CURSO CERO DE FÍSICA

CINEMÁTICA DEL PUNTO

Ángel Muñoz Castellanos
Departamento de Física

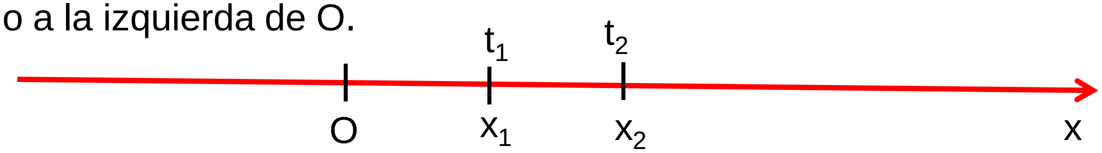
Universidad Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

CONTENIDO

- **Movimiento unidimensional**
  - **Posición, velocidad, aceleración**
  - **Movimiento rectilíneo uniforme**
  - **Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado**
- **Movimiento en el espacio**
  - **Vectores posición, velocidad y aceleración**
  - **Ecuación de la trayectoria**
  - **Componentes intrínsecas de la aceleración**
  - **Movimiento circular**

Movimiento unidim. : posición, velocidad, aceleración

En un movimiento unidimensional la partícula se mueve a lo largo de una recta. Para describir el movimiento es necesario escoger un origen, O, en el que situar el sistema de referencia. La posición de un punto en la recta está dado mediante un número x. El número es positivo si está situado a la derecha de O y negativo si está situado a la izquierda de O.



Si la posición de la partícula en el instante t_1 es x_1 y en t_2 es x_2, conviene recordar:

- El desplazamiento se define como: $\Delta x = x_2 - x_1$
- La distancia recorrida en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ es: $d = |x_2 - x_1|$
- La velocidad media de la partícula entre los instantes t_2 y t_1 es:

$$v_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

La velocidad media no nos da información de cómo varía la posición de la partícula con el tiempo. La magnitud que sí nos da tal información es la velocidad instantánea, v, que se define como:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

La velocidad instantánea es la derivada de la posición con respecto al tiempo

Para saber más: Proyecto Newton,

Movimiento unidimen. : posición, velocidad, aceleración

La velocidad de la partícula también puede variar con el tiempo. Si en t_1 la velocidad es v_1 y en t_2 la velocidad es v_2, se define la aceleración media en el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$:

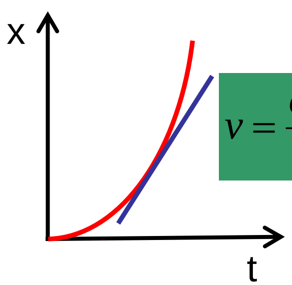
$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Sin embargo la aceleración media no nos dice como va variando la velocidad de la partícula con el tiempo. La magnitud adecuada para ello es la aceleración instantánea, que se define como:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

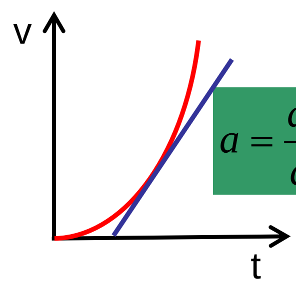
La aceleración instantánea es la derivada de la velocidad con respecto del tiempo

Dos representaciones gráficas importantes:



$$v = \frac{dx}{dt}$$

La velocidad instantánea es la tangente de la curva x=x(t)



$$a = \frac{dv}{dt}$$

La aceleración instantánea es la tangente de la curva v=v(t)

Ángel Muñoz Castellanos
Dpto. de Física

Movimiento rectilíneo uniforme

El movimiento es rectilíneo uniforme si la velocidad de la partícula es constante

Ecuaciones fundamentales del movimiento rectilíneo uniforme:

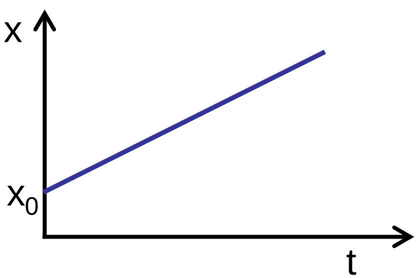
$$v = cte \Longrightarrow a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(cte)}{dt} = 0$$

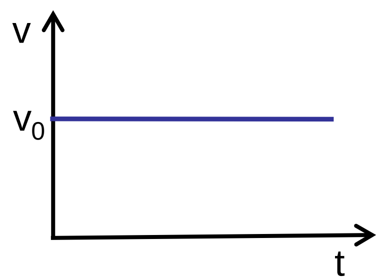
Por otro lado: $v = cte = v_0 \Longrightarrow v = \frac{dx}{dt} = v_0 \Longrightarrow dx = v_0 dt$

$$\Longrightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v_0 dt = v_0 \int_0^t dt \Longrightarrow x - x_0 = v_0 t$$

