4.- Cinemática de la partícula.

En las lecciones anteriores hemos pasado revista a un conjunto de conceptos matemáticos que nos resultarán sumamente útiles conforme vayamos desarrollando este curso. Nótese que hasta ahora no hemos considerado ningún fenómeno físico y que sólo hemos preparado las herramientas necesarias para trabajar en la Física.

El fenómeno físico más obvio y fundamental es el movimiento. La Mecánica es la ciencia del movimiento. En un principio, la Física pretendía dar imágenes mecánicas de todos los fenómenos físicos y en tiempos de GALILEO (1564-1642) ya se reconocía el papel hegemónico de la Mecánica, estando condensada esta idea en la proposición *ignorato motu, ignoratur natura*. Hoy en día se ha renunciado a ese propósito pero, no obstante, los principios de la Mecánica encuentran aplicación en todos los campos de la Física y por ello deberemos comprenderlos bien antes de pasar al estudio de la Termodinámica, del Electromagnetismo y de la Física Atómica y Nuclear.

La Mecánica es la rama de la Física que estudia los movimientos y las fuerzas que los producen. Atendiendo a la naturaleza de su contenido, la Mecánica puede dividirse en dos partes: *Cinemática* o teoría geométrica del movimiento y *Dinámica* o estudio de las relaciones existentes entre las fuerzas y los movimientos que éstas producen; esta última abarca a la *Estática* o teoría de las fuerzas y del equilibrio.

Comenzaremos el estudio de la Mecánica preocupándonos por describir adecuadamente el movimiento de los cuerpos (la Cinemática) y dejaremos para más adelante el porqué de esos movimientos (la Dinámica). En la antigüedad se cometió el error de invertir el orden de esos dos problemas. ARISTÓTELES (384-322 AC) se preguntó sobre las causas del movimiento antes de dar una descripción científica del movimiento. Este error impidió el avance en el conocimiento del fenómeno del movimiento durante muchos siglos, hasta que llegó el Renacimiento.

§4.1. Cinemática.- La Cinemática estudia en forma abstracta el movimiento, sin preocuparse de las causas del mismo. Los orígenes de la Cinemática hay que buscarlos en el estudio de la cicloide realizado por TORRICELLI (1608-47), continuando con el enunciado de la ley fundamental del centro instantáneo de rotación en el movimiento plano de BERNOULLI (1700-1782). D'ALEMBERT, EULER, KANT y CARNOT, entre otros, estudiaron el movimiento prescindiendo de sus causas y fundaron la *Geometría del Movimiento*. El vocablo *Cinemática* fue creado por AMPÈRE (1775-1836), quién delimitó el contenido de la Cinemática y aclaró su posición dentro del campo de la Mecánica. Desde entonces y hasta nuestros días la Cinemática ha continuado su desarrollo hasta adquirir una estructura propia.

Los elementos básicos de la Cinemática son: *espacio*, *tiempo* y *móvil*.

En la Mecánica Clásica[1] se admite la existencia de un *espacio absoluto*; es decir, un espacio anterior a todos los objetos materiales e independiente de la existencia de estos. Este espacio es el escenario donde ocurren todos los fenómenos físicos, y se supone que todas las leyes de la física se cumplen rigurosamente en todas las regiones de ese espacio. El *espacio físico* se representa en la Mecánica Clásica mediante un *espacio puntual euclídeo*.

Análogamente, la Mecánica Clásica admite la existencia de un *tiempo absoluto* que transcurre del mismo modo en todas las regiones del Universo y que es independiente de la existencia de los objetos materiales y de la ocurrencia de los fenómenos físicos.

El móvil más simple que podemos considerar es el *punto material* o *partícula*. La partícula es una idealización de los cuerpos que existen en la Naturaleza, en el mismo sentido en que lo es el concepto de punto geométrico. Entendemos por punto material o partícula un cuerpo de dimensiones tan pequeñas que pueda considerarse como puntiforme; de ese modo su posición en el espacio quedará determinada al fijar las coordenadas de un punto geométrico. Naturalmente la posibilidad de despreciar las dimensiones de un cuerpo estará en relación con las condiciones específicas del problema considerado. Así, por ejemplo, podemos considerar la Tierra como un punto material si sólo estamos interesados en su movimiento alrededor del Sol, pero no cuando estemos interesados en el movimiento de la Tierra en torno a su propio eje.

Es importante que no confundamos el concepto de punto material con el de punto geométrico, pues aquél posee un tributo que éste no tiene; la *masa inercial*, que está íntimamente ligada al movimiento de los cuerpos, como veremos al estudiar la Dinámica. Dado un punto material, con una cierta masa inercial, se precisará un cierto esfuerzo para modificar su estado de movimiento; llamaremos *fuerza* a cualquier agente capaz de modificar el estado de movimiento de los cuerpos.

[1] La existencia de un espacio y de un tiempo absoluto son dos hipótesis de partida que están, en el ámbito de la Mecánica Clásica, fuera de toda posibilidad de experimentación, de modo que la verdad o falsedad de esas ideas salen del campo de la Mecánica Clásica para entrar en el de la Metafísica.

§4.2. Relatividad del movimiento. Referenciales.- Estudiar el movimiento de un cuerpo quiere decir determinar su posición en el espacio en función del tiempo, pero para ello necesitaremos un *sistema de referencia*.

En el espacio puntual euclídeo de la Mecánica Clásica un *sistema de referencia* (o, simplemente, *referencial*) queda definido por los elementos siguientes (Figura 4.1):

♦ un *origen* O, que es un punto del espacio físico.

♦ una *base vectorial* del espacio vectorial asociado a dicho espacio físico.

de esta forma queda definido un *triedro* con vértice en el *origen* O y cuyos *ejes* tienen las direcciones definidas por la base vectorial asociada.

Debemos destacar el hecho de que, en tanto que un *referencial* queda definido por un *origen* y la *orientación de un triedro*, una *base vectorial* queda definida exclusivamente mediante la orientación de un triedro, por lo que resulta irrelevante la posición del "origen" de ésta en las representaciones gráficas.

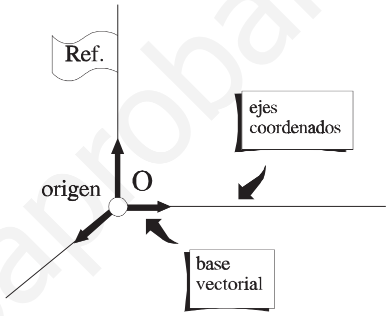


Figura 4.1

Así, por ejemplo, tiene sentido hablar de la *traslación* de un referencial respecto a otro; pero carece de sentido hablar de la traslación entre bases vectoriales, ya que entre éstas sólo tiene sentido la *rotación* o cambio de orientación. Esto equivale a decir que las bases vectoriales asociadas a dos referenciales en movimiento de traslación relativo son las mismas.

Decimos que una partícula o punto material se encuentra en *movimiento con respecto a un referencial* si su posición con respecto a él cambia en el transcurso del tiempo. En caso contrario, si la posición del cuerpo no cambia con respecto al referencial, el cuerpo está en reposo en dicho referencial. De las definiciones que acabamos de dar para el movimiento y el reposo de un cuerpo, vemos que *ambos conceptos son relativos*. En efecto, el pasajero que está sentado en un vagón de ferrocarril se encuentra en reposo con respecto al vagón; pero como el tren se mueve con respecto a la Tierra, el pasajero se encuentra en movimiento con respecto a los árboles que bordean la vía. Estos se encuentran en reposo con respecto a la Tierra, pero están en movimiento con respecto al pasajero del tren.

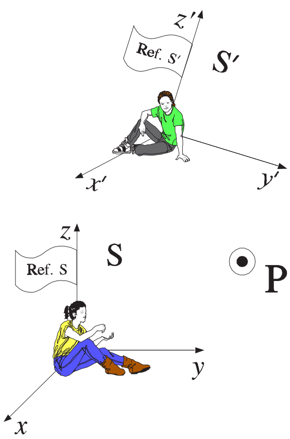


Figura 4.2

En la Figura 4.2 hemos representado dos observadores, S y S′, y una partícula P. Estos observadores utilizan los referenciales *xyz* y *x′y′z′*, respectivamente. Si S y S′ se encuentran en reposo entre sí, describirán del mismo modo el movimiento de la partícula P. Pero si S y S′ se encuentran en movimiento relativo, sus observaciones acerca del movi-

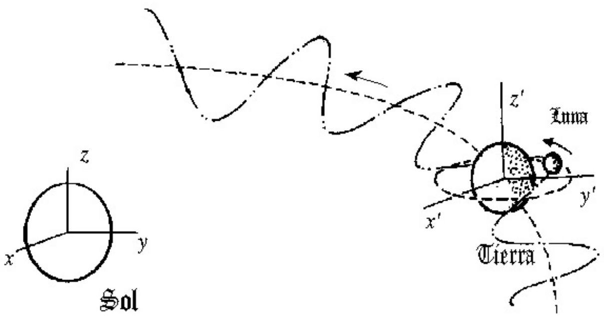


Figura 4.3

miento de la partícula P serán diferentes. Por ejemplo, consideremos dos observadores, uno de ellos colocado en el Sol y el otro en la Tierra, que intentan describir el movimiento de la Luna. Para el observador terrestre la Luna describirá una órbita casi circular en torno a la Tierra. Para el observador solar la trayectoria de la Luna será una línea ondulante, como se muestra en la Figura 4.3. Naturalmente, si los observadores conocen su movimiento relativo, podrán reconciliar fácilmente sus observaciones respectivas.

