

# Tema 1: Análisis Vectorial

1. **Campos escalares y vectoriales:** Campos escalares. Superficie equiescalar. Campos vectoriales. Líneas y tubos de campo.
  2. **Integrales sobre campos:** De línea. Circulación. De superficie. Flujo. De volumen.
  3. **Gradiente:** Derivada direccional. Definición de gradiente en coordenadas cartesianas. Interpretación geométrica y propiedades. Definición intrínseca. Componentes en distintos sistemas coordenados.
  4. **Divergencia:** Definición intrínseca. Expresión en distintos sistemas coordenados. Interpretación física. Teorema de la divergencia (Gauss-Ostrogradsky).
  5. **Rotacional:** Definiciones intrínsecas. Expresión en distintos sistemas coordenados. Interpretación física. Teorema de Stokes.
  6. **El operador nabla:** Propiedades. Aplicación doble sobre campos. Aplicación sobre productos de campos.
  7. **Diadas:** Definición y propiedades. Aplicaciones al cálculo diferencial.
  8. **Algunos teoremas integrales:** Teoremas de Green. Teorema del gradiente. Otros teoremas.
  9. **Ángulo sólido:** Definición y medida. Interpretación geométrica. Ángulo sólido subtendido por una superficie cerrada.
  10. **Función  $\delta$  de Dirac:** Definición. Distribuciones. Propiedades. Función  $\delta$  tridimensional. Aplicaciones físicas.
  11. **Campos irrotacionales:** definición y propiedades.
  12. **Campos solenoidales:** definición y propiedades.
  13. **Campos armónicos:** definición y propiedades.
  14. **Teorema de Helmholtz:** Enunciado y demostración. Fuentes escalares y vectoriales.
- 

## 1.1. Campos escalares y vectoriales

- Se define **campo escalar**,  $\varphi(\vec{r})$ , como una función de la posición que a cada punto del espacio asigna una magnitud escalar. La función debe ser *monovaluada* para que la magnitud pueda tener significado físico.

Ejemplos de campos escalares son la presión  $p$ , densidad  $\rho$  y temperatura  $T$  de un cuerpo, definidas en el espacio tridimensional. Otro ejemplo, ahora en dos dimensiones, es el de la altitud de un punto geográfico,  $h(x, y)$ , respecto del nivel del mar.

Una representación muy útil de un campo escalar se consigue mediante una familia de **superficies equiescalares**, definidas como el lugar geométrico de puntos que satisfacen la ecuación  $\varphi(x, y, z) = C$ , donde  $C$  es una constante que fija el valor considerado del campo escalar y que, al variar, nos genera la familia. Un ejemplo de representación mediante una familia de superficies equiescalares lo tenemos en los mapas topográficos que incluyen líneas de nivel, o altitud constante. En este caso bidimensional las superficies se sustituyen por líneas.

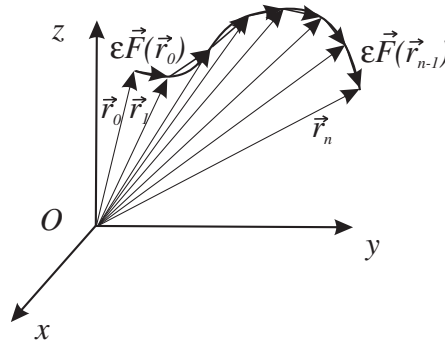
- Se define **campo vectorial**,  $\vec{F}(\vec{r})$ , como una función de la posición que a cada punto del espacio

asigna una magnitud vectorial. La función debe ser también *monovaluada* por la misma razón, pero además para que se trate de una magnitud vectorial debemos exigir que *sus componentes se transformen como las del vector de posición ante una transformación de coordenadas*.

El campo de velocidades de un fluido o el campo gravitatorio terrestre son campos vectoriales, pero la terna de campos escalares  $(p, \rho, T)$  no lo es.

Una forma habitual de representar un campo vectorial es mediante una familia de **líneas de campo**, que se definen como aquellas curvas que cumplen la condición de ser tangentes al campo en cada uno de sus puntos. Cada una de ellas se construye a partir de un punto inicial  $\vec{r}_0$  mediante la concatenación de vectores elementales dados por la expresión  $\Delta\vec{r}_{i+1} = \epsilon\vec{F}(\vec{r}_i)$ , ( $i = 0, 1, \dots$ ), donde el parámetro  $\epsilon$  se hace tender a cero. Las ecuaciones que determinan este lugar geométrico expresan simplemente la condición de paralelismo entre  $d\vec{r}$  y  $\vec{F}(\vec{r})$  en cada punto. En coordenadas cartesianas,

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z}.$$



También resulta útil a veces considerar el lugar geométrico de líneas de campo que se apoyan en una curva cerrada dada, lo cual constituye una superficie que se denomina **tubo de campo**. Un tubo de campo divide el espacio en dos regiones, una interior y otra exterior, de tal forma que líneas de campo que pertenecen a una región no pueden pasar a la otra (de otra forma el campo no sería monovaluado en el punto donde se produce la transición).

## 1.2. Integrales sobre campos: circulación y flujo

Sobre campos escalares y vectoriales se pueden definir **integrales de línea, de superficie y de volumen**. En particular conviene resaltar por su importancia la **circulación** de un campo vectorial a lo largo de un camino y su **flujo** a través de una superficie.

• **Circulación:** si  $\gamma$  representa una curva en el espacio que va del punto  $A$  al  $B$ , se denomina circulación del campo  $\vec{F}$  entre  $A$  y  $B$  a lo largo de  $\gamma$  a la expresión

$$\Gamma = \int_{A,\gamma}^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i,$$

siendo  $\Delta\vec{r}_i$  un elemento genérico de una partición de la curva  $\gamma$  en  $N$  segmentos orientados.

La curva  $\gamma$  puede ser conocida en función de un parámetro,  $\gamma : \{\vec{r} = \vec{r}(t), t \in (t_A, t_B)\}$ . En ese caso la integral de línea se reduce a una en  $t$  sustituyendo la dependencia  $\vec{r}(t)$  en  $\vec{F}(\vec{r})$  y escribiendo

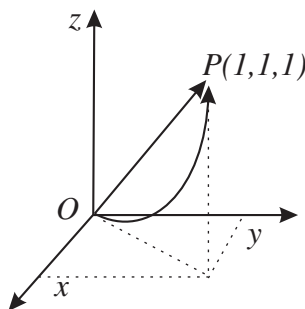
$d\vec{r} = (d\vec{r}/dt)dt$  (si la derivada existe):

$$\Gamma = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt.$$

Un ejemplo en el que interviene el concepto de circulación es el trabajo realizado por un campo de fuerza sobre una partícula móvil al describir una curva entre dos puntos.

---

**Ejemplo:** Dado el campo vectorial  $\vec{F} = x^2\vec{u}_x + 2yz\vec{u}_y + y^3\vec{u}_z$ , calcúlese su circulación entre los puntos  $O(0, 0, 0)$  y  $P(1, 1, 1)$  a través de dos caminos distintos: (a) la recta que pasa por ambos puntos, y (b) una parábola contenida en un plano vertical con vértice en  $O$ .



Una circulación elemental expresada en coordenadas cartesianas es  $d\Gamma = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$ . Debemos parametrizar convenientemente ambos recorridos:

(a) La recta que une  $O$  y  $P$  cumple  $x = y = z$  y por tanto  $dx = dy = dz$ . Tomando  $x$  como parámetro de integración podemos escribir  $\Gamma_{(a)} = \int_0^1 (x^2 dx + 2x^2 dx + x^3 dx) = 5/4$ .

(b) La parábola vertical con vértice en  $O$  que pasa por  $P$  es la intersección del plano  $x = y$  y el paraboloide  $z = (x^2 + y^2)/2$ . Tomando nuevamente  $x$  como parámetro de integración se tiene  $z = x^2$ ,  $dy = dx$  y  $dz = 2x dx$ . Por tanto,  $d\Gamma = x^2 dx + 2x^3 dx + 2x^4 dx$  y la integración en el intervalo  $0 \leq x \leq 1$  da  $\Gamma_{(b)} = 37/30$ . El resultado depende del camino de integración.

---

• **Flujo:** si  $S$  define una superficie en el espacio, se denomina flujo del campo vectorial  $\vec{F}$  a través de la superficie  $S$  a la expresión

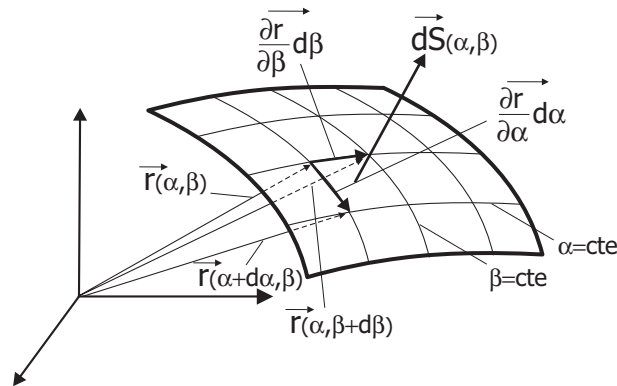
$$\Phi = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{S}_i,$$

siendo  $\Delta\vec{S}_i$  uno de los  $N$  elementos en que se divide la superficie  $S$ . El módulo de  $d\vec{S}$  corresponde al área del elemento de superficie y su dirección es la normal en ese punto. Existen dos posibles sentidos para el vector normal y debe ser especificado. Por ejemplo, si la superficie es cerrada el sentido que se toma por convención para los elementos de superficie es el saliente del volumen encerrado.

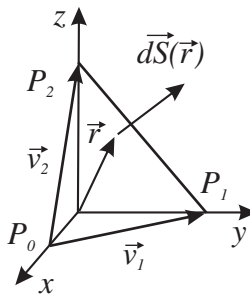
Si conocemos una parametrización de la superficie del tipo  $S : \{\vec{r} = \vec{r}(\alpha, \beta), \alpha \in (\alpha_1, \alpha_2), \beta \in (\beta_1, \beta_2)\}$ , podemos reducir la integral de superficie a dos integrales sucesivas en los dos parámetros,  $\alpha$  y  $\beta$ . Esto se consigue teniendo en cuenta que en cada punto podemos construir dos vectores,  $d\vec{r}_\alpha = (\partial\vec{r}/\partial\alpha)d\alpha$  y  $d\vec{r}_\beta = (\partial\vec{r}/\partial\beta)d\beta$ , en general no colineales y contenidos en la superficie. Su

producto vectorial en módulo nos da el área de un paralelogramo definido en la superficie, y su dirección es normal a ella (ver figura adjunta), por todo lo cual podemos escribir

$$d\vec{S} = \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \right) d\alpha d\beta.$$



**Ejemplo:** Evaluar el flujo del campo vectorial  $\vec{F} = x^2\vec{u}_x + 2yz\vec{u}_y + y^3\vec{u}_z$  a través de una superficie plana triangular cuyos vértices son los puntos  $P_0(1, 0, 0)$ ,  $P_1(0, 2, 0)$  y  $P_2(0, 0, 2)$ , con una orientación de la superficie según un vector que se aleja del origen.



Un flujo elemental se puede escribir

$$d\Phi = \vec{F} \cdot d\vec{S} = F_x dS_x + F_y dS_y + F_z dS_z.$$

Necesitamos parametrizar la superficie triangular y conocer las componentes cartesianas del elemento de superficie. La superficie puede describirse por la fórmula

$$\vec{r}(\alpha, \beta) = \vec{r}_0 + \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2,$$

donde  $\vec{r}_0 = \vec{OP}_0 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{v}_1 = \vec{P}_0\vec{P}_1 = (-1, 2, 0)$  y  $\vec{v}_2 = \vec{P}_0\vec{P}_2 = (-1, 0, 2)$ . Los vectores  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$  forman una base (no ortogonal) del espacio vectorial bidimensional asociado al plano que contiene nuestra superficie triangular. Los valores que toman los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  están comprendidos entre 0 y 1, pero además sujetos a la restricción  $\alpha \leq 1 - \beta$ . En efecto, en el espacio vectorial generado por la base  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  los límites del triángulo son:  $\alpha = 0, 0 \leq \beta \leq 1$  para el lado  $\vec{P}_0\vec{P}_2$ ;  $\beta = 0, 0 \leq \alpha \leq 1$  para el lado  $\vec{P}_0\vec{P}_1$ , y para el lado  $\vec{P}_1\vec{P}_2$  debemos imponer la condición

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \delta(\vec{v}_2 - \vec{v}_1),$$

con  $\delta$  otro parámetro auxiliar que define la posición en dicho segmento. Igualando componentes en ambos miembros según la base elegida resulta  $\alpha = 1 - \delta$ ;  $\beta = \delta$  y por tanto los valores límite cumplen  $\alpha = 1 - \beta$ .