Por tanto, las ecuaciones fundamentales del movimiento son: $\begin{cases} x = x_0 + v_0 t \\ v = v_0 \end{cases}$

Las curvas x=x(t) y v)v(t) son:





Para saber más: MRU, EDUCAPLUS

Ángel Muñoz Castellanos
Dpto. de Física

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

El movimiento rectilíneo es uniformemente acelerado si la aceleración es constante

Ecuaciones fundamentales del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado:

$$a = cte$$

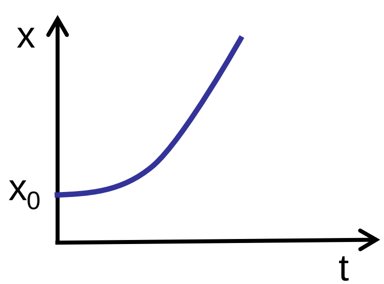
Como: $a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a\,dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a\,dt = a\int_0^t dt$

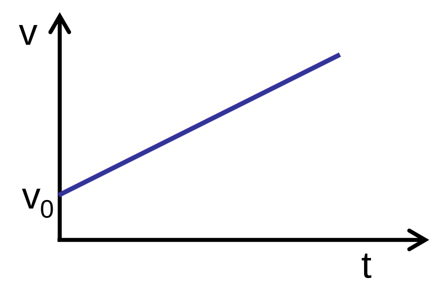
$$\Rightarrow v - v_0 = at \Rightarrow \boxed{v = v_0 + at}$$

Por otro lado:

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + at \Rightarrow dx = (v_0 + at)dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = v_0\int_0^t dt + a\int_0^t t\,dt \Rightarrow \boxed{x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2}$$

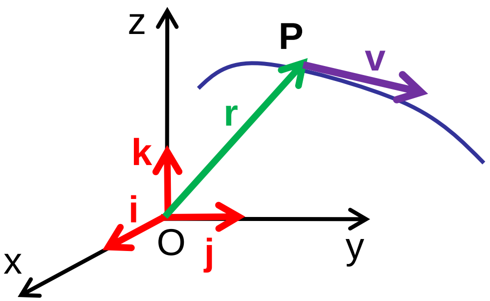
Por tanto, las ecuaciones fundamentales del movimiento son: $\left\{\begin{array}{l} v = v_0 + at \\ x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \end{array}\right.$





Vectores posición, velocidad y aceleración

Para describir el movimiento de una partícula en tres dimensiones es necesario considerar un sistema de referencia tridimensional. En general se considera un sistema de ejes cartesianos.



El vector posición de la partícula, **r**, es un vector cuyo origen está en el origen de coordenadas y su extremo en la partícula:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

El vector velocidad de la partícula, **v**, es la derivada de vector posición respecto al tiempo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

Importante: La dirección del vector velocidad cuando la partícula está en el punto P es **paralela** a **la tangente a la trayectoria** en dicho punto, P.

El vector aceleración, **a**, es la derivada de vector velocidad respecto al tiempo:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

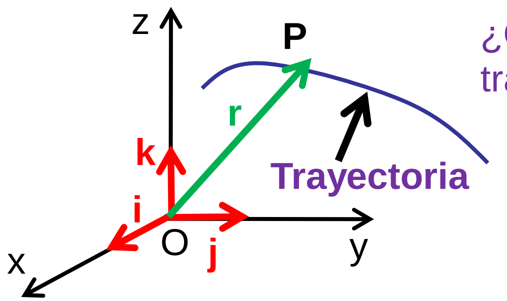
Ejemplo: el vector posición de un partícula es:

$$\vec{r} = 2t^2\vec{i} + (4t+1)\vec{j} + 3\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = 4t\vec{i} + 4\vec{j} \\ \vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = 4\vec{i} \end{cases}$$

Ángel Muñoz Castellanos
Dpto. de Física

Ecuación de la trayectoria

La partícula al moverse en el espacio va pasando por diversos puntos. Si unimos dichos puntos mediante una línea obtenemos **la trayectoria** de la partícula.



¿Cómo podemos obtener la expresión matemática de la ecuación de la trayectoria?