Dejaremos para más adelante la discusión detallada de como comparar las observaciones realizadas por observadores en movimiento relativo. Por ahora vamos a suponer que disponemos de un cierto referencial bien establecido y a él vamos a referir todas nuestras observaciones.

§4.3. Movimiento de la partícula.- Comenzaremos la Cinemática con el estudio del movimiento del punto material. La posición de una partícula en el espacio queda determinada mediante el vector de posición ***r*** trazado desde el origen O de un referencial *xyz* a la posición de la partícula P (Figura 4.4). Cuando la partícula se mueve, el extremo del vector de posición ***r*** describe una curva C en el espacio, que recibe el nombre de *trayectoria*. La trayectoria es, pues, el lugar geométrico de las sucesivas posiciones que va ocupando la partícula en su movimiento.

(1) En un sistema coordenado de ejes rectangulares *xyz*, de origen O, las componentes del vector ***r*** son las coordenadas (x,y,z) de la partícula en cada instante. Así, el movimiento de la partícula P quedará completamente especificado si se conocen los valores de las tres coordenadas (x,y,z) en función del tiempo. Esto es

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t) \tag{4.1}$$

Estas tres ecuaciones definen una curva en el espacio (la trayectoria) y son llamadas *ecuaciones paramétricas* de la trayectoria. Para cada valor del parámetro t (tiempo) las ecuaciones [4.1] nos determinan las coordenadas de un punto de la trayectoria. Vemos que el movimiento real de la partícula puede reconstruirse a partir de los movimientos (rectilíneos) de sus proyecciones sobre los ejes coordenados.

En el caso de que la trayectoria sea plana, esto es, contenida en un plano, si convenimos en que dicho plano sea el *xy*, será z=0 y podemos eliminar el tiempo t entre las dos primeras ecuaciones de [4.1] para obtener la *ecuación de la trayectoria* plana en forma implícita, $f(x,y)=0$, o en forma explícita, $y=y(x)$.

(2) Las tres ec. [4.1] se pueden compactar en una sola ecuación vectorial

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k} \tag{4.2}$$

que es la *ecuación vectorial del movimiento*.

(3) En ciertos casos puede ser conveniente proceder de un modo distinto, tomando un punto arbitrario O_O sobre la trayectoria y definiendo un cierto sentido positivo sobre ella. La posición de la partícula P, en cualquier instante t, queda determinada por la longitud del arco s = O_OP. Entonces, a cada valor de t le corresponde un valor de s, es decir

$$s = s(t) \qquad [4.3]$$

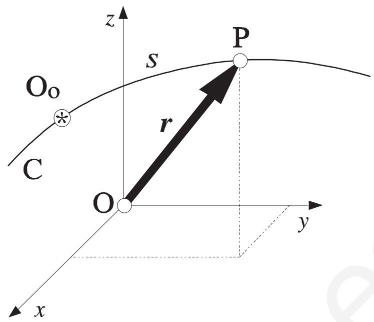


Figura 4.4

Al parámetro s se le llama *intrínseco* y la ecuación [4.3] se denomina *ecuación intrínseca del movimiento*. Evidentemente, dicha ecuación sólo describe el movimiento de la partícula si conocemos de antemano su trayectoria.

§4.4. Velocidad.- Consideremos una partícula que describe una trayectoria curvilínea en el espacio, como la ilustrada en la Figura 4.5, y que durante un cierto intervalo de tiempo Δt pasa de la posición P a la Q. Aunque la partícula se ha desplazado a lo largo del arco PQ=Δs, el *desplazamiento*, que es un vector, lo definimos como PQ=$\Delta\boldsymbol{r}$, de modo que el nuevo vector de posición es OQ=$\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}$. Definimos, entonces, como *velocidad media* de la partícula durante ese desplazamiento el cociente $\Delta\boldsymbol{r}/\Delta t$, esto es

$$\langle\boldsymbol{v}\rangle = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} \qquad [4.4]$$

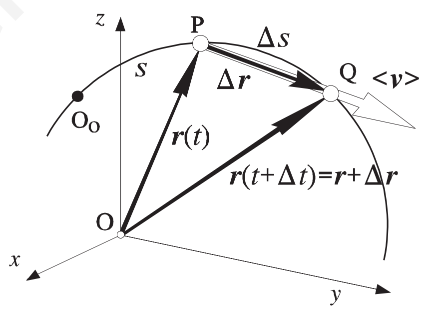


Figura 4.5

Es obvio que $<\boldsymbol{v}>$ es un vector que tiene la misma dirección y sentido que el vector desplazamiento $\Delta\boldsymbol{r}$, o sea, secante a la trayectoria. Además, el valor encontrado para $<\boldsymbol{v}>$ dependerá de la duración del intervalo de tiempo Δt empleado para medirla. Evitaremos este inconveniente considerando un intervalo de tiempo infinitesimal y definiendo la velocidad en un instante dado como el límite a que tiende el cociente incremental $\Delta\boldsymbol{r}/\Delta t$, en el caso de que exista dicho límite, cuando $\Delta t \to 0$; esto es, como la derivada del vector de posición con respecto al tiempo[2]. Por tanto

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}} \qquad [4.5]$$

[2] Utilizaremos la notación $\dot{\boldsymbol{r}}$, $\dot{x}$, ... para indicar derivación con respecto al tiempo.

Cuando $\Delta t \to 0$, el punto Q→P, como lo indican los puntos Q′, Q″, ... en la Figura 4.6. Durante el proceso de paso al límite el vector PQ=$\Delta\boldsymbol{r}$ cambia continuamente en magnitud y en dirección, y de igual modo lo hace la velocidad media $<\boldsymbol{v}>$. En el límite, cuando el punto Q se confunde con el punto P, el vector $\Delta\boldsymbol{r}$ es tangente a la trayectoria y, por consiguiente, la *velocidad instantánea* será un vector tangente a la trayectoria.

Multiplicando y dividiendo la expresión [4.5] por Δs=arc PQ, obtenemos

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}\frac{\Delta s}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta s} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad [4.6]$$

Ahora bien, en la Figura 4.6 podemos ver que la magnitud del desplazamiento $\Delta\boldsymbol{r}$ es casi igual a la longitud del arco PQ y que, a medida que Q se acerca a P, más se aproxima la magnitud $\Delta\boldsymbol{r}$ a la de Δs. Por lo tanto, el primer factor de [4.6] representa un vector unitario tangente a la trayectoria (versor tangente $\boldsymbol{e}_t$). Esto es

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta s} = \boldsymbol{e}_t \qquad [4.7]$$

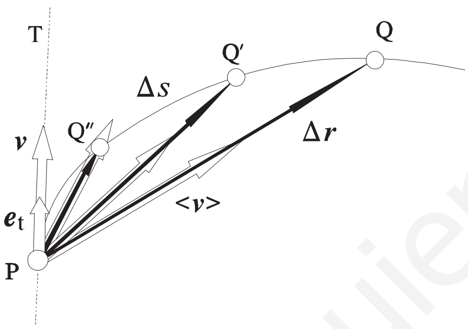


Figura 4.6

El segundo factor de [4.6] es

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v \qquad [4.8]$$

de modo que

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_t \frac{ds}{dt} = v\,\boldsymbol{e}_t \qquad [4.9]$$

donde $ds/dt=v$ representa el módulo de la velocidad (*celeridad*) de la partícula.