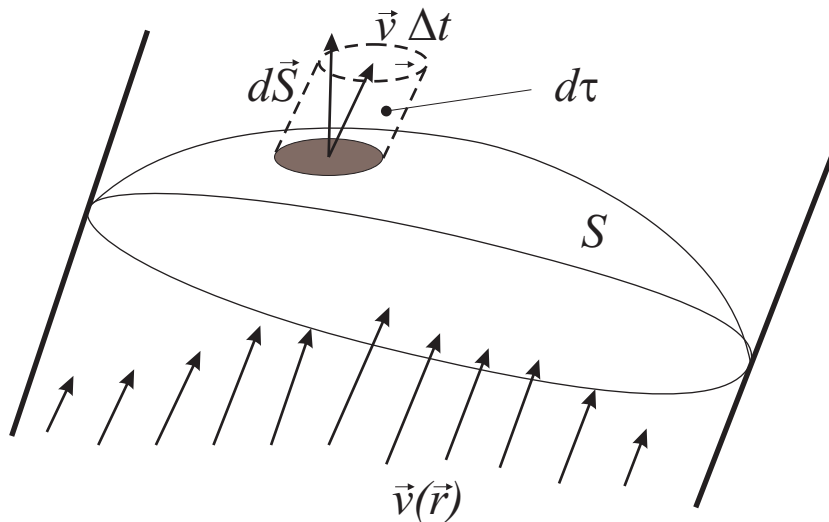
El siguiente paso es construir  $d\vec{S}$  según la fórmula dada.

$$d\vec{S} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 d\alpha d\beta = (4, 2, 2) d\alpha d\beta$$

A continuación debemos expresar las componentes cartesianas de  $\vec{F}$  en función de  $\alpha$  y  $\beta$  mediante las sustituciones  $(x, y, z) = (1, 0, 0) + \alpha(-1, 2, 0) + \beta(-1, 0, 2)$ . Finalmente se llega a una integral doble:

$$\Phi = \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\alpha [4(1 - \alpha - \beta)^2 + 2 \cdot 2(2\alpha)(2\beta) + 2(2\beta)^3] = 9/5.$$

Un ejemplo físico en el que se utiliza el concepto de flujo es el de una tubería por la que circula un fluido. El caudal, o volumen de fluido que atraviesa una sección de la tubería por unidad de tiempo,  $\Delta\tau/\Delta t$ , se puede expresar como el flujo del campo de velocidades  $\vec{v}(\vec{r})$  del fluido a través de la sección considerada  $S$ .



En efecto, si fijamos un intervalo de tiempo  $\Delta t$  las partículas de fluido recorren una distancia  $\vec{v}\Delta t$ , donde  $\vec{v}$  es la velocidad en un determinado punto. El volumen elemental de fluido que atraviesa una superficie elemental  $d\vec{S}$  tomada en un punto de la sección durante ese intervalo de tiempo es

$$d\tau = dSv\Delta t \cos \alpha,$$

donde  $\alpha$  es el ángulo que forman la base  $d\vec{S}$  y la generatriz  $\vec{v}\Delta t$  del cilindro inclinado que debemos considerar. En la expresión anterior podemos identificar el producto escalar  $dSv \cos \alpha = d\vec{S} \cdot \vec{v}$ . Si extendemos este cálculo a toda la sección obtenemos el volumen total de fluido que la atraviesa durante el intervalo  $\Delta t$ :

$$\Delta\tau = \Delta t \int_S d\vec{S} \cdot \vec{v}.$$

Dividiendo por el intervalo  $\Delta t$  encontramos en el primer miembro la definición de caudal y en el segundo su expresión en términos de un flujo. Hay que sobreentender en la notación que, en la integral,  $\vec{v} \cdot d\vec{S}$  realmente significa  $\vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}(\vec{r})$ .

- Las integrales de volumen se definen de forma análoga en el sentido de Riemann. Como ejemplo consideramos un campo escalar integrado sobre un volumen  $\tau$ :

$$\int_{\tau} \varphi d\tau = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \varphi(\vec{r}_i) d\tau_i,$$

donde  $d\tau_i$  es un elemento de una partición de  $\tau$  en  $N$  volúmenes elementales.

Otras integrales posibles, cuyos significados son ahora evidentes, son

$$\int_{A,\gamma}^B |\vec{F}| |d\vec{r}|, \quad \int_{A,\gamma}^B \varphi d\vec{r}, \quad \int_S \vec{F} dS, \quad \int_S \varphi d\vec{S}, \text{ etc,}$$

donde unas tienen carácter vectorial y otras escalar.

### 1.3. Gradiente

Se define la **derivada direccional** de un campo escalar  $\varphi(\vec{r})$  en la dirección del unitario  $\vec{v}$  como el cociente incremental

$$\frac{d\varphi}{ds} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(\vec{r} + \epsilon\vec{v}) - \varphi(\vec{r})}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \epsilon v_x, y + \epsilon v_y, z + \epsilon v_z) - \varphi(x, y, z)}{\epsilon},$$

donde  $(v_x, v_y, v_z)$  son las componentes cartesianas de  $\vec{v}$ .

La derivada direccional nos da la tasa de crecimiento en el valor de la magnitud  $\varphi$  por unidad de longitud en una dirección definida por  $\vec{v}$ . La notación usada (derivación respecto del parámetro  $s$ ) hace referencia justamente al arco elemental,  $ds \equiv |d\vec{r}|$ , recorrido para hacer el cálculo.

Podemos relacionar la derivada direccional con el concepto de derivada parcial, escribiendo

$$\begin{aligned} & \varphi(x + \epsilon v_x, y + \epsilon v_y, z + \epsilon v_z) - \varphi(x, y, z) = \\ & \varphi(x + \epsilon v_x, y + \epsilon v_y, z + \epsilon v_z) - \varphi(x, y + \epsilon v_y, z + \epsilon v_z) + \\ & \varphi(x, y + \epsilon v_y, z + \epsilon v_z) - \varphi(x, y, z + \epsilon v_z) + \\ & \varphi(x, y, z + \epsilon v_z) - \varphi(x, y, z), \end{aligned}$$

donde simplemente hemos sumado y restado al mismo tiempo términos convenientes; con ello, al dividir por  $\epsilon$ , obtenemos de la primera diferencia la derivada parcial respecto de  $x$ , tras multiplicar y dividir por  $v_x$  y tomar límite:

$$\begin{aligned} & \frac{\varphi(x + \epsilon v_x, y + \epsilon v_y, z + \epsilon v_z) - \varphi(x, y + \epsilon v_y, z + \epsilon v_z)}{\epsilon} \rightarrow \\ & \rightarrow v_x \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y + \epsilon v_y, z + \epsilon v_z) = v_x \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y, z). \end{aligned}$$

Llevando a cabo operaciones similares con las otras dos diferencias se llega a

$$\frac{d\varphi}{ds} = v_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + v_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \equiv \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} \varphi,$$

donde aparece la definición de **gradiente** del campo escalar en coordenadas cartesianas:

$$\vec{\text{grad}} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{u}_z.$$

El módulo de la derivada direccional se puede escribir  $|d\varphi/ds| = |\vec{\text{grad}} \varphi| \cos \alpha$ , con  $\alpha$  definido como el ángulo que forma el gradiente con el unitario  $\vec{v}$ . De aquí se deduce que *el gradiente es un campo vectorial cuyo módulo nos da el valor máximo que puede tomar una derivada direccional en cada punto y cuya dirección nos indica hacia dónde se produce la máxima variación de la función por unidad de longitud.*

El gradiente en un punto es *perpendicular a aquella superficie equiescalar que pase por dicho punto*. En efecto, si  $\vec{r}_0$  pertenece a la superficie  $\varphi(\vec{r}) = C$ , y pasamos a otro punto de esa superficie que esté infinitamente cercano mediante el desplazamiento  $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ , se tendrá

$$d\varphi = dx \frac{\partial \varphi}{\partial x} + dy \frac{\partial \varphi}{\partial y} + dz \frac{\partial \varphi}{\partial z} = d\vec{r} \cdot \vec{\text{grad}} \varphi.$$

Por la propia definición de superficie equiescalar,  $d\varphi = 0$  en este caso, y se concluye que ambos vectores son perpendiculares para cualquier desplazamiento elemental  $d\vec{r}$  que se realice en el plano tangente a la superficie en  $\vec{r}_0$ .

**Ejemplo:** Encuéntrese un vector unitario normal a una superficie esférica de radio  $R$ .

En general, si  $F(x, y, z) = 0$  es la forma implícita de expresar una superficie  $S$  y  $P(x_0, y_0, z_0)$  pertenece a  $S$ ,  $\vec{\text{grad}} F$  evaluado en  $P$  será un vector normal a  $S$  en dicho punto. Si dividimos por el módulo tendremos el unitario pedido.

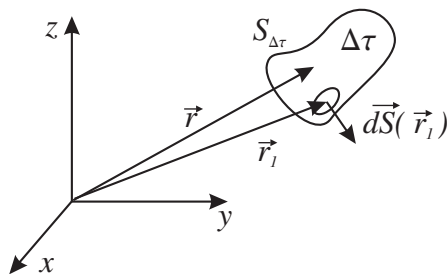
En el caso de la esfera se tiene  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$ , y  $\vec{\text{grad}} F = 2x\vec{u}_x + 2y\vec{u}_y + 2z\vec{u}_z$ . Dividiendo por  $|\vec{\text{grad}} F| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2R$  queda  $\vec{u} = (x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z)/R = \vec{r}/R$ , es decir, un vector radial.

### • Definición intrínseca de gradiente:

La representación anterior del gradiente está referida al sistema de coordenadas cartesianas. Una definición independiente del sistema de coordenadas utilizado es la siguiente:

$$\vec{\text{grad}} \varphi(\vec{r}) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} \oint_{S_{\Delta\tau}} \varphi(\vec{r}_1) d\vec{S}(\vec{r}_1),$$

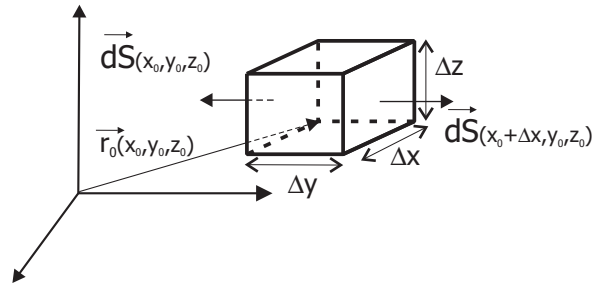
siendo  $\Delta\tau$  un volumen elemental que incluye al punto  $\vec{r}$  y sobre cuya frontera (la superficie cerrada denotada por  $S_{\Delta\tau}$  se realiza la integración.



En la figura se muestra (de manera exagerada) un recinto de integración y los distintos elementos geométricos que intervienen en la definición.

El límite debe existir independientemente de la forma que elijamos para el volumen  $\Delta\tau$ . En particular, si tomamos un volumen en forma de paralelepípedo con caras paralelas a los planos coordenados y aristas de longitudes  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  y  $\Delta z$  respectivamente, podemos comprobar que la definición intrínseca coincide con la dada originalmente, válida sólo en cartesianas.

