemos que se cumple con las dos expresiones de $\vec{a}_t$:

- $v = v_0 = cte \Rightarrow a_t = \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{a}_t = \vec{0}$
- $\omega = \frac{v_0}{R} = cte \Rightarrow \alpha = \frac{d\omega}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r} = \vec{0}$

Entonces, $\vec{a} = \cancel{\vec{a}_t} + \vec{a}_n = \vec{a}_n = \frac{{v_0}^2}{R}\vec{N}$, con $\vec{N} = -\frac{\vec{r}}{R}$

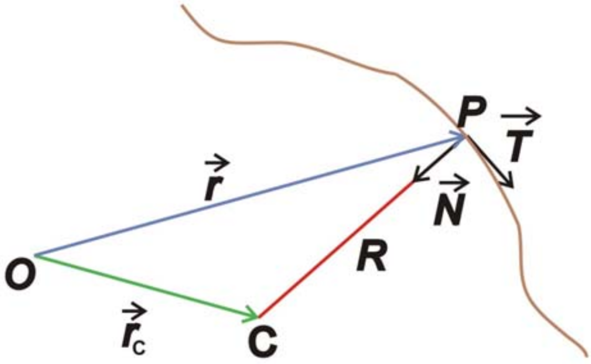
Expresiones Movimiento Circular Uniforme:

$$v = v_0 = \omega_0 R$$

$$a_t = 0 \quad ; \quad a_n = \frac{{v_0}^2}{R}$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t \quad ; \quad \omega = \dot{\theta} = \omega_0 \quad ; \quad \alpha = \dot{\omega} = 0$$

Cinemática del movimiento en dos y tres dimensiones: $\boldsymbol{R}$ y $\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{C}}$



Antes definimos R, radio de curvatura, como $R = \frac{v^2}{a_n}$

En toda trayectoria, si tomamos un segmento lo bastante pequeño, podemos considerarlo un arco de circunferencia, cuyo radio sería el radio de curvatura, *R*, y cuyo centro, *C*, tendría, como vector posición, el $\vec{r}_C$.

Es fácil ver que $\boldsymbol{\vec{r} = \vec{r}_C + \overrightarrow{CP} = \vec{r}_C + (-\vec{N})R}$, siendo $\vec{N} = -\frac{\overrightarrow{CP}}{R}$ y $\vec{r}$ el vector posición del punto *P*, perteneciente a la trayectoria, tomado, como $\vec{r}_C$, respecto al origen *O*.