En coordenadas cartesianas, teniendo en cuenta [4.2] y que los versores cartesianos ($\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{k}$) son constantes, tenemos para la velocidad

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{k} \qquad [4.10]$$

o bien, con notación matricial,

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{pmatrix} \qquad [4.11]$$

de modo que las componentes del vector velocidad en las direcciones de los ejes coordenados son

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt} \qquad [4.12]$$

y el módulo de la velocidad o *celeridad* es

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \qquad [4.13]$$

§4.5. Aceleración.- En cada instante, o sea en cada punto de la trayectoria, queda definido un vector velocidad que, en general, cambia tanto en módulo como en dirección al pasar de un punto a otro de la trayectoria. La dirección de la velocidad cambiará debido a que la velocidad es tangente a la trayectoria y ésta, por lo general, no es rectilínea. La dirección de la velocidad sólo permanece constante, y coincide con la trayectoria, en el movimiento rectilíneo; entonces, para especificarla, será suficiente dar su valor numérico (la celeridad) con el signo adecuado al sentido del movimiento.

En la Figura 4.7 se representan los vectores velocidad correspondientes a los instantes t y $t+\Delta t$, cuando la partícula pasa por los puntos P y Q, respectivamente. El cambio vectorial en la velocidad de la partícula durante ese intervalo de tiempo está indicado por $\Delta\boldsymbol{v}$, en el triángulo vectorial al pie de la Figura 4.7. En estrecho paralelismo con nuestra definición anterior de la velocidad media, definiremos ahora la *aceleración media* de la partícula, en el intervalo Δt, como el cociente

$$\langle \boldsymbol{a} \rangle = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \qquad [4.14]$$

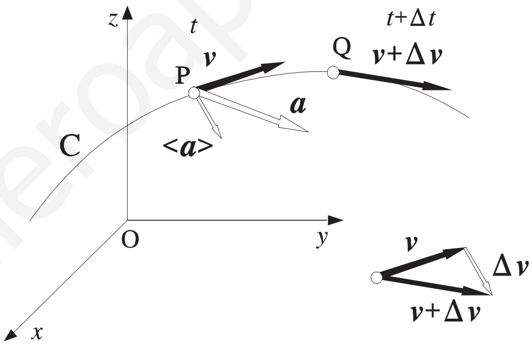


Figura 4.7

que es un vector paralelo a $\Delta\boldsymbol{v}$, y, como aquélla, dependerá de la duración del intervalo de tiempo Δt empleado en medir el cambio en la velocidad.

La *aceleración instantánea* la definiremos, análogamente, como el límite a que tiende el cociente incremental $\Delta\boldsymbol{v}/\Delta t$ cuando $\Delta t \to 0$; esto es, como la derivada del vector velocidad con respecto al tiempo:

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{v}} \qquad [4.15]$$

o bien, en función del vector de posición

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\boldsymbol{r}} \qquad [4.16]$$

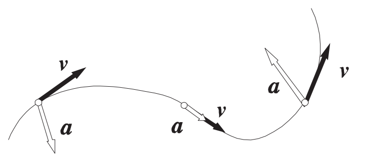


Figura 4.8

La aceleración es un vector que tiene la misma dirección que el *cambio instantáneo* en la velocidad. Como la velocidad cambia en la dirección en que la trayectoria se curva, la aceleración apuntará siempre hacia la concavidad de la curva, como se muestra en la Figura 4.8, y en general no será ni tangente ni normal a la trayectoria.

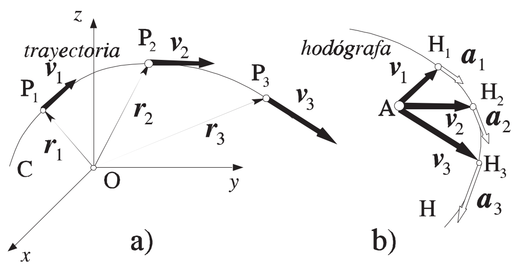


Figura 4.9

Si tomamos un punto arbitrario (A) del espacio y trazamos desde él vectores equipolentes a los vectores velocidad en cada uno de los puntos de la trayectoria, el lugar geométrico de los extremos de dichos vectores define una curva llamada *hodógrafa*[3] del movimiento. Comparando la hodógrafa de la Figura 4.9b con la trayectoria de la Figura 4.9a es fácil comprender que la derivada de la velocidad con respecto al tiempo, esto es, la aceleración, será un vector tangente a la hodógrafa y que la celeridad del *punto figurativo* H sobre la hodógrafa será igual al módulo de la aceleración.

En coordenadas cartesianas, teniendo en cuenta [4.15] y [4.16] y que los versores cartesianos ($\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{k}$) son constantes, podemos escribir

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} \qquad [4.17]$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k} \qquad [4.18]$$

o bien, con notación matricial

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v_y/\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v_z/\mathrm{d}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 \\ \mathrm{d}^2y/\mathrm{d}t^2 \\ \mathrm{d}^2z/\mathrm{d}t^2 \end{pmatrix} \qquad [4.19]$$

Las componentes de la aceleración en las direcciones de los ejes coordenados son

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \qquad a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} \qquad a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} \qquad [4.20]$$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \qquad a_y = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} \qquad a_z = \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} \qquad [4.21]$$

[3] De ὁδός=camino y *grafo* (=γράφος, de la raíz γράφω=escribir, elemento compositivo que significa «que escribe» o «que describe»). El término «hodógrafa» no aparece en el Diccionario de la Academia, en tanto que sí aparece «odómetro» (aparato para medir el camino recorrido, taxímetro), por lo que entendemos que, en contra de la costumbre, debería escribirse sin «h».

y su módulo es
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad [4.22]$$

§4.6. Componentes intrínsecas de la aceleración.- Consideremos una partícula que describe una trayectoria curva (Figura 4.10). En un instante t la partícula se encuentra en el punto P y tiene una velocidad $\boldsymbol{v}$ y una aceleración $\boldsymbol{a}$. Sabemos que el vector velocidad es tangente a la trayectoria y que lo podemos expresar como

$$\boldsymbol{v} = v\,\boldsymbol{e}_\mathrm{t} \qquad [4.23]$$

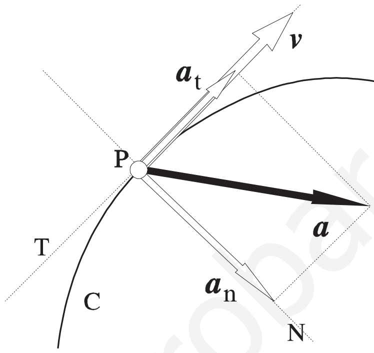


Figura 4.10

siendo $\boldsymbol{e}_\mathrm{t}$ el versor tangente a la trayectoria en el punto considerado. Para obtener la aceleración de la partícula derivaremos con respecto al tiempo la expresión anterior y obtendremos

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v\,\boldsymbol{e}_\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\mathrm{t} + v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}t} \qquad [4.24]$$

Si la trayectoria es rectilínea, el versor $\boldsymbol{e}_\mathrm{t}$ es constante y $\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}/\mathrm{d}t=0$. Pero cuando la trayectoria es curvilínea la dirección del versor tangente $\boldsymbol{e}_\mathrm{t}$ varía al pasar de un punto a otro, de modo que $\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}/\mathrm{d}t\neq 0$. Para evaluar el segundo miembro de la ec. [4.24] debemos calcular previamente el valor de $\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}/\mathrm{d}t$.

Como el versor tangente $\boldsymbol{e}_\mathrm{t}$ es de módulo constante (sólo su dirección cambia al pasar de un punto a otro de la trayectoria), la derivada de este versor es un vector perpendicular al dado y, por tanto, normal a la trayectoria en el punto P. En efecto, puesto que $\boldsymbol{e}_\mathrm{t}\cdot\boldsymbol{e}_\mathrm{t}=1$, por derivación se sigue $2\boldsymbol{e}_\mathrm{t}\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}/\mathrm{d}t)=0$, de modo que los vectores $\boldsymbol{e}_\mathrm{t}$ y $\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}/\mathrm{d}t$ son perpendiculares entre sí. El vector $\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}/\mathrm{d}t$ está situado en el plano de dos tangentes consecutivas a la curva (Figura 4.11). Dicho plano recibe el nombre de *plano osculador*. La dirección del vector $\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}/\mathrm{d}t$ es la de la *normal principal* (normal a la curva que está contenida en el plano osculador) y su sentido es el de la concavidad.

Si trazamos las normales principales a la curva en dos puntos contiguos (separados por una distancia infinitesimal ds), estas normales se cortan en un punto C llamado *centro de curvatura*, y forman entre sí un ángulo dθ. La distancia ρ=CP recibe el nombre de *radio de curvatura* (su inversa la representamos por κ=1/ρ y la llamaremos *curvatura*) y representa el radio de la *circunferencia osculatriz* a la curva en el punto P.