El vector posición es: $\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

x(t), y(t), z(t) son las coordenadas de la posición de la partícula en función del tiempo.

$$\left.\begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{array}\right\}$$ Ecuaciones horarias del movimiento

Eliminando el parámetro tiempo, t, obtenemos una ecuación f=f(x,y,z) que constituye la ecuación de la trayectoria

Ejemplo: el vector posición de una partícula es: $\vec{r} = 2t\vec{i} + t\vec{j} + 3\vec{k}$

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = 2t \\ y(t) = t \\ z(t) = 3 \end{array}\right.$$

$y = t$ $\quad x = 2t = 2y$ Luego: $y = \frac{x}{2}$

La ecuación de la trayectoria es: $\left\{\begin{array}{l} y = \frac{x}{2} \\ z = 3 \end{array}\right.$

Se corresponde con una recta, y=x/2, que se encuentra en el plano z=3

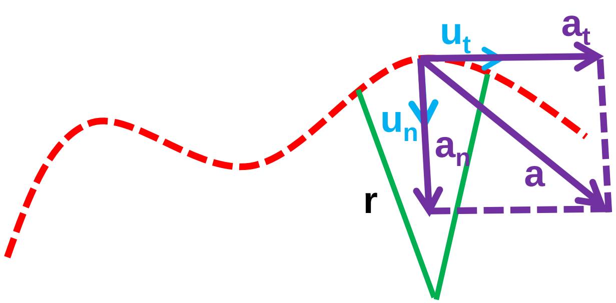
Ángel Muñoz Castellanos
Dpto. de Física

Componentes intrínsecas de la aceleración

Ya hemos visto que la velocidad es un vector cuya dirección es paralela a la tangente de la trayectoria en cada punto. La aceleración también es una magnitud vectorial. En coordenadas cartesianas la aceleración se expresa como:

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

¿Cuál es la dirección de la aceleración con respecto a la trayectoria de la partícula?



$$\vec{a} = a_t\vec{u}_t + a_n\vec{u}_n$$

El vector aceleración, en cada punto de la trayectoria, se descompone en dos componentes

La componente tangencial, **a_t**: es paralela a la tangente a la trayectoria

La componente normal, **a_n**: es perpendicular a la trayectoria. Dirigida hacia el interior de la curvatura de la trayectoria.

Nota importante: La aceleración da cuenta de cómo varía la velocidad en el tiempo. Al ser la velocidad un vector puede variar su módulo y/o su dirección:

La componente tangencial, **a_t**: da cuenta de cómo varía el **módulo** de la velocidad $a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$

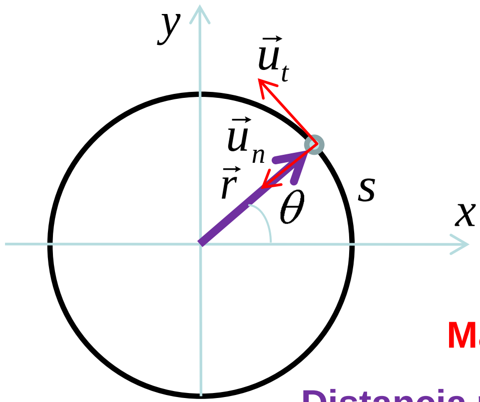
La componente normal, **a_n**: da cuenta de cómo varía la **dirección** de la velocidad $a_n = \frac{v^2}{r}$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{r}\vec{u}_n}$$

Ángel Muñoz Castellanos
Dpto. de Física

Movimiento circular

En un movimiento circular la trayectoria descrita por la partícula es una circunferencia



Si se utiliza un sistema de referencia cartesiano: se trataría de un movimiento en el plano, y necesitaríamos dos coordenadas: x e y

Sin embargo, la posición de la partícula a lo largo de su trayectoria puede determinarse sólo con el radio, r, y el desplazamiento angular θ.

$$x = r\cos\theta \qquad y = r sen\theta$$

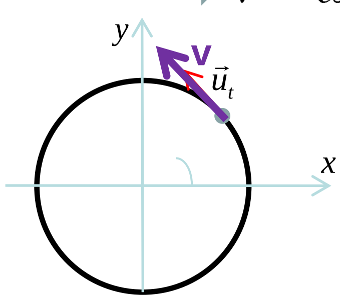
Magnitudes importantes en el movimiento circular:

Distancia recorrida sobre la trayectoria, s (arco de la circunferencia): $s = r\theta$ [s]=m [θ]=rad

Velocidad angular: $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ (rad/s) **Aceleración angular:** $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$ (rad/s²)

Velocidad de la partícula:

$$v = \omega r \Longrightarrow \vec{v} = \omega r \vec{u}_t$$

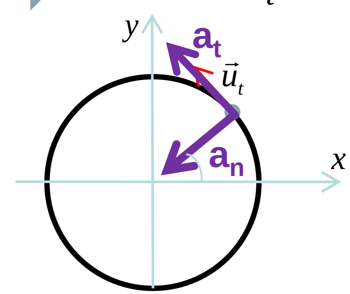


Aceleración de la partícula:

$$a_t = \alpha r$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

$$\Longrightarrow \vec{a} = \alpha r \vec{u}_t + \omega^2 r \vec{u}_n$$



Para saber más: [CINEMATICA]

Ángel Muñoz Castellanos
Dpto. de Física