**Ejercicio:** Compruébese la afirmación anterior.



La definición intrínseca de gradiente, aplicada a un volumen como el de la figura, genera seis integrales de superficie, una por cada cara del paralelepípedo. Consideraremos solamente dos de ellas, las sombreadas, que son perpendiculares al eje  $Ox$ . El elemento de superficie de la de la derecha ( $S(x_0 + \frac{1}{2}\Delta x)$ ) es  $d\vec{S} = dy dz \vec{u}_x$ , y su opuesto le corresponde a la de la izquierda ( $S(x_0 - \frac{1}{2}\Delta x)$ ). Teniendo en cuenta que el volumen  $\Delta\tau$  y las superficies se harán arbitrariamente pequeños en el paso al límite, podemos aproximar la integral de superficie por la función evaluada en el punto medio multiplicada por el área de la superficie, es decir

$$\int_{S(x_0 + \frac{1}{2}\Delta x)} \varphi(\vec{r}_1) d\vec{S}_1 \simeq \varphi(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0) \Delta y \Delta z \vec{u}_x.$$

Análogamente,

$$\int_{S(x_0 - \frac{1}{2}\Delta x)} \varphi(\vec{r}_1) d\vec{S}_1 \simeq \varphi(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0) \Delta y \Delta z (-\vec{u}_x).$$

La suma de ambas integrales, dividida por el volumen  $\Delta x \Delta y \Delta z$  da

$$\frac{1}{\Delta x} \left[ \varphi(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0) - \varphi(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0) \right] \vec{u}_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{u}_x,$$

que no es otra cosa que la componente del gradiente según la dirección  $Ox$ . Un tratamiento análogo de las otras cuatro caras completa el resultado adelantado.

## • Expresión del gradiente en otros sistemas coordenados ortogonales

Las coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  son una forma muy útil de describir la posición de un punto en el espacio, pero no la única. Existen infinidad de sistemas coordenados, constituidos por tres parámetros,  $(q_1, q_2, q_3)$ , que permiten igualmente dar una posición en el espacio. En particular son de especial interés por su simplicidad de manejo los sistemas coordenados llamados ortogonales, que tienen la propiedad de que las líneas obtenidas al variar cada uno de los tres parámetros a partir de un punto (líneas coordenadas) son perpendiculares entre sí en dicho punto.

La descripción de un sistema coordenado se realiza usualmente en relación a las coordenadas cartesianas, mediante las fórmulas de transformación  $q_1 = q_1(x, y, z)$ ,  $q_2 = q_2(x, y, z)$ ,  $q_3 = q_3(x, y, z)$  o bien sus inversas  $x = x(q_1, q_2, q_3)$ ,  $y = y(q_1, q_2, q_3)$ ,  $z = z(q_1, q_2, q_3)$ .

Una traslación elemental  $d\vec{r}$  de un punto a otro vecino puede ser descrita mediante un triedro construido localmente, cuyos vectores base varían de un punto a otro:

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 = h_1 dq_1 \vec{u}_1 + h_2 dq_2 \vec{u}_2 + h_3 dq_3 \vec{u}_3,$$



donde debemos definir los vectores unitarios de la base local  $\vec{u}_i$  y los factores geométricos  $h_i$  mediante

$$\vec{u}_i \equiv \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}, \quad h_i \equiv \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right|.$$

Estos vectores son ortogonales entre sí en un sistema ortogonal. Hay que tener siempre presente que en general la terna de vectores unitarios varía de un punto a otro, puesto que dependen de las coordenadas. En cambio el triedro local en el sistema de coordenadas cartesianas es invariante.

Para hallar el gradiente en otros sistemas coordenados ortogonales es conveniente usar la expresión  $d\varphi = \text{grad } \varphi \cdot d\vec{r}$ . En la base ortogonal  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  definida en cada punto del espacio el gradiente tiene componentes  $\{(\text{grad } \varphi)_1, (\text{grad } \varphi)_2, (\text{grad } \varphi)_3\}$ . Si efectuamos el producto escalar y lo igualamos al desarrollo del diferencial de  $\varphi$  como función de las variables  $q_i$ ,

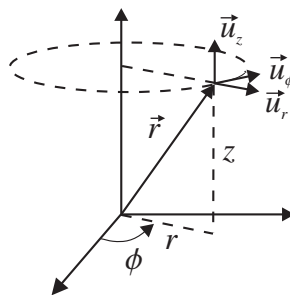
$$d\varphi = dq_1 \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + dq_2 \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + dq_3 \frac{\partial \varphi}{\partial q_3},$$

se llega a la fórmula:

$$\boxed{(\text{grad } \varphi)_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}}.$$

Los sistemas coordenados ortogonales más usuales son las **coordenadas cilíndricas** y las **coordenadas esféricas**.

• **Coordenadas cilíndricas:**



Su relación con las coordenadas cartesianas son

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \\ y &= r \sin \phi \\ z &= z \end{aligned}$$

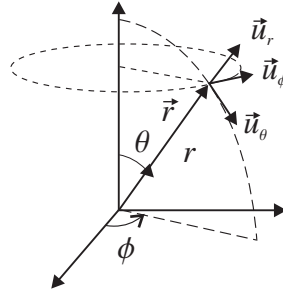
A partir de las definiciones de los factores geométricos  $h_i$  se tiene

$$h_r = 1, \quad h_\phi = r, \quad h_z = 1.$$

El gradiente resulta

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \vec{u}_\phi + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{u}_z.$$

- **Coordenadas esféricas:**



Su relación con las coordenadas cartesianas son

$$\begin{aligned}x &= r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \\y &= r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \\z &= r \cos \theta\end{aligned}$$

Los factores geométricos son en este caso

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\phi = r \operatorname{sen} \theta,$$

y el gradiente,

$$\vec{\operatorname{grad}} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \vec{u}_\phi.$$

## 1.4. Divergencia

Otra operación básica, esta vez definida sobre campos vectoriales, es la divergencia, cuya **definición intrínseca** es

$$\operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} \oint_{S_{\Delta\tau}} \vec{F}(\vec{r}_1) \cdot d\vec{S}(\vec{r}_1),$$

donde los símbolos usados y las condiciones que deben imponerse en el cálculo del límite son las mismas que en el caso del gradiente. Se trata de un operador diferencial, puesto que en la definición aparece el cociente incremental  $\Delta\Phi/\Delta\tau$  (flujo a través de la frontera de  $\Delta\tau$  dividido por el volumen).

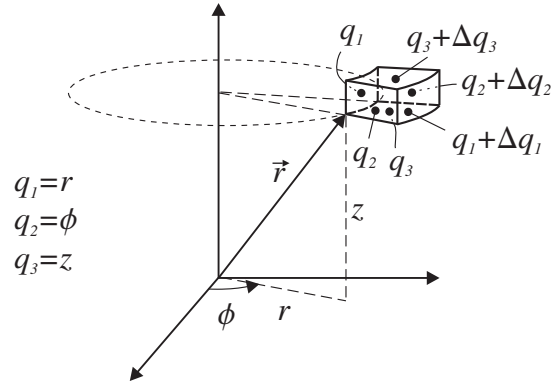
La **interpretación física** de la divergencia se hace a veces por analogía con el campo de velocidades en un fluido incompresible: las líneas de dicho campo que tienden a salir o *divergir* de un punto ponen de manifiesto la presencia de una fuente, y en tal caso el resultado del cálculo de la divergencia en dicho punto es no nulo. Por ello se la suele llamar **densidad volumétrica de fuentes**.

La representación de la divergencia en **coordenadas cartesianas** se puede encontrar cómodamente haciendo uso de la definición intrínseca de gradiente:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} \oint_{S_{\Delta\tau}} (\vec{u}_x F_x + \vec{u}_y F_y + \vec{u}_z F_z) \cdot d\vec{S} =$$

$$\begin{aligned}
&= \vec{u}_x \cdot \left( \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} \oint_{S_{\Delta\tau}} F_x d\vec{S} \right) + \vec{u}_y \cdot \left( \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} \oint_{S_{\Delta\tau}} F_y d\vec{S} \right) + \vec{u}_z \cdot \left( \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} \oint_{S_{\Delta\tau}} F_z d\vec{S} \right) = \\
&= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.
\end{aligned}$$

El cálculo de la divergencia en **otros sistemas coordenados ortogonales**, tales como el cilíndrico o el esférico, no puede hacerse de la misma forma, puesto que los unitarios  $\vec{u}_i$  son en general dependientes de las coordenadas  $\{q_1, q_2, q_3\}$ .



Si elegimos un volumen elemental limitado por superficies coordenadas, es decir por seis caras que quedan definidas por los valores  $q_i$  y  $q_i + \Delta q_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), la definición intrínseca de la divergencia hace intervenir elementos de superficie correspondientes a cada superficie coordenada. Como ejemplo, la superficie definida por un valor constante  $q_1 + \Delta q_1$  sería

$$d\vec{S} = \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \right) dq_2 dq_3 = h_2 h_3 (\vec{u}_2 \times \vec{u}_3) dq_2 dq_3 = h_2 h_3 dq_2 dq_3 \vec{u}_1,$$

y lo opuesto para la superficie en  $q_1$ . Expresiones análogas obtenemos para los otros elementos de superficie. El campo vectorial tiene componentes  $\{F_1, F_2, F_3\}$  en el triedro ortogonal  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ . El flujo a través de la superficie elemental definida en  $q_1 + \Delta q_1$  queda

$$\Phi(q_1 + \Delta q_1) = dq_2 dq_3 (F_1 h_2 h_3)_{(q_1 + \Delta q_1, q_2, q_3)}.$$

Si agrupamos los seis flujos en tres parejas del tipo

$$\Phi(q_1 + \Delta q_1) + \Phi(q_1) = dq_2 dq_3 \left[ (F_1 h_2 h_3)_{(q_1 + \Delta q_1, q_2, q_3)} - (F_1 h_2 h_3)_{(q_1, q_2, q_3)} \right],$$

y análogamente para las otras coordenadas  $q_2$  y  $q_3$ , y dividimos por el volumen elemental en coordenadas curvilíneas  $d\tau = (h_1 dq_1)(h_2 dq_2)(h_3 dq_3) = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$ , se llega a la expresión general

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{h_1 h_2 h_3}{h_i} F_i \right)}.$$

Los últimos pasos son sencillos y se dejan al lector.

**Ejercicio:** Obténganse las expresiones de la divergencia en coordenadas cilíndricas y esféricas.

• **Teorema de la divergencia:** Un resultado importante dentro del Análisis Vectorial es el siguiente teorema, también llamado de Gauss-Ostrogradsky:

Dado un campo vectorial  $\vec{F}$  y un volumen arbitrario  $\tau$ , se verifica

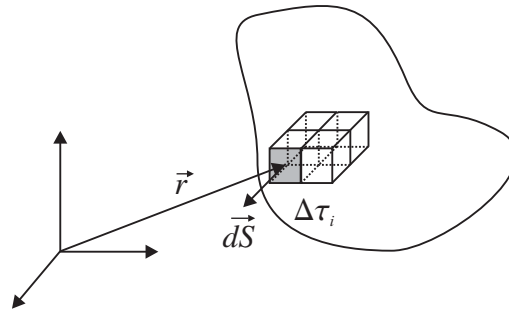
$$\int_{\tau} \operatorname{div} \vec{F} d\tau = \oint_{S_{\tau}} \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

siendo  $S_{\tau}$  la superficie cerrada que es frontera del volumen considerado.

La demostración puede construirse a partir del cálculo de la integral de volumen como suma riemanniana y usando la definición de divergencia:

$$\int_{\tau} \operatorname{div} \vec{F} d\tau = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{\Delta\tau_i} \oint_{S_{\Delta\tau_i}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} \right) \Delta\tau_i,$$

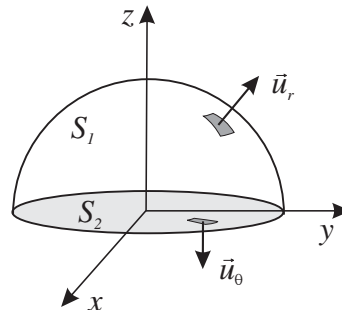
donde se ha realizado una partición en  $N$  volúmenes elementales.



La suma de flujos involucrada en la expresión anterior se reduce a los flujos definidos en superficies pertenecientes a la frontera de  $\tau$ , puesto que los de superficies interiores a  $\tau$  se cancelan al ser comunes a dos volúmenes contiguos. Los flujos que no se cancelan están definidos justamente en una partición de la superficie  $S_{\tau}$  y por tanto se identifica la integral de superficie del enunciado.

---

**Ejemplo:** Compruébese que se verifica el teorema de la divergencia en el caso de la función  $\vec{v} = r \cos \theta \vec{u}_r + r \operatorname{sen} \theta \vec{u}_{\theta} + r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \vec{u}_{\phi}$  usando como volumen de integración el hemisferio  $\tau : \{r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$ .