En la Figura 4.11, en el triángulo isósceles formado por los vectores $\boldsymbol{e}_\mathrm{t}'$, $\boldsymbol{e}_\mathrm{t}''$ y $\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}$, se observa fácilmente que

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}| = |\boldsymbol{e}_\mathrm{t}|\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta \qquad [4.25]$$

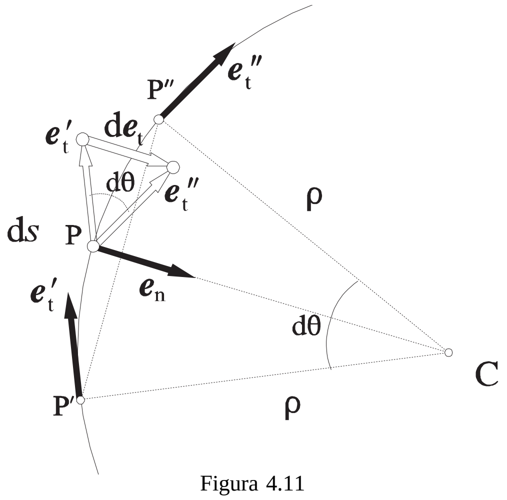


Figura 4.11

y, por otra parte, en el sector circular CP′P″, es

$$\mathrm{d}s = \rho\,\mathrm{d}\theta \qquad [4.26]$$

de modo que combinando las dos expresiones anteriores resulta que

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}| = \frac{1}{\rho}\,\mathrm{d}s \qquad [4.27]$$

o sea

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}t}\right] = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{\rho} \qquad [4.28]$$

que nos da el módulo del vector $\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}/\mathrm{d}t$. Si llamamos $\boldsymbol{e}_\mathrm{n}$ al versor en la dirección de la normal principal a la curva y en el sentido de la concavidad podemos escribir

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{\rho}\,\boldsymbol{e}_\mathrm{n} \qquad [4.29]$$

y llevando este resultado a la expresión [4.24] de la aceleración obtenemos finalmente

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{e}_\mathrm{t} + \frac{v^2}{\rho}\,\boldsymbol{e}_\mathrm{n} \qquad [4.30]$$

Así pues, en tanto que el vector velocidad $\boldsymbol{v}$ es tangente a la trayectoria, el vector aceleración $\boldsymbol{a}$ puede descomponerse en dos componentes (llamadas *componentes intrínsecas*) mutuamente perpendiculares (Figura 4.10): una componente tangencial $\boldsymbol{a}_\mathrm{t}$ (en la dirección de la tangente a la trayectoria), llamada *aceleración tangencial*, y una componente normal $\boldsymbol{a}_\mathrm{n}$ (en la dirección de la normal principal a la trayectoria), llamada *aceleración normal o centrípeta* (este último nombre en razón a que siempre va dirigida hacia el centro de curvatura). Las magnitudes de estas dos componentes de la aceleración son

$$a_\mathrm{t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad\qquad a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{\rho} \qquad [4.31]$$

y la magnitud de la aceleración de la partícula es

$$a = \sqrt{a_\mathrm{t}^2 + a_\mathrm{n}^2} \qquad [4.32]$$

Cada una de estas dos componentes de la aceleración tiene un significado físico bien definido. Cuando una partícula se mueve, su celeridad puede cambiar y este cambio lo mide la aceleración tangencial. Pero si la trayectoria es curva también cambia la dirección de la velocidad y este cambio lo mide la aceleración normal.

Si en el movimiento curvilíneo la celeridad es constante (v=cte), la aceleración tangencial será nula, pero habrá una cierta aceleración normal, dada por [4.31], de modo que en un movimiento curvilíneo siempre habrá aceleración. Si el movimiento es circular, entonces el radio de curvatura es el radio R de la circunferencia y la aceleración normal se escribe $a_n = v^2/R$, como ya sabíamos por los cursos elementales de Física.

Si la trayectoria es rectilínea, entonces el radio de curvatura es infinito ($\rho\to\infty$) de modo que a_n=0 (no hay cambio en la dirección de la velocidad) y la aceleración tangencial a_t será nula o no según que la celeridad sea o no constante.

§4.7. Triedro móvil.- Anteriormente hemos definido los versores $\boldsymbol{e}_t$ (tangente) y $\boldsymbol{e}_n$ (normal) a una curva alabeada (en el espacio). Definiremos ahora un nuevo versor $\boldsymbol{e}_b$ (binormal) mediante el producto vectorial de los dos anteriores; *i.e.*,

$$\boldsymbol{e}_b = \boldsymbol{e}_t \times \boldsymbol{e}_n \qquad [4.33]$$

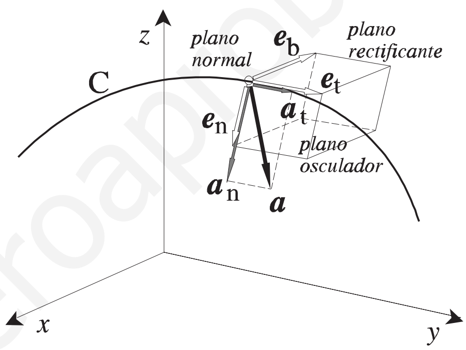


Figura 4.12

de modo que los versores $\boldsymbol{e}_t$, $\boldsymbol{e}_n$ y $\boldsymbol{e}_b$, en ese orden, definen un triedro directo llamado *triedro intrínseco* o de *Frenet*. Este triedro acompaña a la partícula en su movimiento, por lo que también se le llama *triedro móvil* (Figura 4.12).

Los versores ($\boldsymbol{e}_t$, $\boldsymbol{e}_n$) definen, como ya dijimos anteriormente, el *plano osculador*. Los pares de vectores ($\boldsymbol{e}_n$, $\boldsymbol{e}_b$) y ($\boldsymbol{e}_t$, $\boldsymbol{e}_b$) definen los planos *normal y rectificante*, respectivamente. El vector aceleración está contenido en el plano osculador.

Podemos servirnos de la relación $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n$ para calcular las componentes intrínsecas de la aceleración y el radio de curvatura en un punto de la trayectoria. En efecto, multiplicándola escalar y vectorialmente por $\boldsymbol{v}$ obtenemos

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n) = v\,a_t \qquad [4.34]$$

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\!tnb} \times \begin{pmatrix} \dot{v} \\ v^2/\rho \\ 0 \end{pmatrix}_{\!tnb} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v^3/\rho \end{pmatrix}_{\!tnb} = \frac{v^3}{\rho}\,\boldsymbol{e}_b = v\,a_n\,\boldsymbol{e}_b \qquad [4.35]$$

y de aquí se sigue

$$a_t = \frac{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a})}{v} \qquad a_n = \frac{|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}|}{v} \qquad \kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}|}{v^3} = \frac{a_n}{v^2} \qquad [4.36]$$

§4.8. Discusión de algunos tipos de movimiento.- Como aplicación de todo lo anteriormente expuesto, estudiaremos a continuación algunos tipos de movimiento de especial relevancia.

§4.8.a. Movimiento uniforme.- Cuando la velocidad es constante (en módulo, dirección y sentido), o sea $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0$ = cte, el movimiento se llama *uniforme*. Entonces, integrando la ecuación diferencial [4.5] obtenemos

$$\boldsymbol{r} = \int \boldsymbol{v}_0 \,\mathrm{d}t = \boldsymbol{v}_0 \int \mathrm{d}t = \boldsymbol{v}_0\, t + \boldsymbol{r}_0 \qquad [4.37]$$

donde $\boldsymbol{r}_0$ es una constante de integración que representa el vector de posición de la partícula en el instante inicial t=0. Puesto que los vectores $\boldsymbol{v}_0$ y $\boldsymbol{r}_0$ son constantes, la ec. [4.37] es la ecuación vectorial de una recta, o sea que la trayectoria de la partícula es rectilínea (Figura 4.13).

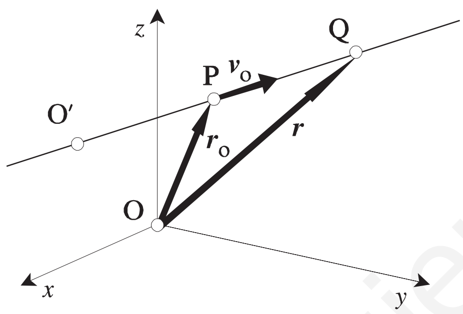


Figura 4.13

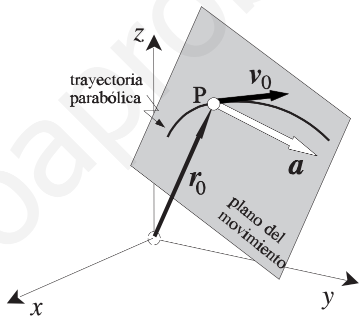


Figura 4.14

§4.8.b. Movimiento uniformemente acelerado.- Un tipo de movimiento especialmente interesante se presenta cuando la aceleración es constante, esto es $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_0$ = cte. Este tipo de movimiento se llama *uniformemente acelerado*.

