Lección 2

Gradiente, divergencia y rotacional

2.1. Gradiente de un campo escalar

Campos escalares. Un campo escalar en $\mathbb{R}^n$ es una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$, donde Ω es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Usualmente Ω será un conjunto abierto. Para $n = 2$ tenemos un *campo escalar en el plano,* que tendrá la forma $(x,y) \mapsto f(x,y)$. Para $n = 3$ tendremos un *campo escalar en el espacio,* dado por una expresión $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$.

En Física, un campo escalar $f : \Omega \to \mathbb{R}$ describe una magnitud con valores escalares, de forma que Ω es una región del plano o del espacio y, para cada punto $\mathbf{x} \in \Omega$, $f(\mathbf{x})$ es el valor en el punto $\mathbf{x}$ de dicha magnitud física. Piénsese, por ejemplo, en un campo de temperaturas.

Definición de gradiente. Sea f un campo escalar definido en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \Omega$. Supongamos que f es diferenciable en el punto $\mathbf{a}$, con lo que existen las n derivadas parciales de f en $\mathbf{a}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\,\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{a})}{t} \qquad (k = 1, 2, \dots, n),$$

donde $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ es la base standard de $\mathbb{R}^n$. Entonces, el **gradiente** de f en el punto $\mathbf{a}$ es, por definición, el vector $\nabla f(\mathbf{a}) = \nabla f(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ dado por

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a_1, a_2, \dots, a_n)\, \mathbf{e}_k$$

Si el campo f es diferenciable en todos los puntos de Ω tendremos una función $\nabla f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ que a cada punto $\mathbf{x} \in \Omega$ hace corresponder el vector gradiente en dicho punto, $\nabla f(\mathbf{x})$. Es natural entonces escribir:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\, \mathbf{e}_k,$$

una igualdad entre funciones, válida en todo punto de Ω.

Gradiente en el plano. Para un campo escalar plano $(x,y) \mapsto f(x,y)$, que sea diferenciable en un punto $\mathbf{a} = (x_0, y_0)$, tendremos

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \nabla f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a}) \right) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,\mathbf{j}$$

Cuando f sea diferenciable en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ podremos escribir

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} \qquad (\text{en } \Omega)$$

Gradiente en el espacio. Análogamente, si $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$ es un campo escalar en el espacio, diferenciable en un punto $\mathbf{a} = (x_0, y_0, z_0)$, tendremos

$$\begin{aligned}\nabla f(\mathbf{a}) = \nabla f(x_0,y_0,z_0) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{a}) \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\,\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\,\mathbf{k}\end{aligned}$$

y cuando f sea diferenciable en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ podremos escribir

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathbf{k} \qquad (\text{en } \Omega)$$

Derivadas direccionales. Consideremos de nuevo un campo escalar f definido en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y diferenciable en un punto $\mathbf{a} \in \Omega$. Fijado un vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ con $\|\mathbf{u}\| = 1$, sabemos que la derivada direccional de f en la dirección $\mathbf{u}$ viene dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\,\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{t} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a})\, u_k = \langle \nabla f(\mathbf{a}) \,|\, \mathbf{u} \rangle$$

y mide la rapidez de variación de f al desplazarnos desde el punto $\mathbf{a}$ en la dirección del vector $\mathbf{u}$. La desigualdad de Cauchy-Schwartz nos da

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \langle \nabla f(\mathbf{a}) \,|\, \mathbf{u} \rangle \leqslant |\langle \nabla f(\mathbf{a}) \,|\, \mathbf{u} \rangle| \leqslant \|\nabla f(\mathbf{a})\|\,\|\mathbf{u}\| = \|\nabla f(\mathbf{a})\|$$

Si $\nabla f(\mathrm{a}) \neq 0$, podemos conseguir que las desigualdades anteriores sean igualdades tomando $\mathbf{u} = \dfrac{\nabla f(\mathbf{a})}{\|\nabla f(\mathbf{a})\|}$ y tenemos una interpretación física del gradiente de un campo escalar: $\|\nabla f(\mathbf{a})\|$ es la máxima rapidez de variación del campo que podemos conseguir al desplazarnos desde el punto $\mathbf{a}$; esta máxima variación se produce en la dirección del vector gradiente, más concretamente, el máximo aumento se consigue en el sentido del vector gradiente y la máxima disminución en sentido opuesto.