La fórmula para la divergencia en coordenadas esféricas es:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\operatorname{sen} \theta v_{\theta}) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial v_{\phi}}{\partial \phi}$$

y en este caso su aplicación da

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \cos \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin^2 \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (r \sin \theta \cos \phi) = 5 \cos \theta - \sin \phi.$$

La integral de volumen resulta

$$\int_{\tau} \operatorname{div} \vec{v} d\tau = \int_0^R dr r^2 \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi (5 \cos \theta - \sin \phi) = \frac{5\pi R^3}{3}.$$

Calculamos ahora el flujo  $\Phi_1$  a través de la superficie hemisférica  $S_1$ , definida por el valor  $r = R$  y cuyo elemento de superficie es  $d\vec{S} = R^2 \sin \theta d\theta d\phi \vec{u}_r$ :

$$\Phi_1 = \int_{S_1} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} v_r dS_r = R^3 \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \pi R^3.$$

Por último calculamos el flujo  $\Phi_2$  a través del plano ecuatorial  $S_2$ , definido por el valor  $\theta = \pi/2$  y con elemento de superficie descrito por  $d\vec{S} = r dr d\phi \vec{u}_\theta$ :

$$\Phi_2 = \int_{S_2} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} v_\theta dS_\theta = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r^2 dr = \frac{2\pi R^3}{3}.$$

El flujo total es  $\Phi_1 + \Phi_2 = 5\pi R^3/3$  y ambos cálculos coinciden.

## 1.5. Rotacional

También como operador que actúa sobre campos vectoriales, el rotacional tiene la siguiente **definición intrínseca**:

$$\vec{\operatorname{rot}} \vec{F}(\vec{r}) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} \oint_{S_{\Delta\tau}} d\vec{S}(\vec{r}_1) \times \vec{F}(\vec{r}_1),$$

donde los símbolos y condiciones son los habituales. Se trata de otro importante operador de carácter diferencial, cuya aplicación nos da un nuevo campo vectorial a partir de  $\vec{F}$ .

Aunque la definición anterior es la análoga a las vistas para el gradiente y la divergencia, resulta más cómoda de usar otra equivalente:

$$\vec{a} \cdot \vec{\operatorname{rot}} \vec{F}(\vec{r}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_{\gamma_{\Delta S}} \vec{F}(\vec{r}_1) \cdot d\vec{r}_1,$$

siendo  $\vec{a}$  un vector unitario arbitrario,  $\Delta S$  una superficie elemental plana perpendicular al vector  $\vec{a}$  y  $\gamma_{\Delta S}$  la curva cerrada que es frontera de  $\Delta S$ . El punto donde se calcula el rotacional debe pertenecer a la superficie y el límite debe existir sea cual sea la familia de superficies  $\Delta S$  utilizada.

La segunda definición nos da solamente la componente del rotacional en la dirección de  $\vec{a}$ , pero basta tomar tres direcciones ortogonales entre sí para reconstruir el rotacional en ese punto.

**Ejercicio:** Compruébese que la primera definición de rotacional conduce a la segunda.

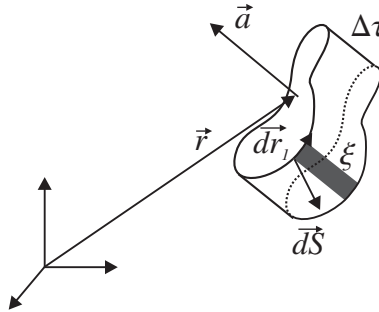
Multiplicamos escalarmente la primera expresión por  $\vec{a}$ , tomando como volumen elemental el cilindro recto con base  $\Delta S$  y altura  $\xi$ . Esto da

$$\vec{a} \cdot \vec{\operatorname{rot}} \vec{F} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\xi \Delta S} \oint_{S_{\Delta\tau}} \vec{a} \cdot (d\vec{S} \times \vec{F}).$$

El integrando se puede reescribir como  $(\vec{a} \times d\vec{S}) \cdot \vec{F}$ . La superficie cerrada  $S_{\Delta\tau}$  posee dos bases planas paralelas y una superficie lateral. En las bases el integrando es nulo por ser  $\vec{a}$  y  $d\vec{S}$  paralelos. Queda la integración sobre la superficie lateral, para la cual podemos a su vez transformar el integrando en

$$(\vec{a} \times d\vec{S}) \cdot \vec{F} = \xi d\vec{r}_1 \cdot \vec{F}(\vec{r}_1),$$

puesto que el módulo del producto vectorial es  $\xi dr_1$  y la dirección es tangente al contorno de  $\Delta S$ . En la figura se muestra la construcción geométrica utilizada. Hay que hacer notar que el sentido de  $\vec{a}$  determina el sentido de circulación de la integral de línea mediante la **regla de la mano derecha**: el pulgar indica el sentido de  $\vec{a}$  si los cuatro dedos restantes indican el sentido de  $d\vec{r}_1$ .



El factor  $\xi$  se cancela en la integral y se obtiene la segunda definición.

El mismo ejemplo físico del campo de velocidades de un fluido nos permite hacernos una idea del significado del rotacional. En torno al centro de un torbellino, la circulación presente en la segunda definición del rotacional es no nula debido a la trayectoria que tienen las líneas de campo en esa zona. Podemos así interpretar un rotacional no nulo como indicio de un giro **local** de las líneas de campo. Sin embargo otras situaciones en las que dicho rotacional es no nulo no poseen una relación tan evidente con un giro local (por ejemplo el campo  $\vec{F} = ky\vec{u}_x$ ), y viceversa: campos cuyas líneas son familias de circunferencias centradas en un eje tienen rotacional nulo (como el campo  $\vec{F} = \vec{u}_\phi/r$ ).

El cálculo del rotacional en **coordenadas cartesianas** se puede realizar, como en el caso de la divergencia, relacionando la primera definición de rotacional con la definición intrínseca de gradiente. El resultado se expresa en forma compacta mediante un determinante:

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}.$$

El uso de cualquiera de las definiciones de rotacional aplicadas a un sistema de **coordenadas curvilíneas ortogonales** permite obtener la siguiente expresión general:

$$\text{rot } \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{u}_1 & h_2 \vec{u}_2 & h_3 \vec{u}_3 \\ \partial/\partial q_1 & \partial/\partial q_2 & \partial/\partial q_3 \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix}.$$

### Ejercicios:

- (1) Dedúzcase la expresión anterior componente a componente mediante la segunda definición de rotacional.
- (2) Obténgase el rotacional en coordenadas cilíndricas y esféricas.

• **Teorema de Stokes:** dado un campo vectorial  $\vec{F}$  y una superficie  $S$ , se verifica

$$\boxed{\int_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_{\gamma_S} \vec{F} \cdot d\vec{r}},$$

siendo  $\gamma_S$  la línea cerrada que es frontera de  $S$ , recorrida según la regla de la mano derecha en relación a la orientación de los elementos de superficie.

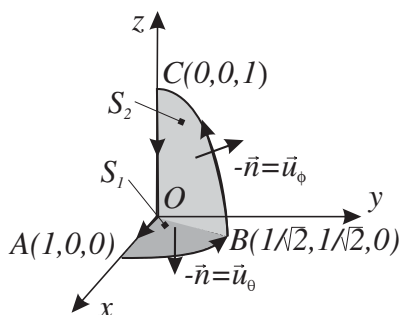
La demostración se realiza de forma muy similar a la del teorema de la divergencia. Escribimos la integral de superficie según su definición, incluyendo la segunda de rotacional:

$$\int \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N (\text{rot } \vec{F})_i \cdot \vec{n}_i \Delta S_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{\Delta S_i} \oint_{\gamma \Delta S_i} \vec{F} \cdot d\vec{r} \right) \Delta S_i.$$

En lo anterior hemos trabajado con una partición de  $S$  en  $N$  superficies elementales  $\Delta S_i$ . Tras cancelar este factor la expresión se reduce a una suma de circulaciones elementales a lo largo de los contornos  $\gamma \Delta S_i$ , en los cuales podemos distinguir tramos que pertenecen a la frontera de  $S$  y tramos interiores. Las circulaciones sobre tramos interiores se cancelan entre sí puesto que dos elementos contiguos producen circulaciones opuestas en el tramo común. Lo que sobrevive no es otra cosa que la circulación sobre una partición de  $\gamma_S$ , que da lugar a la integral de la derecha en el teorema.

Hay que hacer notar que el sentido de circulación del contorno viene dado por la regla de la mano derecha debido que este criterio se había establecido en la segunda definición de rotacional.

**Ejemplo:** Compruébese que se verifica el teorema de Stokes en el caso de la función  $\vec{v} = r \cos^2 \theta \vec{u}_r - r \cos \theta \sin \theta \vec{u}_\theta + 3r \vec{u}_\phi$  usando como circuito de integración la línea indicada en la figura.



Hallaremos primero la circulación del campo  $\vec{v}$  usando coordenadas esféricas. En general escribimos un desplazamiento elemental en la forma

$$d\vec{r} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\phi \vec{u}_\phi.$$

La circulación se calcula por tramos:

(i) Tramo  $OA$ , que viene descrito por los valores  $\theta = \pi/2$ ,  $\phi = 0$  y  $0 < r < 1$ . Se cumple  $d\vec{r} = dr \vec{u}_r$ .

$$\Gamma_{OA} = \int_O^A v_r \Big|_{\theta=\pi/2, \phi=0} dr = 0,$$

puesto que  $v_r = 0$  para  $\theta = \pi/2$ .

(ii) Tramo  $AB$ , descrito por  $\theta = \pi/2$ ,  $r = 1$  y  $0 < \phi < \pi/4$ . Se tiene  $d\vec{r} = d\phi \vec{u}_\phi$ .

$$\Gamma_{AB} = \int_A^B v_\phi \Big|_{\theta=\pi/2, r=1} d\phi = 3 \int_0^{\pi/4} d\phi = 3\pi/4.$$

(iii) Tramo  $BC$ , descrito por  $\phi = \pi/4$ ,  $r = 1$  y  $0 < \theta < \pi/2$ . Se tiene  $d\vec{r} = d\theta \vec{u}_\theta$ .

$$\Gamma_{BC} = \int_B^C v_\theta \Big|_{\phi=\pi/4}^{r=1} d\theta = - \int_{\pi/2}^0 \cos\theta \operatorname{sen}\theta d\theta = 1/2.$$

(iv) Tramo  $CO$ , con  $\theta = 0$ ,  $\phi$  indeterminado y  $0 < r < 1$ . Igual que en el primer tramo  $d\vec{r} = dr \vec{u}_r$ .

$$\Gamma_{CO} = \int_C^O v_r \Big|_{\theta=0} dr = \int_1^0 r dr = -1/2.$$

La circulación total es  $\Gamma = 0 + 3\pi/4 + 1/2 - 1/2 = 3\pi/4$ .

La fórmula para el rotacional en coordenadas esféricas es:

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta} \begin{vmatrix} \vec{u}_r & r \vec{u}_\theta & r \operatorname{sen}\theta \vec{u}_\phi \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\theta & \partial/\partial\phi \\ v_r & rv_\theta & r \operatorname{sen}\theta v_\phi \end{vmatrix}$$

y en este caso su aplicación da

$$\operatorname{rot} \vec{v} = 3 \cot\theta \vec{u}_r - 6\vec{u}_\theta.$$

Para aplicar el teorema de Stokes podemos elegir cualquier superficie que se apoye en el contorno dado. En este caso lo más sencillo es tomar las dos superficies planas que aparecen sombreadas en la figura ( $S = S_1 \cup S_2$ ). Los elementos de superficie deben estar orientados de acuerdo con la regla de la mano derecha.

Evaluamos el flujo del rotacional en cada superficie plana:

$$\int_{S_1} \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{S} = - \int_{S_1} (\operatorname{rot} \vec{v})_\theta dS_\theta = 6 \int_{S_1} dS = \frac{6\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}.$$

Por otra parte,  $\int_{S_2} \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{S} = - \int_{S_2} (\operatorname{rot} \vec{v})_\phi dS_\phi = 0$ , puesto que el rotacional no tiene componente según  $\vec{u}_\phi$ .

En consecuencia ambos cálculos coinciden.