Integrando la ecuación diferencial [4.15] se tiene

$$\boldsymbol{v} = \int \boldsymbol{a}_0 \,dt = \boldsymbol{a}_0 \int \mathrm{d}t = \boldsymbol{a}_0\, t + \boldsymbol{v}_0 \qquad [4.38]$$

donde $\boldsymbol{v}_0$ es una constante de integración que representa la velocidad de la partícula en el instante inicial t=0. Sustituyendo este resultado en [4.5] y procediendo a una nueva integración se obtiene

$$\boldsymbol{r} = \int \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t = \int (\boldsymbol{a}_0\, t + \boldsymbol{v}_0)\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{a}_0\, t^2 + \boldsymbol{v}_0\, t + \boldsymbol{r}_0 \qquad [4.39]$$

donde el vector $\boldsymbol{r}_0$ representa, como en el caso anterior, el vector de posición de la partícula en el instante t=0.

De acuerdo con la ec. [4.38], la velocidad de la partícula se encuentra siempre en el plano definido por los vectores $\boldsymbol{v}_0$ y $\boldsymbol{a}_0$. Del mismo modo, la ec. [4.39] nos indica que el vector $\boldsymbol{r}$-$\boldsymbol{r}_0$ se encuentra siempre en ese mismo plano. Así, llegamos a la conclusión de que en el movimiento con aceleración constante la trayectoria de la partícula está situada en un plano (plano osculador, Figura 4.14). Se pueden presentar los siguientes casos:

(1) Si la velocidad inicial es nula, o sea $\boldsymbol{v}_0$=0, la ec. [4.39] se reduce a

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_0\, t^2 \qquad [4.40]$$

de modo que la trayectoria es rectilínea y el sentido del movimiento es el de $\boldsymbol{a}_0$.

(2) Si los vectores $\boldsymbol{v}_0$ y $\boldsymbol{a}_0$ tienen la misma dirección, entonces la trayectoria es rectilínea y el movimiento será rectilíneo uniformemente acelerado o retardado según que los sentidos de ambos vectores sean iguales u opuestos.

(3) En el caso general, los vectores $\boldsymbol{v}_0$ y $\boldsymbol{a}_0$ tendrán direcciones diferentes. Entonces, la ec. [4.39] representa una parábola situada en el plano definido por los vectores $\boldsymbol{v}_0$ y $\boldsymbol{a}_0$ y que pasa por un punto del espacio cuyo vector de posición es $\boldsymbol{r}_0$. Uno de los problemas más interesantes en que se presenta esta situación es el movimiento de los proyectiles.

§4.8.c. Movimiento de un proyectil.- Aplicaremos los resultados anteriores al estudio del movimiento de un proyectil, es decir de un objeto que es lanzado al aire con una cierta velocidad inicial y que se mueve sometido solamente a la acción del campo gravitatorio. Utilizaremos las siguientes hipótesis simplificadoras: **(a)** El alcance del proyectil es suficientemente pequeño como para poder despreciar la curvatura de la superficie terrestre (la aceleración gravitatoria $\boldsymbol{g}$ es normal a dicha superficie); **(b)** la altura que alcanza el proyectil es suficientemente pequeña como para poder despreciar la variación del campo gravitatorio terrestre con la altura; **(c)** la velocidad del proyectil es suficientemente pequeña como para poder despreciar la resistencia que presenta el aire al movimiento del proyectil y **(d)** no tendremos en cuenta el efecto de rotación de la Tierra que, como veremos más adelante, tiende a desviar el proyectil hacia la derecha de su trayectoria cuando el movimiento tiene lugar en el hemisferio Norte.

Supongamos que se dispara un proyectil con una velocidad inicial $\boldsymbol{v}_0$ que forma un ángulo θ_0 con la horizontal. En este problema $\boldsymbol{a}$=$\boldsymbol{g}$, siendo $\boldsymbol{g}$ la aceleración gravitatoria. Escogeremos el plano xy coincidiendo con el plano de la trayectoria (definido por $\boldsymbol{v}_0$ y $\boldsymbol{g}$), con el eje y vertical y dirigido hacia arriba y el origen O coincidiendo con la posición de disparo del proyectil. Tenemos

$$\boldsymbol{r}_0 = 0 \qquad \boldsymbol{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \cos\theta_0 \\ v_0 \operatorname{sen}\theta_0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\boldsymbol{ijk}} \qquad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix}_{\boldsymbol{ijk}} \qquad [4.41]$$

De acuerdo con la ec. [4.38], la velocidad en un instante genérico t viene dada por

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix}_{\boldsymbol{ijk}} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\theta_0 \\ v_0 \operatorname{sen}\theta_0 - gt \\ 0 \end{pmatrix}_{\boldsymbol{ijk}} \qquad [4.42]$$

y el módulo de la velocidad es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad [4.43]$$

formando el vector $\boldsymbol{v}$ (que es siempre tangente a la trayectoria) un ángulo θ con la horizontal dado por

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_y}{v_x} \qquad [4.44]$$

Similarmente, de la ec. [4.39] se sigue para el vector de posición

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 t \cos\theta_0 \\ v_0 t \operatorname{sen}\theta_0 - \frac{1}{2} g t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad [4.45]$$

que nos proporciona las ecuaciones paramétricas de la trayectoria. Si eliminamos el tiempo t entre las expresiones de las componentes x e y del vector de posición, se obtiene la ecuación algebraica de la trayectoria; esto es,

$$y = x \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta_0} x^2 \qquad [4.46]$$

que representa una parábola de eje vertical con la concavidad dirigida hacia abajo. Así, pues, *el movimiento es parabólico*.

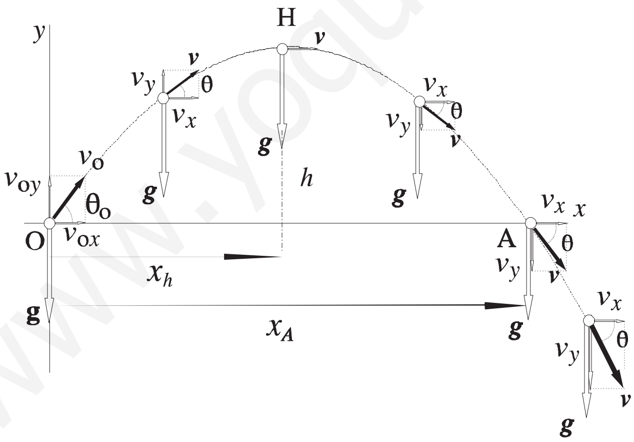


Figura 4.15

A partir de las ecuaciones anteriores podemos obtener mucha información acerca del movimiento del proyectil. Por ejemplo, el tiempo t_h requerido para que el proyectil alcance la máxima altura h lo encontraremos anulando la segunda componente de $\boldsymbol{v}$ en [4.42], ya que en ese punto la velocidad del proyectil es horizontal. La altura máxima h alcanzada por el proyectil y el recorrido horizontal x_h realizado hasta ese instante los obtendremos sustituyendo el tiempo t_h en las componentes del vector de posición $\boldsymbol{r}$ dado por [4.45]:

$$t_h = \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta_0}{g} \qquad x_h = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta_0}{2g} \qquad y_h = h = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta_0}{2g} \qquad [4.47]$$

Resulta fácil comprobar que la máxima altura que adquiere el proyectil, para un determinado valor de v_0, presenta un valor máximo, para θ_0=90° (disparo vertical, como es obvio).

El tiempo t_A que emplea el proyectil en retornar al plano horizontal de lanzamiento recibe el nombre de *tiempo de vuelo* y lo podemos calcular haciendo y=0 en [4.45]. El *alcance* x_A es la distancia horizontal cubierta durante ese tiempo y se determina sustituyendo el valor del tiempo de vuelo en $x(t)$ dada por [4.45]. Descartando la solución trivial (t=0, x=0, y=0) tenemos

$$t_A = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\theta_0}{g} \qquad x_A = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta_0}{g} \qquad y_A = 0 \qquad [4.48]$$

Obsérvese que $t_A=2t_h$, que $x_A=2x_h$ y que, para un valor fijo de v_0, el alcance será máximo para un ángulo de disparo de 45°. Por otra parte, como sen $2(90°-\theta_0)$ = sen $2\theta_0$, se obtiene el mismo alcance para un ángulo de disparo dado y para su complementario.