2.2. Campos vectoriales

Campos vectoriales. Un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ es una función $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ donde Ω es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que usualmente será abierto. Por tanto, un campo vectorial tiene n coordenadas, que son campos escalares; concretamente, para $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$, el vector $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ deberá tener la forma:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \big(F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \ldots, F_n(\mathbf{x})\big) = \sum_{k=1}^{n} F_k(\mathbf{x})\,\mathbf{e}_k,$$

más explícitamente,

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \big(F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,, F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\big)\\ &= \sum_{k=1}^{n} F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathbf{e}_k,\end{aligned}$$

o abreviadamente: $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n) = \sum_{k=1}^{n} F_k\,\mathbf{e}_k$ (en Ω).

Es claro que, para $k = 1, 2, \ldots, n$, la función $F_k : \Omega \to \mathbb{R}$ así definida es un campo escalar en $\mathbb{R}^n$. Veamos la notación que suele usarse en los dos casos particulares que nos interesan.

- Un campo vectorial en el plano vendrá dado por una función $(x,y) \mapsto \mathbf{F}(x,y)$ definida en un conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ y con valores en $\mathbb{R}^2$. Sus componentes suelen denotarse por P y Q, con lo que, para $(x,y) \in \Omega$, tendremos:

  $$\mathbf{F}(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = P(x,y)\,\mathbf{i} + Q(x,y)\,\mathbf{j}$$

  o, abreviadamente: $\mathbf{F} = (P, Q) = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ (en Ω).

  Es costumbre representar gráficamente un campo vectorial plano $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ haciendo que, para cada $\mathbf{x} \in \Omega$, el vector $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ tenga su origen en el punto $\mathbf{x}$, obteniéndose una imagen que sugiere claramente un "campo" de vectores.

- Las componentes de un campo vectorial $(x,y,z) \mapsto \mathbf{F}(x,y,z)$, definido en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ y con valores en $\mathbb{R}^3$ suelen denotarse por P, Q y R, de forma que, para $(x,y,z) \in \Omega$, se tendrá:

  $$\mathbf{F}(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$$

  o, abreviadamente: $\mathbf{F} = (P, Q, R) = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$. (en Ω)

Los campos vectoriales aparecen con frecuencia en Física, para representar magnitudes vectoriales: para cada punto $\mathbf{x}$ de una región Ω en el plano o en el espacio, $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ es el valor en ese punto de la magnitud vectorial descrita por el campo. Piénsese por ejemplo en el campo de velocidades de un fluido en movimiento o en campos de fuerzas, como un campo gravitatorio o electromagnético.

2.3. Divergencia de un campo vectorial

Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial definido en un conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y consideremos sus coordenadas $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$. Supongamos que $\mathbf{F}$ es diferenciable en un punto $\mathbf{a} \in \Omega$, lo que sabemos equivale a que todos los campos escalares F_k, con $k = 1, 2, \ldots, n$, sean diferenciables en el punto $\mathbf{a}$. De hecho cada vector gradiente $\nabla F_k(\mathbf{a})$ es la k-ésima fila de la matriz jacobiana de $\mathbf{F}$ en $\mathbf{a}$. Pues bien, la traza de dicha matriz es, por definición, la **divergencia** del campo $\mathbf{F}$ en el punto $\mathbf{a}$, y se denota por $\operatorname{div}\mathbf{F}(\mathbf{a})$. Así pues, se tendrá:

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(\mathbf{a}) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\mathbf{a}) + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial x_k}(\mathbf{a}).$$

Cuando el campo vectorial $\mathbf{F}$ es diferenciable en todo punto de Ω tenemos una función $\operatorname{div}\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}$ que en cada punto $\mathbf{x} \in \Omega$ toma el valor $\operatorname{div}\mathbf{F}(\mathbf{x})$ de la divergencia en dicho punto. Tenemos entonces la siguiente igualdad entre funciones, válida en todo punto de Ω:

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial x_k}$$

- Para un campo vectorial plano $(x,y) \mapsto \mathbf{F}(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$, que sea diferenciable en un punto (x_0, y_0), tendremos

  $$\operatorname{div}\mathbf{F}(x_0,y_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0)$$

  Cuando $\mathbf{F}$ sea diferenciable en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ podremos escribir

  $$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \qquad (\text{en } \Omega)$$