## 1.6. Operador nabla

En las operaciones gradiente, divergencia y rotacional expresadas en cartesianas aparece de forma natural el **operador nabla**, definido como

$$\vec{\nabla} = \vec{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Tiene carácter vectorial y diferencial a la vez. De lo visto hasta ahora se pueden proponer las siguientes representaciones:

$$\vec{\operatorname{grad}} \varphi = \vec{\nabla} \varphi, \quad \operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}, \quad \operatorname{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}.$$

Podemos considerar algunas identidades vectoriales útiles que surgen bien de la aplicación dos veces de nabla sobre un campo, bien de su aplicación sobre el producto de dos campos. La deducción de cualquiera de ellas puede hacerse, no sin esfuerzo en algunos casos, desarrollando en cartesianas ambos miembros de la igualdad y viendo que coinciden.

### • Aplicación de nabla sobre un producto:

$$\vec{\nabla}(\varphi \psi) = \varphi \vec{\nabla} \psi + \psi \vec{\nabla} \varphi,$$



$$\vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{F}) = \varphi \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + (\vec{\nabla} \varphi) \cdot \vec{F},$$

$$\vec{\nabla} \times (\varphi \vec{F}) = \varphi \vec{\nabla} \times \vec{F} + (\vec{\nabla} \varphi) \times \vec{F},$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{G} - \vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{G}),$$

$$\vec{\nabla}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = \vec{F} \times (\vec{\nabla} \times \vec{G}) + (\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{G} + \vec{G} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) + (\vec{G} \cdot \vec{\nabla})\vec{F},$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{F}(\vec{\nabla} \cdot \vec{G}) - (\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{G} - \vec{G}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) + (\vec{G} \cdot \vec{\nabla})\vec{F},$$

donde  $\varphi$  y  $\psi$  son dos campos escalares y  $\vec{F}$  y  $\vec{G}$  son dos campos vectoriales. Además se define el nuevo operador escalar

$$\vec{F} \cdot \vec{\nabla} = F_x \frac{\partial}{\partial x} + F_y \frac{\partial}{\partial y} + F_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

• **Aplicación doble de nabla:**

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) = 0,$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0,$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) = \nabla^2 \varphi,$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F},$$

donde aparece un nuevo operador escalar, el **laplaciano**, definido en cartesianas mediante la expresión

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Este operador es fundamental en la teoría del potencial.

Mientras que las dos primeras igualdades son resultados, las dos últimas se deben considerar como definiciones de la aplicación del operador laplaciano (sobre escalares y vectores respectivamente) en otros sistemas coordenados. En particular de las operaciones de gradiente y divergencia se deduce la expresión

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \right).$$

**Ejercicios:**

- (1) Demostrar la primera igualdad calculando el flujo de  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi)$  a través de cualquier superficie.
- (2) Demostrar la segunda igualdad calculando la integral de volumen de  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F})$  extendida a un volumen arbitrario.
- (3) Obtener el laplaciano en coordenadas cilíndricas y esféricas.

## 1.7. Diadas

• **Definición y propiedades**

Además del producto escalar entre dos vectores, que da lugar a un escalar, y de su producto vectorial, que puede considerarse otro vector (aunque esto debe matizarse debido a sus propiedades

de transformación frente a una simetría especular; véase por ejemplo Lorrain & Corson), existe un tercer producto entre dos vectores, que da lugar a otro ente matemático. Para definirlo nos valdremos de la representación cartesiana de los vectores,  $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$  y  $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ . El **producto diádico** de ambos se representa mediante una matriz  $3 \times 3$ :

$$\vec{A}\vec{B} = \begin{pmatrix} A_x B_x & A_x B_y & A_x B_z \\ A_y B_x & A_y B_y & A_y B_z \\ A_z B_x & A_z B_y & A_z B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} (B_x, B_y, B_z).$$

El producto diádico de dos vectores, o diada, posee la propiedad distributiva, pero no la conmutativa, es decir,  $\vec{A}\vec{B} \neq \vec{B}\vec{A}$ . Su transformación ante un cambio de sistema de referencia viene dictado por la transformación de los vectores constituyentes, y gracias a ello resulta tener carácter tensorial. Como todo tensor, cuya representación cartesiana es una matriz  $3 \times 3$ , podemos considerar su aplicación por la izquierda o por la derecha sobre un vector  $\vec{C}$ , pero por su propia construcción, el resultado de ambas operaciones se puede expresar de forma muy sencilla:

$$(\vec{A}\vec{B})\vec{C} = \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C}); \quad \vec{C}(\vec{A}\vec{B}) = (\vec{C} \cdot \vec{A})\vec{B}.$$

Es decir, el vector contiguo a  $\vec{C}$  se contrae con éste mediante un producto escalar, y el resultado es un vector colineal con el que no se ha contraído. Todo esto puede comprobarse a partir de las correspondientes representaciones matriciales. Si una magnitud física de naturaleza tensorial puede ser representada por una diada podemos beneficiarnos de la simplicidad de las reglas de aplicación anteriores.

No todos los tensores son diadas, aunque sí es cierto que todo tensor puede ser expresado como combinación lineal de una base formada por las nueve diadas  $\{(\vec{u}_i \vec{u}_j), i, j = x, y, z\}$ . En particular, el tensor unidad se puede expresar como

$$\mathcal{I} = \vec{u}_x \vec{u}_x + \vec{u}_y \vec{u}_y + \vec{u}_z \vec{u}_z.$$

### • Aplicación al cálculo diferencial

El operador nabla puede intervenir en una representación diádica de un tensor. En particular podemos definir el **gradiente de un vector** como

$$\vec{\nabla}\vec{A} = \begin{pmatrix} \partial A_x / \partial x & \partial A_x / \partial y & \partial A_x / \partial z \\ \partial A_y / \partial x & \partial A_y / \partial y & \partial A_y / \partial z \\ \partial A_z / \partial x & \partial A_z / \partial y & \partial A_z / \partial z \end{pmatrix}.$$

Es interesante hacer notar que  $\vec{\nabla}\vec{r} = \mathcal{I}$ .

Otra aplicación importante es la divergencia de una diada:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A}\vec{B}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})\vec{B} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B},$$

donde la aparición de dos términos obedece al hecho de que nabla tiene carácter diferencial y está operando sobre un producto.

## 1.8. Teoremas integrales

Además de los teoremas de la divergencia y de Stokes existen otros teoremas que involucran integrales de campos. Veamos algunos:

- **Teoremas de Green:**

$$\oint_{S_\tau} (\psi \vec{\nabla} \varphi) \cdot d\vec{S} = \int_\tau (\psi \nabla^2 \varphi + \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \varphi) d\tau.$$

$$\oint_{S_\tau} (\psi \vec{\nabla} \varphi - \varphi \vec{\nabla} \psi) \cdot d\vec{S} = \int_\tau (\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi) d\tau.$$

El primer teorema se obtiene aplicando el teorema de la divergencia a la integral de superficie y el segundo es consecuencia directa del primero. Tienen una aplicación práctica notable en la formulación del método de resolución de problemas de potencial mediante la llamada función de Green.

- **Teorema del gradiente:**

$$\oint_{S_\tau} \varphi d\vec{S} = \int_\tau \vec{\nabla} \varphi d\tau.$$

Se demuestra de manera análoga al teorema de la divergencia usando la definición intrínseca de gradiente.

- **Teorema del rotacional:**

$$\oint_{S_\tau} d\vec{S} \times \vec{F} = \int_\tau \vec{\nabla} \times \vec{F} d\tau.$$

Se demuestra de manera análoga al teorema de la divergencia usando la primera definición intrínseca de rotacional.

- Otro teorema es el siguiente:

$$\oint_{\gamma_S} \varphi d\vec{r} = \int_S d\vec{S} \times \vec{\nabla} \varphi$$

Su demostración se construye multiplicando escalarmente la integral de línea por un vector constante  $\vec{a}$ , que puede incluirse en el integrando. La integral se transforma en una circulación a lo largo de una trayectoria cerrada y estamos en condiciones de aplicar el teorema de Stokes. Tras manipular el nuevo integrando, y teniendo en cuenta que  $\vec{a}$  es arbitrario, se deduce el resultado.

- Finalmente mencionaremos el teorema de la divergencia para tensores. Si trabajamos en cartesianas y expresamos un tensor en la base diádica podemos escribir su divergencia en la forma

$$\vec{\nabla} \cdot \mathcal{T} = \sum_{i=1}^3 \vec{u}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \sum_{j,k=1}^3 \vec{u}_j \vec{u}_k \mathcal{T}_{jk}.$$

Teniendo en cuenta que en esta expresión debemos "contraer" los vectores unitarios contiguos,  $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \delta_{ij}$ , con  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$  y cero en otro caso (delta de Kronecker), resulta

$$\vec{\nabla} \cdot \mathcal{T} = \sum_{i,j,k=1}^3 \delta_{ij} \frac{\partial \mathcal{T}_{jk}}{\partial x_i} \vec{u}_k = \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial \mathcal{T}_{ik}}{\partial x_i} \vec{u}_k.$$

En vista de ello podemos establecer el siguiente teorema:

$$\int_\tau \vec{\nabla} \cdot \mathcal{T} d\tau = \sum_{k=1}^3 \vec{u}_k \int_\tau \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{T}_{ik}}{\partial x_i} d\tau = \sum_{k=1}^3 \vec{u}_k \oint_{S_\tau} \sum_{i=1}^3 dS_i \mathcal{T}_{ik} = \oint_{S_\tau} d\vec{S} \cdot \mathcal{T},$$

donde el paso fundamental ha consistido en aplicar el teorema de la divergencia a cada una de las tres integrales de volumen que aparecen en la expresión integral de partida, puesto que para  $k$

fijado, las magnitudes  $T_{ik}$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) pueden manejarse como las tres componentes cartesianas de un campo vectorial cuya divergencia aparece en la segunda expresión.

Si el tensor es una diada el teorema se reduce a

$$\int_{\tau} \vec{\nabla} \cdot (\vec{A}\vec{B})d\tau = \oint_{S_{\tau}} (d\vec{S} \cdot \vec{A})\vec{B}.$$

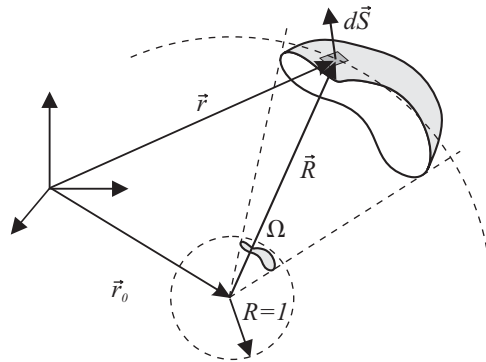
## 1.9. Ángulo sólido

El ángulo sólido es un concepto geométrico que da una idea cuantitativa de la apertura con que se ve desde un punto una superficie determinada. Puede considerarse como el análogo tridimensional de lo que representa un ángulo en el plano (apertura con que se ve un arco desde un punto); de ahí su nombre.

Se define el **ángulo sólido** subtendido por una superficie  $S$  desde un punto  $\vec{r}_0$  mediante la siguiente expresión:

$$\Omega(\vec{r}_0, S) = \int_S \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot d\vec{S}(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3},$$

donde es necesario especificar el sentido elegido para los elementos de superficie  $d\vec{S}$ . Evidentemente para el sentido opuesto (simbolizado por  $-S$ ) se tendrá  $\Omega(\vec{r}_0, -S) = -\Omega(\vec{r}_0, S)$ . La unidad es el **estereorradián** y no tiene dimensiones.



• **Interpretación geométrica:** En función del vector  $\vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{r}_0$  podemos escribir el integrando en la forma  $\vec{u}_R \cdot d\vec{S}/R^2$ , siendo  $R$  el módulo del vector posición relativa de un punto de la superficie al punto definido por  $\vec{r}_0$  (ver figura) y  $\vec{u}_R = \vec{R}/R$ . Por otra parte  $\vec{u}_R \cdot d\vec{S}$  representa la proyección de un elemento de la superficie sobre el plano tangente a una esfera de radio  $R$  con centro en  $\vec{r}_0$ , definido en el punto  $\vec{r}$ . El factor  $1/R^2$  adicional en el integrando nos permite relacionar esta superficie proyectada con una superficie definida en la esfera de radio unidad mediante una homotecia con centro en  $\vec{r}_0$ . Dicho de manera ilustrativa, el ángulo sólido se puede entender como el área mínima de un obstáculo situado en la esfera de radio unidad dispuesto de tal forma que un foco luminoso puntual en  $\vec{r}_0$  no ilumina ningún punto de la superficie  $S$ .