§4.8.d. Movimiento rectilíneo.- La trayectoria de una partícula es rectilínea cuando su aceleración es nula (sin serlo la velocidad) o cuando su aceleración no tiene componente normal a la velocidad. El movimiento rectilíneo es, pues, un caso particular del movimiento general en el espacio, pero debido a la abundancia de problemas y situaciones en que lo encontraremos, le dedicaremos una atención especial.

Puesto que los vectores $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{a}$ están dirigidos a lo largo de la trayectoria, será conveniente escoger el origen O sobre ella de modo que el vector de posición $\boldsymbol{r}$ también estará situado sobre ella. Entonces, al ser paralelos entre sí todos los vectores que nos describen el movimiento de la partícula podemos prescindir de la notación vectorial. Si tomamos el eje x en la dirección de la trayectoria y especificamos un cierto sentido como positivo, las ecuaciones de definición de la velocidad y de la aceleración se reducen a la componente x, o sea

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \qquad [4.49]$$

Tabla 4.1.- Expresiones para el movimiento rectilíneo.

Conocemos	Se aplica	Se obtiene	O sea
$a = a(t)$	$\mathrm{d}v = a\,\mathrm{d}t$	$v = v_0 + \int a\,\mathrm{d}t$	$v = v(t)$
$v = v(t)$	$\mathrm{d}x = v\,\mathrm{d}t$	$x = x_0 + \int v\,\mathrm{d}t$	$x = x(t)$
$a = a(x)$	$v\,\mathrm{d}v = a\,\mathrm{d}x$	$v^2 = v^2_0 + 2\int a\,\mathrm{d}x$	$v = v(x)$
$v = v(x)$	$\mathrm{d}t = \mathrm{d}x/v$	$t = t_0 + \int \mathrm{d}x/v$	$t = t(x)$
$a = a(v)$	$\mathrm{d}x = v\,\mathrm{d}v/a$ $\mathrm{d}t = \mathrm{d}v/a$	$x = x_0 + \int v\,\mathrm{d}v/a$ $t = t_0 + \int \mathrm{d}v/a$	$x = x(v)$ $t = t(v)$

de modo que, si conocemos $x=x(t)$, podemos obtener la velocidad y la aceleración de la partícula, *i.e.*, $v=v(t)$ y $a=a(t)$, mediante dos derivaciones sucesivas. En algunos casos conoceremos $a=a(t)$ y, entonces, por integración (y conociendo las condiciones iniciales v_0 y x_0) podemos obtener $v=v(t)$ y $x=x(t)$.

Podemos encontrar otra relación cinemática importante aplicando a la definición de la aceleración la regla de derivación de una función de función. Así, obtenemos la expresión

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \qquad [4.50]$$

que nos resultará de gran utilidad cuando conozcamos $a=a(x)$ o $v=v(x)$. En la Tabla 4.1 presentamos el modo de abordar diversos problemas de movimiento rectilíneo.

Las expresiones anteriores aplicadas al movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (a=cte) nos llevan a las bien conocidas relaciones

$$v = v_0 + a\,t \qquad v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \qquad x = x_0 + v_0\,t + \frac{1}{2}a\,t^2 \qquad [4.51]$$

§4.9. Velocidad y aceleración relativas.- Ya hemos indicado anteriormente que el movimiento es un concepto relativo porque debe referirse a un referencial particular escogido por el observador. Ya que diferentes observadores pueden utilizar referenciales distintos, es importante conocer la forma en que se relacionan las observaciones realizadas por aquéllos. En este artículo sólo vamos a introducir los conceptos de velocidad y aceleración relativas para observadores ligados a referenciales en movimiento que mantienen una orientación fija en el espacio (*i.e.*, traslación, sin rotación) y dejaremos para un tema posterior el análisis del movimiento relativo en el caso más general (*i.e.*, traslación y rotación).

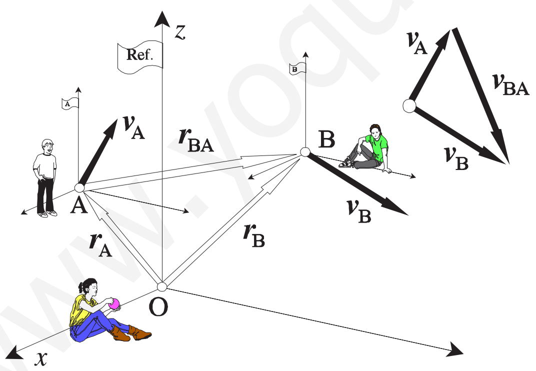


Figura 4.16

Consideremos dos partículas A y B que se mueven en el espacio y sean $\boldsymbol{r}_A$ y $\boldsymbol{r}_B$ sus vectores de posición con respecto al origen O de un referencial dado. Las velocidades de A y B medidas en ese referencial son

$$\boldsymbol{v}_A = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A}{\mathrm{d}t} \qquad \boldsymbol{v}_B = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_B}{\mathrm{d}t} \qquad [4.52]$$

Los vectores de posición de la partícula B con respecto a la A y de la A con respecto a la B están definidos por

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{BA}} = \mathrm{AB} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{A}} \qquad \boldsymbol{r}_{\mathrm{AB}} = \mathrm{BA} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{A}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{B}} \tag{4.53}$$

y las velocidades de B con respecto a A y de A con respecto a B son

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{BA}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\mathrm{BA}}}{\mathrm{d}t} \qquad \boldsymbol{v}_{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\mathrm{AB}}}{\mathrm{d}t} \tag{4.54}$$

de modo que al ser $\boldsymbol{r}_{\mathrm{BA}} = - \boldsymbol{r}_{\mathrm{AB}}$ también resulta que $\boldsymbol{v}_{\mathrm{BA}} = - \boldsymbol{v}_{\mathrm{AB}}$. Esto es, las velocidades relativas de B con respecto a A y de A con respecto a B son iguales y opuestas. Efectuando las derivadas indicadas en [4.54] resulta

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\mathrm{BA}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t} \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\mathrm{AB}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}t} \tag{4.55}$$

o sea que

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{BA}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{A}} \qquad \boldsymbol{v}_{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{A}} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{B}} \tag{4.56}$$

de modo que obtendremos la velocidad relativa entre las dos partículas restando vectorialmente sus velocidades con respecto a un mismo referencial (Ref. O*xyz* en la Figura 4.16). Derivando de nuevo las expresiones [4.56] tenemos para las aceleraciones relativas

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{BA}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t} \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{AB}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}t} \tag{4.57}$$

Los primeros miembros de [4.57] son las aceleraciones relativas de B con respecto a A y de A con respecto a B. Los otros términos son las aceleraciones de A y de B con respecto a un mismo observador. Tenemos

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{BA}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{a}_{\mathrm{A}} \qquad \boldsymbol{a}_{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{A}} - \boldsymbol{a}_{\mathrm{B}} \tag{4.58}$$

siguiéndose para las aceleraciones relativas la misma regla que para las velocidades.

Ejemplo I.- *Navegando por el río.-* Un hombre en un bote navega corriente arriba por un río y lleva una botella medio vacía de whisky sobre la popa del bote. Mientras el bote pasa bajo un puente, una ola reflejada por los pilares del puente choca contra la embarcación y la botella cae al agua, sin que lo advierta el tripulante. Durante 15 minutos, el bote continúa aguas arriba, mientras la botella flota aguas abajo. Al cabo de los 15 minutos, el hombre ve que la botella ha desaparecido, vuelve al bote (prescindamos del tiempo empleado en la maniobra) y navega aguas abajo con la misma velocidad que antes respecto al agua. Coge la botella un kilómetro aguas abajo del puente. La pregunta es: ¿cuál es la velocidad del río? (Adaptado de *Biografía de la Física*, pág, 218, de *George Gamow*. Alianza Editorial. Madrid 1980).

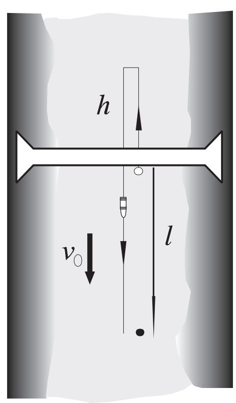


Figura 4.17

La resolución del problema es muy simple si lo planteamos en un referencial (el del río) en el que la botella se encuentra en reposo. En este referencial, la velocidad de la barca es la misma (en módulo, no en dirección) cuando se aleja de la botella y cuando regresa para recogerla. Puesto que la botella se encuentra en reposo respecto del río, el tiempo que emplea la barca en regresar hasta la botella será otros 15 min. Así, la botella ha permanecido en el agua 30 min. Durante ese tiempo, la botella ha recorrido 1 km, arrastrada por la corriente; por consiguiente, la velocidad de la botella respecto a tierra, que es también la velocidad de la corriente, es

$$\frac{1\ \text{km}}{30\ \text{min}} = \frac{1\ \text{km}}{0.5\ \text{horas}} = 2\ \text{km/h}$$

Naturalmente, también podemos resolver el problema planteándolo en el *referencial de tierra*. Invitamos al lector a que así lo haga, aunque tan sólo sea para comprobar que no encontrará la elegante simplicidad del método descrito anteriormente.