- Análogamente, si $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ es un campo vectorial en el espacio, diferenciable en un punto (x_0, y_0, z_0), tendremos

  $$\operatorname{div}\mathbf{F}(x_0,y_0,z_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) + \frac{\partial R}{\partial z}(x_0,y_0,z_0),$$

  y cuando $\mathbf{F}$ sea diferenciable en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ podremos escribir

  $$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \qquad (\text{en } \Omega)$$

Vector simbólico "nabla". Para operar con las nociones que estamos estudiando es útil introducir el simbolismo

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\,\mathbf{e}_k$$

y manejar ∇ como si se tratase de un vector de $\mathbb{R}^n$.

Por ejemplo, si f es un campo escalar definido en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y diferenciable en un punto $\mathbf{a} \in \Omega$, al multiplicar simbólicamente el "vector" ∇ por el escalar $f(\mathbf{a})$ se obtiene la expresión correcta del vector gradiente:

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a})\, \mathbf{e}_k$$

Cuando f es diferenciable en todo punto de Ω podemos hacer el mismo cálculo simbólico con el "escalar variable" f, que multiplicado por ∇ nos da

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\, \mathbf{e}_k,$$

Si ahora $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \cdots, F_n)$ es un campo vectorial definido en el abierto Ω y diferenciable en el punto $\mathbf{a} \in \Omega$, cuando calculamos simbólicamente el producto escalar del "vector" ∇ por el vector $\mathbf{F}(\mathbf{a}) = (F_1(\mathbf{a}), F_2(\mathbf{a}), \ldots, F_n(\mathbf{a}))$ obtenemos:

$$\nabla . \mathbf{F}(\mathbf{a}) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\mathbf{a}) + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\mathbf{a}) = \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{a}).$$

Esto explica que frecuentemente se denote por $\nabla . \mathbf{F}(\mathbf{a})$ a la divergencia del campo $\mathbf{F}$ en el punto $\mathbf{a}$. Cuando $\mathbf{F}$ es diferenciable en Ω, tenemos igualmente

$$\nabla . \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = \operatorname{div} \mathbf{F} \quad (\text{en } \Omega)$$

Con las debidas precauciones, este cálculo simbólico con el "vector" ∇ resulta útil. Destacamos como siempre los dos casos particulares que nos interesan:

- En el caso $n = 2$ tenemos $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathbf{j}$
- Análogamente, para $n = 3$ será $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\mathbf{k}$

2.4. Rotacional de un campo vectorial

Rotacional en el espacio. Sea $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ un campo vectorial definido en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ y diferenciable en un punto $\mathbf{a} \in \Omega$. Del mismo modo que la divergencia $\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{a})$ se obtiene como el producto escalar simbólico $\nabla . \mathbf{F}(\mathbf{a})$, podemos pensar en el producto vectorial, también simbólico, $\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{a})$. El vector que así se obtiene es, por definición, el rotacional del campo $\mathbf{F}$ en el punto $\mathbf{a}$ y se denota también por $\mathbf{rot}\ \mathbf{F}(\mathbf{a})$. Así pues:

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{F}(\mathbf{a}) = \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{a}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(\mathbf{a}) & Q(\mathbf{a}) & R(\mathbf{a}) \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y}(\mathbf{a}) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\mathbf{a}) \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z}(\mathbf{a}) - \frac{\partial R}{\partial x}(\mathbf{a}) \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(\mathbf{a}) - \frac{\partial P}{\partial y}(\mathbf{a}) \right) \mathbf{k}.$$

Cuando $\mathbf{F}$ sea diferenciable en todo el abierto Ω podremos escribir:

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k} \qquad (\text{en } \Omega).\end{aligned}$$

Rotacional escalar en el plano. La noción de rotacional recién introducida sólo tiene sentido para campos vectoriales en el espacio. Sin embargo, a un campo vectorial en el plano puede asociarse de forma natural un campo vectorial en el espacio, como vamos a ver.