Es interesante obtener el ángulo sólido correspondiente a una superficie elemental definida sobre una esfera de radio  $R$ , subtendido desde el centro, cuando dicha superficie está delimitada por líneas coordenadas en esféricas. En tal caso sabemos que  $\vec{u}_R \cdot d\vec{S} = dS = R^2 \sin\theta d\theta d\phi$  y por tanto  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ . En este caso el carácter angular del ángulo sólido queda patente.

• **Propiedades:**

(1)  $\Omega(\vec{r}_0, S_\tau) = 0$  si  $\vec{r}_0 \notin \tau$ .

La demostración hace uso del teorema de la divergencia:

$$\Omega(\vec{r}_0, S_\tau) = \int_{S_\tau} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot d\vec{S}(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} = \int_\tau \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{R}}{R^3} \right) d\tau.$$

Pero  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{R}/R^3) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}_R/R^2)$ , que calculado en coordenadas esféricas  $\{R, \theta, \phi\}$  resulta ser

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{u}_R}{R^2} \right) = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{1}{R^2} \right) = 0 \quad \text{si } R \neq 0.$$

(2)  $\Omega(\vec{r}_0, S_\tau) = 4\pi$  si  $\vec{r}_0 \in \tau$ .

La demostración es inmediata si tenemos en cuenta que el ángulo sólido con que se ve una superficie cerrada desde un punto interior es equivalente al de una esfera de radio unidad desde su centro, que es obviamente  $4\pi$ .

(3)  $\Omega(\vec{r}_0, S_1) = \Omega(\vec{r}_0, S_2)$  si  $\gamma_{S_1} = \gamma_{S_2}$ .

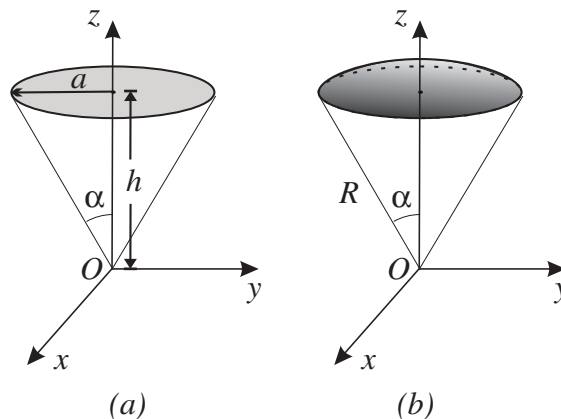
Esta propiedad se deduce de la primera teniendo en cuenta que en el caso topológicamente más simple  $S_1 \cup (-S_2) = S$  forma una superficie cerrada con vector normal saliente (o entrante) y  $\vec{r}_0$  es un punto exterior. Por tanto

$$\Omega(\vec{r}_0, S) = \Omega(\vec{r}_0, S_1) - \Omega(\vec{r}_0, S_2) = 0.$$

Si la unión de ambas superficies deja dentro al punto  $\vec{r}_0$  el resultado sería  $\Omega(\vec{r}_0, S_2) = \Omega(\vec{r}_0, S_1) - 4\pi$ . Podemos imaginar situaciones más complicadas que requieren un análisis topológico más detallado, pero no las consideraremos aquí por simplicidad.

---

**Ejemplo:** Hállese el ángulo sólido subtendido por un disco de radio  $a$  desde un punto del eje perpendicular que pasa por su centro, situado a una distancia  $h$  de dicho centro.



En la figura (a) se muestra una elección de coordenadas adecuadas al problema, siendo  $O$  (origen) el punto desde el que se subtiende el ángulo sólido. Podemos escribir

$$\Omega(\vec{r}_0, S) = \int_S \frac{\vec{R}}{R^3} \cdot d\vec{S},$$

donde  $\vec{r}_0 = \vec{0}$  y en polares es  $\vec{R} = r\vec{u}_r + h\vec{u}_z$  y  $d\vec{S} = r dr d\phi \vec{u}_z$ . Sustituyendo encontramos

$$\Omega(\vec{r}_0, S) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a \frac{hrdr}{(h^2 + r^2)^{3/2}} = 2\pi \left( 1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + a^2}} \right).$$

En función del ángulo  $\alpha$  definido entre el eje  $Z$  y un segmento que una el origen con cualquier punto de la circunferencia podemos presentar el resultado anterior en la forma  $\Omega = 2\pi(1 - \cos \alpha)$ . Claramente se entienden así los siguientes casos: (i) punto de observación infinitamente alejado,  $\alpha = 0$  y  $\Omega = 0$ ; (ii) punto de observación en el mismo plano,  $\alpha = \pi/2$  y  $\Omega = 2\pi$ , es decir el ángulo sólido correspondiente a un semiespacio.

Otra forma de calcular  $\Omega$  en este problema es sustituir la superficie plana por otra en forma de casquete esférico, que también se apoya en su contorno circular pero que forma parte de la superficie esférica de radio  $R = \sqrt{h^2 + a^2}$  (figura (b)). Se deja como ejercicio comprobar que ambos cálculos coinciden.

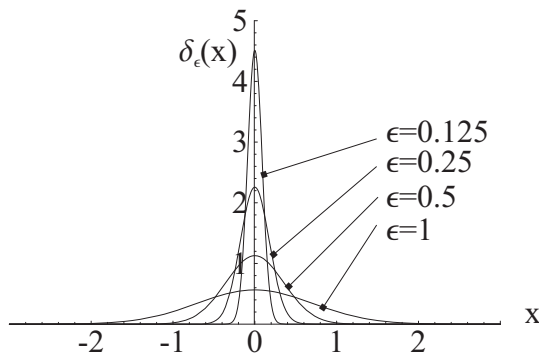
## 1.10. Función $\delta$ de Dirac

Se define la función  $\delta$  de Dirac a partir de las siguientes propiedades:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ \infty & \text{si } x = 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Aunque se usa el término “función”, no lo es en el sentido usual, sino que se trata de una generalización de este concepto. Debe considerarse como una **distribución**, o límite de una sucesión de funciones dependientes de un parámetro. Como ejemplo de sucesión que da lugar a la distribución  $\delta(x)$  proponemos:

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon}} e^{-x^2/\epsilon^2}.$$



Se trata de la familia de gaussianas de anchura proporcional al parámetro  $\epsilon$  que se hace tender a cero. Puede comprobarse que para cualquier valor del parámetro la función está normalizada de tal manera que la integral extendida a toda la recta real vale la unidad, de acuerdo con la propiedad exigida.

Otras familias de funciones que dan lugar a la función  $\delta(x)$  cuando el parámetro tiende a cero son

$$\frac{\epsilon \operatorname{sen}^2(x/\epsilon)}{\pi x^2} \quad \text{y} \quad \frac{\epsilon}{\pi x^2 + \epsilon^2}.$$

A partir de las propiedades vistas es inmediato deducir una expresión de gran utilidad:

$$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)dx = \begin{cases} f(x_0) & \text{si } x_0 \in (a, b) \\ 0 & \text{si } x_0 \notin [a, b] \end{cases}$$

(si  $x_0$  coincide con  $a$  ó  $b$  el resultado es  $f(x_0)/2$ ).

### Ejercicios:

- (1) Demuéstrese lo anterior.
- (2) Demuéstrese que  $\delta(kx) = \delta(x)/|k|$ .

### Ejemplos:

- (a)  $\int_0^{\pi/2} \cos 2x\delta(x+3)dx = 0$ , porque la función  $\delta(x+3)$  sólo es distinta de cero en  $x = -3$ , que está fuera del intervalo de integración.
- (b)  $\int_{-1}^3 \ln x\delta(x-2)dx = \ln 2$
- (c)  $\int_0^1 x^3 \cos x\delta(4x-3)dx = \frac{1}{4} \int_0^1 x^3 \cos x\delta(x-3/4)dx = (3/4)^3 \cos(3/4)/4$

### • Caso tridimensional.

Podemos generalizar el concepto de función  $\delta$  al caso tridimensional mediante la definición:

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z).$$

También podemos generalizar la propiedad vista:

$$\int_{\tau} f(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)d\tau = \begin{cases} f(\vec{r}_0) & \text{si } \vec{r}_0 \in \tau \\ 0 & \text{si } \vec{r}_0 \notin \tau \end{cases}$$

(si  $\vec{r}_0 \in S_{\tau}$  el resultado es  $f(\vec{r}_0)/2$ ).

Un resultado importante que involucra a la función  $\delta$  es el siguiente:

$$\boxed{\nabla^2 \left( \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} \right) = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}_0).}$$

En efecto, la función de la izquierda es singular en  $\vec{r} = \vec{r}_0$  y cero en  $\vec{r} \neq \vec{r}_0$  (compruébese). Además se tiene que

$$\int_{\tau} \nabla^2 \left( \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} \right) d\tau = - \int_{\tau} \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3} \right) d\tau = - \oint_{S_{\tau}} \frac{(\vec{r}-\vec{r}_0) \cdot d\vec{S}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3} = -\Omega(\vec{r}_0, S_{\tau}) = -4\pi,$$

con lo cual se verifican todas las propiedades que definen a la función de la derecha. (En rigor el teorema de la divergencia no es aplicable si la función es singular en el dominio de integración. Sin embargo es posible sustituir la del texto por otra no singular dependiente de un parámetro que en cierto límite tienda a la original. Véase Panofsky & Phillips, "Classical Electricity and Magnetism", Addison-Wesley (1977), cap. 1.)

La función  $\delta$  tiene una extraordinaria utilidad dentro del desarrollo teórico de la asignatura. Como ejemplo de uso, consideremos una distribución de  $n$  masas puntuales  $m_i$  colocadas en los puntos  $\vec{r}_i$ . Podemos construir la densidad volumétrica de masa en todo el espacio simplemente como

$$\rho_m(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n m_i \delta(\vec{r}-\vec{r}_i).$$

## 1.11. Campos irrotacionales

Se definen como aquellos que verifican  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ .

Los campos irrotacionales tienen las siguientes propiedades:

- (1)  $\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ ,
- (2)  $\int_{\vec{r}_A, \gamma_1}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_A, \gamma_2}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ,
- (3)  $\vec{F} = -\vec{\nabla}\varphi$ .

La primera propiedad es inmediata al aplicar el teorema de Stokes. La segunda (independencia del camino de circulación) es una forma equivalente de expresar la primera. Por último la tercera (existencia de una función potencial) se deduce de la independencia del camino puesto que pone de manifiesto la existencia de una función escalar monovaluada que podemos construir como

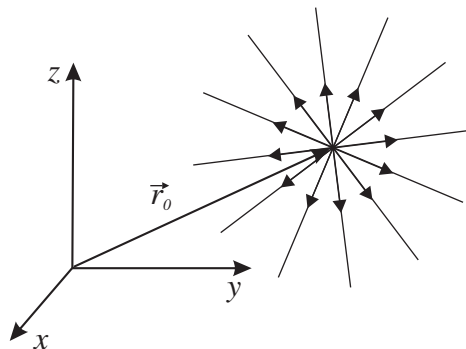
$$\varphi(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

siendo  $\vec{r}_0$  un punto de referencia arbitrario. En particular, para un camino elemental  $d\vec{r}$  se tendrá  $d\varphi = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$ . Pero el diferencial se construye como  $d\varphi = \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{r}$ , y de ahí la propiedad propuesta.

Puede demostrarse que cualquiera de las propiedades anteriores es equivalente a la condición de irrotacionalidad y serviría como definición.

### Ejemplo:

Demuéstrase que un campo de fuerzas central es irrotacional. Obténgase la función potencial del campo gravitatorio terrestre.