Problemas

4.1.- Una pelota dejada caer desde la cornisa de un edificio emplea 0.25 s en pasar frente a una ventana de 2 m de altura. ¿Qué distancia hay entre el borde superior de la ventana y la cornisa?

4.2.- Un niño lanza una bola verticalmente hacia arriba, con una velocidad inicial de 20 m/s. Transcurrido 1 s, el niño lanza otra bola, también verticalmente hacia arriba y con la misma velocidad inicial que la primera. **a)** ¿En qué instante y en qué posición se cruzarán ambas bolas? **b)** ¿Cuáles serán sus velocidades en ese instante?

4.3.- El maquinista de un tren expreso que circula con una velocidad v_1 observa a una distancia d el furgón de cola de un tren de mercancías que marcha por delante del expreso, sobre la misma vía y en el mismo sentido, con una velocidad v_2, menor que la del expreso. El maquinista del expreso aplica inmediatamente los frenos, produciéndose una desaceleración constante a, mientras que el mercancías continúa su marcha a velocidad constante. Determinar el menor valor de la desaceleración para que pueda evitarse la colisión.

4.4.- Una partícula se mueve sobre el eje x de modo que su velocidad es $v = 2 + 3t^2$ (cm/s). En el instante t=0 su posición es x=3 cm. Determinar: **a)** la posición de la partícula en un instante genérico t; **b)** su aceleración; **c)** su velocidad media en el intervalo de tiempo t_1=2 s a t_2=5 s.

4.5.- Después de parar el motor de una canoa, ésta tiene una aceleración en sentido opuesto a su velocidad y directamente proporcional al cuadrado de ésta. Determinar: **a)** la velocidad de la canoa en función del tiempo; **b)** la distancia recorrida en un tiempo t; **c)** la velocidad de la canoa después de haber recorrido una distancia x; **d)** Constrúyanse las gráficas del movimiento. Aplicación numérica: supóngase que cuando se para el motor la velocidad de la canoa es de 20 m/s y que 15 s después dicha velocidad se ha reducido a la mitad. Determinar el valor de la constante de proporcionalidad que aparece en la definición de la aceleración.

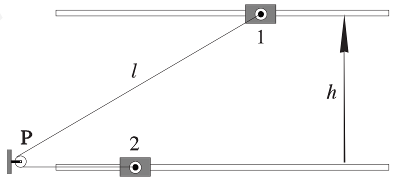
4.6.- Vehículo quitanieves. La velocidad de un vehículo quitanieves es inversamente proporcional al tiempo transcurrido desde que comenzó a nevar. Transcurrido un cierto tiempo, t_0, a partir del instante en que empezó a nevar, el vehículo se pone en marcha y recorre 2 km en la primera hora y 1 km en la segunda. **a)** Determinar la ecuación del movimiento del vehículo, *i.e.*, $x(t)$. **b)** Calcular el valor de t_0. **c)** ¿Qué distancia recorrerá el vehículo durante la tercera hora de funcionamiento?

4.7.- El movimiento rectilíneo de una partícula está caracterizado por su aceleración a=-9x, siendo x la distancia (en cm) que la separa de un cierto origen sobre la trayectoria. En el instante inicial la partícula se encuentra en el punto x_0=3 cm y tiene una velocidad de 2 cm/s (alejándose del origen). Determinar la posición y la velocidad de la partícula en un instante cualquiera t.

4.8.- En un cierto instante la celeridad de una partícula es de 20 m/s y el módulo de su aceleración es 3 m/s^2. Los vectores velocidad y aceleración forman, en ese instante, un ángulo de 30°. Determinar la curvatura y el radio de curvatura de la trayectoria de la partícula en ese instante.

4.9.- El movimiento de una partícula queda definido por $\boldsymbol{r} = R\cos\omega t\,\boldsymbol{i} + R\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\boldsymbol{j}$, donde R y ω son constantes. **a)** Obtener la ecuación f(x,y) de la trayectoria. ¿En qué sentido se recorre dicha trayectoria? **b)** Demostrar que la velocidad de la partícula es en todo momento perpendicular a su vector de posición. **c)** Demostrar que la aceleración de la partícula está siempre dirigida hacia el origen y que su módulo es proporcional al módulo del vector de posición. **d)** Demostrar que $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$ es un vector constante.

4.10.- El movimiento de una partícula está definido por las ecuaciones $x = a\cos\omega t$ e $y = b\,\mathrm{sen}\omega t$, donde a, b y ω son constantes. **a)** Demostrar que la trayectoria es una elipse. **b)** Demostrar que, en general, la velocidad de la partícula no es perpendicular al vector de posición de la misma. **c)** Demostrar que la aceleración de la partícula está siempre dirigida al origen. **d)** Determinar las componentes tangencial y normal de la aceleración. **e)** Encontrar las expresiones de la curvatura y del radio de curvatura en los puntos de la trayectoria.

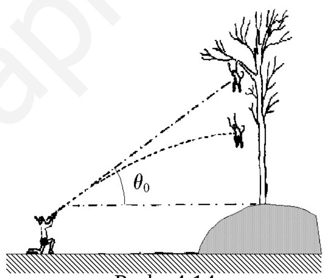


Prob. 4.11

4.11.- En el dispositivo que se muestra en la figura, las deslizadoras 1 y 2 están unidas por una cuerda flexible, de longitud l, que pasa por una pequeña polea P. Determinar la velocidad y la aceleración de la deslizadora 2 en el instante en que la deslizadora 1 se mueve hacia la derecha con velocidad $\boldsymbol{v}_1$ y aceleración $\boldsymbol{a}_1$.

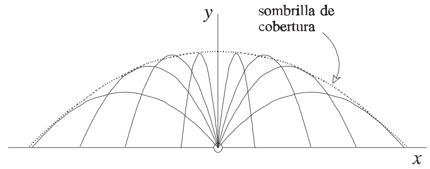
4.12.- El movimiento de una partícula en el plano xy está definido por las ecuaciones paramétricas $x = 2t$, $y = 4\,\mathrm{sen}\,\omega t$. **a)** Determinar la ecuación de la trayectoria y representarla gráficamente. **b)** Calcular la velocidad y la aceleración de la partícula en función del tiempo. **c)** ¿En qué instantes alcanzan la velocidad y la aceleración sus valores extremos (máximos o mínimos)?

4.13.- Desde el pie de un plano inclinado, que forma un ángulo α con la horizontal, se dispara un proyectil con una velocidad inicial $\boldsymbol{v}_0$ que forma un ángulo θ_0 con la horizontal. Determinar el alcance del proyectil medido a lo largo del plano inclinado.



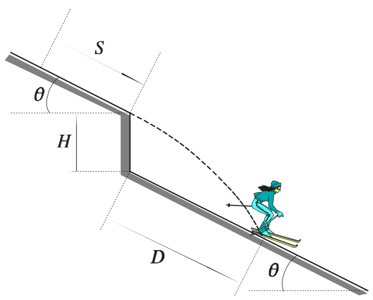
Prob. 4.14

4.14.- Justamente en el instante en que un indio dispara un dardo, apuntando con la cerbatana directamente hacia un mono que está colgado de una rama de un árbol, el mono se suelta y cae libremente (*vide* figura). **a)** Demostrar que cualquiera que sea la velocidad v_0 de salida del dardo, el mono será siempre alcanzado. **b)** El "siempre" anterior no es totalmente cierto; hay un valor mínimo de v_0 por debajo del cual el mono no será alcanzado. Determinar dicho valor.



Prob. 4.15

4.15.- Sombrilla de cobertura. El piloto de un avión de caza que va a operar cerca del emplazamiento de un cañón antiaéreo debe conocer la *sombrilla de cobertura* del cañón, esto es, la envolvente de todas las posibles trayectorias de las proyectiles disparados por el cañón, en el supuesto de que éste pueda cubrir todos los ángulos de disparo, desde el disparo horizontal al vertical (*vide* figura). Si consideramos emplazado el cañón en el origen de un sistema coordenado, como se indica en la figura, ¿cuál es la ecuación de la sombrilla de cobertura del cañón? (Se supone que el cañón dispara un tipo único de proyectiles).