Un campo central está descrito matemáticamente por funciones del tipo  $\vec{F}(\vec{r}) = F(|\vec{R}|)\vec{u}_R$  con  $\vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{r}_0$ ,  $\vec{r}_0$  el vector de posición del llamado *centro de fuerzas* y  $\vec{u}_R$  un vector unitario en la dirección de  $\vec{R}$ . Las líneas de campo son por tanto rectas que nacen o mueren en el centro de fuerzas, respecto del cual, además, existe simetría radial. Podemos usar coordenadas esféricas con origen en el punto  $\vec{r}_0$ . Si evaluamos el rotacional de  $\vec{F}$  tenemos

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{R^2 \text{sen}\theta} \begin{vmatrix} \vec{u}_R & R\vec{u}_\theta & R\text{sen}\theta\vec{u}_\phi \\ \partial/\partial R & \partial/\partial\theta & \partial/\partial\phi \\ F(R) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

El campo gravitatorio terrestre produce una fuerza sobre una masa puntual (o lo que es lo mismo, no demasiado extensa en relación a la Tierra) descrita por

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{GM_T m}{r^2} \vec{u}_r,$$



usando como origen de coordenadas el centro de la Tierra, que es el centro de fuerzas de este campo central.  $G$  es la constante de gravitación y  $M_T$  y  $m$  son las masas de la Tierra y el cuerpo en cuestión, respectivamente.

Una función potencial se puede obtener mediante el cálculo de la circulación desde un punto de referencia, que tomaremos arbitrariamente y designaremos por la posición  $\vec{r}_A$ , a lo largo de un camino también arbitrario:

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -GM_T m \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}} \frac{\vec{r} \cdot d\vec{r}}{r^3}.$$

Como  $2\vec{r} \cdot d\vec{r} = d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = d(r^2) = 2rdr$ , el integrando es una diferencial exacta (y de hecho por eso nos da igual el camino elegido) y resulta

$$\varphi(\vec{r}) = -GM_T m \left( \frac{-1}{r} \right)_{r_A}^r = GM_T m \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_A} \right).$$

El potencial encontrado tiene el significado físico de *trabajo realizado por el campo de fuerzas durante el trayecto entre ambos puntos*. Por ser independiente de dicho trayecto, el campo se denomina conservativo. Es habitual en estos casos definir una energía potencial  $U(\vec{r})$  como el trabajo que debemos realizar *nosotros en contra del campo* partiendo de un punto en el infinito. El cálculo de este nuevo trabajo difiere en el signo y se particulariza  $1/r_A = 0$ , con lo cual  $U(\vec{r}) = -GM_T m/r$ .

## 1.12. Campos solenoidales

Se definen como aquellos que verifican  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$ .

Los campos solenoidales tienen las siguientes propiedades:

- (1)  $\oint_{S_\tau} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$ ,
- (2)  $\int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}$ , si  $\gamma_{S_1} = \gamma_{S_2}$
- (3) El flujo de  $\vec{F}$  es constante a lo largo de un tubo de campo.
- (4)  $\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ .

La primera propiedad se demuestra aplicando el teorema de la divergencia a la integral de superficie. La segunda es inmediata a partir de la primera.

Para demostrar la tercera propiedad debemos construir una superficie cerrada con una porción de tubo de campo, denotada por  $S_{\text{tubo}}$  y dos secciones arbitrarias del mismo, que llamaremos  $-S_1$  y  $S_2$  (el signo alude al sentido saliente de los elementos de superficie); el flujo a través de  $-S_1 \cup S_2 \cup S_{\text{tubo}}$  es cero al aplicar el teorema de la divergencia; pero de los tres flujos el que pasa a través de la superficie del tubo es cero puesto que el campo es perpendicular a los elementos de superficie; queda por tanto  $-\phi_1 + \phi_2 = 0$  y queda demostrado que el flujo se conserva a través de cualquier sección del tubo.

La cuarta propiedad es más laboriosa de demostrar. Es claro que si existe un campo vectorial  $\vec{A}$  tal que  $\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , entonces  $\vec{F}$  es solenoidal. En cambio para probar la afirmación recíproca debemos encontrar una expresión de  $\vec{A}$  en función de  $\vec{F}$ . Esto es posible y puede ser consultado por ejemplo en "Campos Electromagnéticos", M. Rodríguez y otros.

### Ejemplo:

¿Bajo qué condiciones un campo central puede ser solenoidal?

Seguindo la nomenclatura del ejemplo anterior, imponemos la condición  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$ , con  $\vec{F} = F(R)\vec{u}_R$ , es decir,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} [R^2 F(R)] = 0.$$

Salvo en el centro de fuerzas, lo anterior se cumple si y sólo si

$$R^2 F(R) = C,$$

siendo  $C$  una constante. En conclusión, el campo será solenoidal si y sólo si su módulo depende como  $1/R^2$  de la distancia al centro de fuerzas.

### 1.13. Campos armónicos

Son campos escalares que verifican la **ecuación de Laplace** en una región  $\tau$  del espacio:

$$\boxed{\nabla^2 \varphi = 0.}$$

#### • Propiedades:

1. *Teorema del valor medio:*

$$\varphi(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_{S_{\text{esf}}(R)} \varphi(\vec{r}) dS(\vec{r}),$$

donde la superficie de integración es una esfera de radio  $R$  centrada en el punto  $\vec{r}_0$ .

Para demostrarlo usaremos coordenadas esféricas con origen en  $\vec{r}_0$ . Construyamos una integral nula definida sobre el volumen esférico de radio  $r$ ,

$$0 = \int_{\tau(r)} \nabla^2 \varphi d\tau = \oint_{S(r)} \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{S} = \oint_{S(r)} r^2 d\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial r}.$$

El factor  $r^2$  no nulo puede salir de la integral, que resulta ser nula. Si la integramos a todo valor del radio entre cero y  $R$  el resultado seguirá siendo nulo. Por tanto

$$0 = \int_0^R dr \oint d\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \oint d\Omega \int_0^R dr \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \oint [\varphi(R, \theta, \phi) - \varphi(0, \theta, \phi)] d\Omega.$$

El segundo término dentro del corchete es  $\varphi(\vec{r}_0)$ , valor constante que quedará multiplicado por  $4\pi$ . Multiplicando toda la expresión por  $R^2$  se demuestra el teorema.

2. *Una función armónica en un volumen  $\tau$  no tiene máximos ni mínimos en dicha región.*

Supongamos que  $\varphi$  es armónica en  $\tau$  y tiene un máximo en  $\vec{r}_0 \in \tau$ . En tal caso existe una bola de radio  $\epsilon$ , centrada en ese punto,  $B(\epsilon, \vec{r}_0) \in \tau$ , tal que todos sus elementos cumplen la condición de máximo  $\varphi(\vec{r}) < \varphi(\vec{r}_0)$ . Se tiene entonces

$$\oint_{S[B(\epsilon, \vec{r}_0)]} \varphi(\vec{r}) dS < \oint_{S[B(\epsilon, \vec{r}_0)]} \varphi(\vec{r}_0) dS = 4\pi\epsilon^2 \varphi(\vec{r}_0),$$

lo cual está en contradicción con el teorema del valor medio (aquí  $S[B(\epsilon, \vec{r})]$  es la superficie que delimita la bola  $B(\epsilon, \vec{r})$ ). El caso de un mínimo es totalmente análogo.

3. *Si una función armónica en un volumen  $\tau$  es constante en su frontera, lo es en todo  $\tau$ .*

Esta propiedad es consecuencia de la anterior, puesto que si es constante en la frontera, para dejar de serlo en un punto interior debe haber al menos un máximo o un mínimo, lo cual no es posible.

4. Si en cada punto de la frontera de una región  $\tau$  donde  $\varphi$  es armónica, es conocida  $\varphi$  o su derivada normal,  $\vec{n} \cdot \vec{\nabla}\varphi$ , entonces  $\varphi$  está unívocamente determinada en  $\tau$ , salvo una constante aditiva.

Esta propiedad es un teorema de unicidad para la resolución de la ecuación de Laplace bajo condiciones de contorno impuestas sobre la función.

La demostración parte de la suposición de que haya dos soluciones al problema,  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ , que cumplen las mismas condiciones de contorno. Si construimos la función  $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$ , ésta resulta ser trivialmente armónica, y sujeta a condiciones de contorno homogéneas, es decir,  $\psi = 0$  o  $\vec{n} \cdot \vec{\nabla}\psi = 0$  en  $S_\tau$ . Se tiene entonces

$$0 = \oint_{S_\tau} \psi \vec{\nabla}\psi \cdot d\vec{S} = \int_\tau \vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{\nabla}\psi) d\tau = \int_\tau (\psi \nabla^2 \psi - |\vec{\nabla}\psi|^2) d\tau.$$

El primer término del integrando es nulo por ser  $\psi$  armónica y por tanto  $|\vec{\nabla}\psi|^2 = 0$ , ya que la integral de una función definida positiva sólo puede ser cero si lo es la función en todo punto. Si el módulo del gradiente es nulo, lo es el propio gradiente y en consecuencia  $\psi = \text{cte}$ . Las funciones  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  difieren a lo sumo en una constante, que será cero si en algún punto del contorno se establece el primer tipo de condición, es decir, sobre la propia función.

## 1.14. Teorema de Helmholtz

Supongamos que la divergencia de un campo vectorial  $\vec{F}$  es una función escalar determinada,  $\rho$ :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \rho$$

y el rotacional de  $\vec{F}$ , una función vectorial determinada,  $\vec{c}$ :

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{c}$$

(donde, lógicamente,  $\vec{c}$  debe ser solenoidal,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{c} = 0$ , pues la divergencia del rotacional es nula). ¿Podríamos con estos datos determinar  $\vec{F}$ ? Nos encontramos que:

- i) si la información es insuficiente, podría haber más de una solución al problema,
- ii) si la información es excesiva, porque se contradiga, la solución puede no existir.

### • Analogía algebraica

Antes de responder al problema anterior, nos plantearemos un problema algebraico muy similar.

Dado un vector  $\vec{r}$  desconocido, un vector  $\vec{a}$  conocido, y supuestos también datos conocidos los valores  $b$  y  $\vec{c}$ :

$$\vec{a} \cdot \vec{r} = b; \quad \vec{a} \times \vec{r} = \vec{c}$$

¿podremos hallar  $\vec{r}$ ? Aunque tenemos tres incógnitas  $(x, y, z)$  y cuatro ecuaciones, el problema no está sobrecondicionado, como veremos a continuación. Calculemos, en primer lugar,

$$\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{r}) = (\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{a} - a^2 \vec{r} = b \vec{a} - a^2 \vec{r} = \vec{a} \times \vec{c} \quad \rightarrow \vec{r} = \frac{(b \vec{a} - \vec{a} \times \vec{c})}{a^2}$$

La solución es posible porque la expresión  $\vec{a} \times \vec{r} = \vec{c}$  no equivale a tres ecuaciones independientes. En efecto, si elegimos un sistema de referencia, tal que  $\vec{a} = a\vec{u}_z$ , entonces,

$$\vec{a} \times \vec{r} = -a y \vec{u}_x + x a \vec{u}_y = c_x \vec{u}_x + c_y \vec{u}_y + c_z \vec{u}_z \quad \rightarrow \quad -a y = c_x, \quad a x = c_y, \quad c_z = 0.$$

Se observa que tenemos dos ecuaciones sobre  $\vec{r}$  y una condición sobre  $\vec{c}$ .

Con el teorema de Helmholtz sucede algo análogo, si hacemos corresponder:

$$\vec{a} \rightarrow \vec{\nabla}, \quad \vec{r} \rightarrow \vec{F}$$

El sistema de ecuaciones diferenciales no está sobrecondicionado, porque

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{c} \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{c} = 0$$

### • Enunciado del teorema:

El sistema

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \vec{c}, \quad \text{con } \vec{\nabla} \cdot \vec{c} = 0 \end{aligned}$$

definido en todo el espacio, con las condiciones:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \rho(\vec{r}) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \vec{c}(\vec{r}) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \vec{F}(\vec{r}) = 0$$

tiene *solución única* determinada por:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} \varphi + \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

con

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_{esp} \frac{\rho(\vec{r}_1) d\tau_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \quad \text{y} \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{esp} \frac{\vec{c}(\vec{r}_1) d\tau_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}$$

donde las integrales se extienden a todo el espacio.

Denominamos a  $\rho$  **fuentes escalares** del campo y a  $\vec{c}$ , **fuentes vectoriales**.  $\varphi$  es el potencial escalar y  $\vec{A}$ , el potencial vector.

**Nota:** Las condiciones sobre  $\rho$  y  $\vec{c}$  cuando  $r \rightarrow \infty$  aseguran la existencia de las integrales que definen  $\varphi$  y  $\vec{A}$ .

### Demostración:

#### 1. El campo propuesto es solución

Calculemos, en primer lugar, el valor de  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ .

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\vec{\nabla}^2 \varphi,$$

$$-\vec{\nabla}^2 \varphi = \frac{1}{4\pi} \int_{esp} \nabla^2 \left( \frac{\rho(\vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \right) d\tau_1$$

porque  $\nabla^2$  actúa sobre  $\vec{r}$  y se integra sobre  $\vec{r}_1$ . Como  $\rho(\vec{r}_1)$  **no** depende de  $\vec{r}$ , tenemos:

$$\nabla^2 \left( \frac{\rho(\vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \right) = \rho(\vec{r}_1) \nabla^2 \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \right) = -\rho(\vec{r}_1) 4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}_1).$$

Por tanto,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{4\pi} \int_{esp} 4\pi \rho(\vec{r}_1) \delta(\vec{r} - \vec{r}_1) d\tau_1 = \rho(\vec{r})$$

Calculemos, a continuación,  $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ :

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla} \varphi) + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}.$$

Analicemos los dos términos por separado:

$$-\nabla^2 \vec{A} = \vec{u}_x(-\nabla^2 A_x) + \vec{u}_y(-\nabla^2 A_y) + \vec{u}_z(-\nabla^2 A_z)$$

y, por analogía con  $-\nabla^2 \varphi$ , se deduce que:

$$-\nabla^2 \vec{A} = \vec{u}_x c_x + \vec{u}_y c_y + \vec{u}_z c_z = \vec{c}.$$

Se concluye demostrando que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ :

$$4\pi \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \int_{esp} \frac{\vec{c}(\vec{r}_1) d\tau_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} = \int_{esp} \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{c}(\vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \right) d\tau_1 = \int_{esp} \vec{c}(\vec{r}_1) \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \right) d\tau_1.$$

Por otro lado,

$$\vec{\nabla} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \right) = -\vec{\nabla}_1 \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \right)$$

y, como,

$$\vec{\nabla}_1 \cdot \left( \frac{\vec{c}(\vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \right) = \vec{c} \cdot \vec{\nabla}_1 \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \right) + \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \right) \vec{\nabla}_1 \cdot \vec{c}(\vec{r}_1)$$

y, al establecerse en las condiciones propuestas que

$$\vec{\nabla}_1 \cdot \vec{c}(\vec{r}_1) = 0$$

se tiene que

$$\vec{\nabla}_1 \cdot \left( \frac{\vec{c}(\vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \right) = \vec{c} \cdot \vec{\nabla}_1 \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \right).$$

Luego sustituyendo resulta:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{4\pi} \int_{esp} \vec{\nabla}_1 \cdot \left( \frac{\vec{c}(\vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \right) d\tau_1$$

Aplicando a esta última expresión el teorema de la divergencia, resulta que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \oint_{S(R)} \frac{\vec{c}(\vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \cdot d\vec{S}_1$$

donde  $S(R)$  es una superficie esférica, cuyo radio hacemos crecer para abarcar todo el espacio. Por la condición

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^2 \vec{c}(\vec{r}) = 0$$

y, teniendo en cuenta que

$$\frac{\vec{c}(\vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \cdot d\vec{S} \simeq \frac{|\vec{c}|}{R} R^2$$

vemos que la integral se anula.

## 2. La solución es única

Sean  $\vec{F}_1$  y  $\vec{F}_2$  dos soluciones posibles. Construimos la función  $\vec{G} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$ , que verificará:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = 0 \quad \text{y} \quad \vec{\nabla} \times \vec{G} = 0$$

Por tanto,  $\vec{G} = -\vec{\nabla}\psi$  y  $\nabla^2\psi = 0$ , por lo que  $\psi$  es un campo armónico.

Por otra parte, de las condiciones del teorema,  $\vec{G}$  tiende a cero, cuando  $r$  tiende a infinito, y por tanto  $\vec{\nabla}\psi \rightarrow 0$ . Por la cuarta propiedad de las funciones armónicas, la única solución es  $\psi = \text{cte}$ , por lo que  $\vec{G} = -\vec{\nabla}\psi = 0$ , lo que implica que

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2.$$

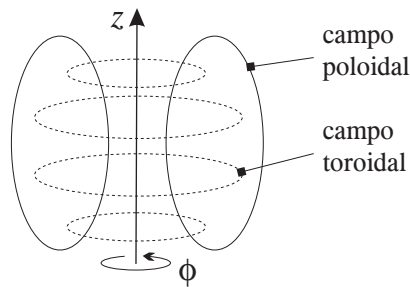
### Ejemplo:

Se denomina campo vectorial toroidal a aquel que posee simetría respecto de un eje y sus líneas de campo son circunferencias en torno a dicho eje. Igualmente se define campo poloidal a aquel que también posee simetría axial y *no* tiene componente acimutal (es decir, en la dirección de  $\vec{u}_\phi$ ). Demostrar que un campo solenoidal cuyas fuentes vectoriales son poloidales resulta ser toroidal, y que, recíprocamente, si sus fuentes vectoriales son toroidales, resulta ser poloidal.

Utilizando coordenadas cilíndricas, las definiciones de campo toroidal y poloidal se expresan

$$\begin{array}{ll} \text{Campo toroidal} & \vec{c} = c(r, z)\vec{u}_\phi(\phi) \\ \text{Campo poloidal} & \vec{c} = c_r(r, z)\vec{u}_r(\phi) + c_z(r, z)\vec{u}_z \end{array}$$

Las líneas de campo de estos tipos de campo vectorial se indican en la figura siguiente



Consideremos un campo vectorial solenoidal  $\vec{F}$ , definido por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \vec{c} \end{aligned}$$

Según el teorema de Helmholtz, el campo  $\vec{F}$  es de la forma

$$\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{A},$$

siendo

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int_{esp} \frac{\vec{c}(\vec{r}_1) d\tau_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}.$$

Estudiamos por separado los dos casos a los que se refiere el problema.

#### • Fuentes toroidales

En este caso  $\vec{c}(\vec{r}_1) = c(r_1, z_1)\vec{u}_{\phi_1}$ . El elemento de volumen en coordenadas cilíndricas es  $d\tau_1 = r_1 dr_1 d\phi_1 dz_1$ , donde el subíndice 1 se refiere al vector de posición que recorre la distribución de fuentes  $\vec{c}$ . A la hora de hacer la integral hay que tener en cuenta que el vector  $\vec{u}_{\phi_1}$  depende de la coordenada  $\phi_1$ . Así pues, hay que expresarlo

en los vectores de la base cartesiana, que no dependen de las coordenadas,  $\vec{u}_\phi = -\text{sen}\phi \vec{u}_x + \text{cos}\phi \vec{u}_y$ . La integral queda

$$\vec{A} = -\frac{1}{4\pi} \vec{u}_x \int_{esp} \frac{c(r_1, z_1) \text{sen}\phi_1 r_1 dr_1 d\phi_1 dz_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{1}{4\pi} \vec{u}_y \int_{esp} \frac{c(r_1, z_1) \text{cos}\phi_1 r_1 dr_1 d\phi_1 dz_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}$$

En coordenadas cilíndricas, los vectores de posición  $\vec{r}$  y  $\vec{r}_1$  se expresan

$$\vec{r} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z; \quad \vec{r}_1 = r_1\vec{u}_{r_1} + z_1\vec{u}_z,$$

donde hemos usado que el vector  $\vec{u}_z$  no depende de las coordenadas. Dado que el problema tiene simetría de revolución en torno al eje  $Z$  (no hay nada que dependa del ángulo  $\phi$ ), podemos simplificar el problema calculando el potencial vector en un punto del plano  $XZ$  (correspondiente al valor  $\phi = 0$ ), de modo que el vector de posición  $\vec{r}$  se escribe  $\vec{r} = r \vec{u}_\phi|_{\phi=0} + z\vec{u}_z = r\vec{u}_y + z\vec{u}_z$ . El módulo del denominador se expresa

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}_1| &= \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1)} = \sqrt{[r\vec{u}_r - r_1\vec{u}_{r_1} + (z - z_1)\vec{u}_z] \cdot [r\vec{u}_r - r_1\vec{u}_{r_1} + (z - z_1)\vec{u}_z]} \\ &= \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2r r_1 \text{cos}\phi_1 + (z - z_1)^2} = f(r, r_1, \phi_1, z, z_1). \end{aligned}$$

Concentrándonos ahora en la integración respecto de  $\phi_1$ , observamos por un lado que el intervalo de integración se puede elegir simétrico,  $\phi_1 \in (-\pi, \pi]$ , y por otro que la función  $f$  es par en  $\phi_1$ , pues lo es el coseno. El primer sumando de la expresión para  $\vec{A}$  tiene una integral en  $\phi_1$  de la forma

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\text{sen}\phi_1}{f(\text{cos}\phi_1)} d\phi_1 = 0.$$

Se anula porque el seno es impar en  $\phi_1$ ; entonces el integrando es una función impar y el intervalo de integración es simétrico. Por tanto, el potencial vector  $\vec{A}$  es

$$\vec{A} = g(r, z)\vec{u}_y,$$

pues al hacer la integral se elimina la dependencia en  $r_1$ ,  $z_1$  y  $\phi_1$ . Dado que esto es cierto para cualquier valor del ángulo  $\phi$ , debido a la simetría azimutal del problema, el potencial vector se escribe

$$\vec{A} = g(r, z)\vec{u}_\phi.$$

Es decir,  $\vec{A}$  es toroidal. Para hallar  $\vec{F}$  debemos calcular el rotacional de  $\vec{A}$ . En coordenadas cilíndricas

$$\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{u}_r & r\vec{u}_\phi & \vec{u}_z \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\phi & \partial/\partial z \\ 0 & r g(r, z) & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial [g(r, z)]}{\partial z} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial [r g(r, z)]}{\partial r} \vec{u}_z.$$

Por tanto,  $\vec{F}$  es de la forma  $\vec{F} = h_r(r, z)\vec{u}_r + h_z(r, z)\vec{u}_z$ . Esto es,  $\vec{F}$  es **poloidal**.

### • Fuentes poloidales

En este caso,  $\vec{c} = c_r(r, z)\vec{u}_r + c_z(r, z)\vec{u}_z$ . El potencial vector en un punto  $\vec{r} = r\vec{u}_x + z\vec{u}_z$  (tomando de nuevo  $\phi = 0$ ) cumple

$$4\pi\vec{A} = \vec{u}_x \int_{esp} \frac{c_r(r_1, z_1) \text{cos}\phi_1 r_1 dr_1 d\phi_1 dz_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \vec{u}_y \int_{esp} \frac{c_r(r_1, z_1) \text{sen}\phi_1 r_1 dr_1 d\phi_1 dz_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \vec{u}_z \int_{esp} \frac{c_z(r_1, z_1) r_1 dr_1 d\phi_1 dz_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}$$

Por el mismo razonamiento del apartado anterior, la segunda integral se anula, con lo que el potencial vector es de la forma

$$\vec{A} = a_r(r, z)\vec{u}_x + a_z(r, z)\vec{u}_z,$$

Aprovechando de nuevo la simetría en  $\phi$ , podemos sustituir  $\vec{u}_x$  por  $\vec{u}_r$ . Por tanto,  $\vec{A}$  es poloidal. El campo  $\vec{F}$  es

$$\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{u}_r & r\vec{u}_\phi & \vec{u}_z \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\phi & \partial/\partial z \\ a_r(r, z) & 0 & a_z(r, z) \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\phi.$$

Es decir,  $\vec{F} = f(r, z)\vec{u}_\phi$  es un campo **toroidal**.

Este ejemplo es importante por tres motivos: (i) es un ejercicio que exige cierto manejo de integrales vectoriales en coordenadas curvilíneas, con unitarios dependientes de las variables de integración; (ii) usa argumentos de simetría para simplificar los cálculos, lo cual debe hacerse siempre que sea posible, y finalmente (iii) tiene una interesante aplicación al cálculo de campos magnéticos producidos por corrientes que poseen simetría de revolución (esto se verá en el tema 3).

---