Prob. 4.16

4.16.- Un esquiador se desliza por una pista de pendiente constante que forma un ángulo θ con la horizontal. Tras haber partido del reposo, recorre una distancia s sobre la pista antes de encontrarse con el borde de un escarpado vertical de altura H, como se indica en la figura. Al pie de la escarpadura la pista continúa con la misma pendiente. Determinar la posición del punto donde cae el esquiador.

4.17.- Una partícula se encuentra inicialmente en el origen de coordenadas y su velocidad viene dada por $\boldsymbol{v} = 8t^3\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j}$. **a)** Determinar su trayectoria. **b)** Obtener las componentes tangencial y normal de su aceleración.

4.18.- ¿Cuál debe ser la elevación de disparo de una pieza de artillería para que en el punto más alto de la trayectoria del proyectil se pueda trazar una circunferencia tangente (circunferencia osculatriz) cuyo centro se encuentre situado en la misma horizontal que la pieza?

4.19.- Demostrar las fórmulas de *Frenet-Serret*: **a)** $d\boldsymbol{e}_t/ds = \kappa\boldsymbol{e}_n$; **b)** $d\boldsymbol{e}_b/ds = -\tau\boldsymbol{e}_n$; **c)** $d\boldsymbol{e}_n/ds = -\kappa\boldsymbol{e}_t+\tau\boldsymbol{e}_b$; siendo s la longitud de arco sobre una curva C medida desde un punto fijo de la curva, y κ y τ la curvatura y torsión, respectivamente, de la curva.

4.20.- Demostrar que para una curva plana es $\tau=0$.

4.21.- Demostrar que el vector de aceleración de una partícula que se mueve sobre una curva cualquiera del espacio está siempre contenido en el plano osculador de la trayectoria.

4.22.- Una partícula se mueve describiendo la parábola $x^2 = 2py$, donde p es una constante, de modo que la proyección de su velocidad sobre la tangente a la parábola en el vértice de ésta permanece constante e igual a k. **a)** Determinar la velocidad y la aceleración de la partícula. **b)** Evaluar las componentes intrínsecas de la aceleración. **c)** Encontrar las expresiones da la curvatura y del radio de curvatura en los puntos de la trayectoria.

4.23.- Las ecuaciones paramétricas del movimiento de una partícula son: $x = R\cos\omega t$, $y = R\,\mathrm{sen}\,\omega t$, $z = bt$, donde R, ω y b son constantes. **a)** Hacer un esquema de la trayectoria. **b)** Calcular la velocidad y la aceleración de la partícula. **c)** Determinar las componentes intrínsecas (tangencial y normal) de la aceleración. **d)** Calcular el radio de curvatura.

4.24.- En la curva definida en el Problema 4.23, poner $R = 3$, $\omega = 1$ y $b = 4$. Determinar: **a)** el versor tangente; **b)** el versor normal principal, la curvatura y el radio de la curvatura; **c)** el versor binormal, la torsión y el radio de torsión.

4.25.- Dadas las ecuaciones paramétricas (temporales) del movimiento de una partícula: $x = 2t$, $y = t^2$, $z = t^3/3$, determinar: **a)** Las componentes intrínsecas de su aceleración en el instante t=1; **b)** el radio de curvatura de la trayectoria en dicho instante.

4.26.- Dada la curva del espacio $x = t$, $y = t^2$, $z = (2/3)t^3$, determinar: **a)** su curvatura; **b)** su torsión; **c)** las ecuaciones de las rectas tangente, normal y binormal en el punto correspondiente a $t = 1$; **d)** las ecuaciones de las planos osculador, normal y rectificador en el mismo punto.

4.27.- Una partícula describe una trayectoria elíptica de ecuaciones: $x = A\cos\theta$, $y = B\,\mathrm{sen}\,\theta$, existiendo la relación $\theta - \varepsilon\,\mathrm{sen}\,\theta = kt$, siendo ε la excentricidad de la elipse, k una constante y t el tiempo. **a)** Determinar la velocidad de la partícula. **b)** Encontrar la hodógrafa del movimiento.

4.28.- El movimiento de dos partículas queda definido, respectivamente, por $\boldsymbol{r}_1 = 3t^2\boldsymbol{i} + 5t\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{r}_2 = t\boldsymbol{i} + 4t^2\boldsymbol{j}$. Determinar la velocidad y aceleración de la segunda partícula respecto a la primera en el instante $t = 2$ s.

4.29.- La velocidad de un avión con respecto al aire es de 600 km/h. Si sopla un viento procedente del Oeste, con una velocidad de 100 km/h, determinar el rumbo que debe poner el piloto del avión para dirigirse hacia el Norte y calcular cuál será entonces la velocidad del avión con respecto a tierra.

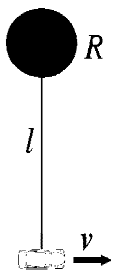
4.30.- Puente aéreo. Un avión emplea 1 h y 15 min para desplazarse entre dos poblaciones separadas por una distancia de 660 km. En el viaje de vuelta emplea sólo 55 min. Suponiendo que tanto en el viaje de ida como en el de vuelta ha soplado un viento constante en una dirección que forma un ángulo de 30° con la trayectoria calcúlense la velocidad del viento y la del avión en aire en calma.

4.31.- Atravesando un río. Un bote parte desde el punto P en la orilla de un río y marcha con celeridad constante v (respecto al agua) siempre en dirección hacia un punto Q de la orilla opuesta, que se encuentra justamente enfrente del punto P de partida. La anchura del río es D y la velocidad de la corriente es V. Demostrar que la trayectoria del bote queda definida por

$$r = \frac{D \sec\theta}{(\sec\theta + \mathrm{tg}\theta)^{\frac{v}{V}}}$$

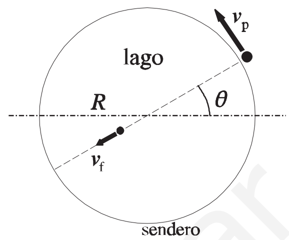
siendo r la distancia que existe en un instante dado entre la posición del bote y el punto Q y θ el ángulo formado por $\boldsymbol{r}$ y QP.

4.32.- Un cochecito de juguete, autopropulsado, que se mueve con celeridad constante v, está unido mediante una cuerda flexible de longitud l a una columna cilíndrica de radio R, como se ilustra en la figura. Cuando el cochecito se pone en movimiento, la cuerda se enrolla en la columna, permaneciendo siempre tensa. **a)** Obtener las ecuaciones horarias del movimiento del cochecito, *i.e.*, $x(t)$ e $y(t)$, a partir del momento en que la cuerda comienza a enrollarse en la columna. **b)** Determinar el tiempo que tarda la cuerda en enrollarse completamente. **c)** Encontrar la velocidad y la aceleración del punto de tangencia entre la cuerda y la columna cuando el ángulo de arrollamiento vale 90°.



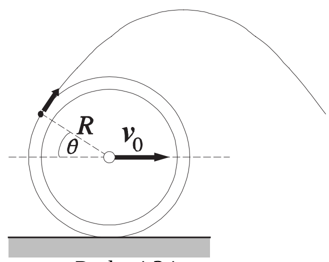
Prob. 4.32

4.33.- Persecución. Un fugitivo se encuentra en una barca en el centro de un lago circular de radio R, encontrándose su perseguidor en un automóvil que circula por un sendero que sigue el borde del lago. La velocidad máxima de la barca es v_f y la del automóvil $v_p = kv_f$, con $k > \pi$. Para alcanzar la orilla del estanque, escapando de su perseguidor, el fugitivo utiliza



Prob. 4.33

la estrategia de colocarse en posición diametralmente opuesta a la de su perseguidor, mientras sea posible. **a)** Determinar la ecuación de la trayectoria seguida por el fugitivo y la curvatura de la misma. **b)** ¿Conseguirá llegar a la orilla? En caso contrario, ¿cuál será la máxima separación del centro del lago que conseguirá? **c)** Si a partir de esa posición comienza a moverse radialmente, ¿para qué valor de k conseguirá escapar? ¿Cuál será el tiempo empleado en ese caso?



Prob. 4.34

4.34.- Una rueda de radio R rueda sobre un camino horizontal embarrado, avanzando con una velocidad constante v_0. De la periferia de la rueda se desprenden partículas de barro. **a)** Determinar la altura máxima sobre el suelo que pueden alcanzar las partículas de barro. **b)** ¿De qué punto de la periferia de la rueda se desprenden esas partículas de barro?