Sea $\mathbf{F} = (P,Q)$ un campo vectorial definido en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Consideramos el conjunto $\tilde{\Omega} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Omega\}$, que es claramente un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$, y para $(x,y,z) \in \tilde{\Omega}$, definimos

$$\tilde{\mathbf{F}}(x,y,z) = (P(x,y), Q(x,y), 0),$$

obteniendo un campo vectorial $\tilde{\mathbf{F}} : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^3$. La relación entre las componentes de $\mathbf{F}$ y $\tilde{\mathbf{F}}$ es bastante clara, si ponemos $\tilde{\mathbf{F}} = (\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R})$, tenemos

$$\tilde{P}(x,y,z) = P(x,y)\,;\;\; \tilde{Q}(x,y,z) = Q(x,y)\,;\;\; \tilde{R}(x,y,z) = 0 \quad \big((x,y,z) \in \tilde{\Omega}\big)$$

Si $\mathbf{F}$ es diferenciable en un punto (x_0,y_0) deducimos que $\tilde{\mathbf{F}}$ es diferenciable en cualquier punto de la forma $(x_0,y_0,z) \in \tilde{\Omega}$ y calculamos fácilmente el rotacional en cualquiera de esos puntos:

$$\mathbf{rot}\,\tilde{\mathbf{F}}(x_0,y_0,z) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\mathbf{k}.$$

Hemos motivado así la siguiente definición:

Sea $\mathbf{F} = (P,Q)$ un campo vectorial definido en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ y diferenciable en un punto $(x_0,y_0) \in \Omega$. El **rotacional escalar** de $\mathbf{F}$ en el punto (x_0,y_0) se define por:

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}(x_0,y_0) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Si $\mathbf{F}$ es diferenciable en todo punto del abierto Ω podemos pues definir $\operatorname{rot}\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}$ mediante la igualdad:

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

2.5. Algunas observaciones adicionales

En esta lección hemos definido cuatro *operadores diferenciales* que transforman unos campos en otros. Más concretamente:

- Si f es un campo escalar diferenciable en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces su gradiente $\nabla f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial definido en Ω. Suele decirse que ∇f es un *campo de gradientes*.

- Dado un campo vectorial $\mathbf{F}$ que sea diferenciable en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, su divergencia $\nabla . \mathbf{F}$ es un campo escalar definido en Ω.
- Cada campo vectorial $\mathbf{F}$ que sea diferenciable en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ da lugar a $\mathbf{rot}\,\mathbf{F}$, otro campo vectorial definido en Ω
- Finalmente, un campo vectorial $\mathbf{F}$ que sea diferenciable en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ define un campo escalar $\operatorname{rot}\mathbf{F}$.

Veamos ahora lo que ocurre al iterar estos procesos, aunque no agotaremos todas las posibilidades. Lógicamente los campos a considerar deberán tener propiedades de diferenciabilidad más restrictivas que las usadas hasta ahora.

Rotacional de un gradiente. Vamos a comprobar sin dificultad el siguiente resultado:

Si f es un campo escalar dos veces diferenciable en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, entonces se verifica que $\mathbf{rot}\,(\nabla f) = 0$ *en* Ω.

En efecto, de las definiciones de gradiente y rotacional se deduce que:

$$\mathbf{rot}\,(\nabla f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right)\mathbf{k},$$

que se anula idénticamente en todo el abierto Ω gracias al Lema de Schwarz, que asegura la igualdad de las derivadas parciales segundas cruzadas de una función dos veces diferenciable. De forma completamente análoga podemos obtener el mismo resultado en $\mathbb{R}^2$:

Si f es un campo escalar dos veces diferenciable en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, entonces se verifica que $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$ *en* Ω.

Divergencia de un rotacional. El siguiente resultado se comprueba también sin dificultad:

Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial dos veces diferenciable en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, entonces se verifica que $\operatorname{div}(\mathbf{rot}\,\mathbf{F}) = 0$ *en* Ω.

El cálculo con el vector simbólico ∇ ayuda a recordar los dos resultados anteriores:

$$\nabla \times (\nabla f) \equiv 0 \qquad \text{y} \qquad \nabla . (\nabla \times \mathbf{F}) \equiv 0$$

En el primer caso podemos pensar que ∇f es un “múltiplo escalar del vector ∇” y recordar que, para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene $\mathbf{x} \times (\alpha\mathbf{x}) = 0$. En el segundo caso recordamos que el producto vectorial de dos vectores de $\mathbb{R}^3$ es ortogonal a dichos vectores. Sin embargo, el simbolismo no se puede llevar demasiado lejos: cierto que, como se ha dicho, podemos entender que $\nabla \times \mathbf{F}$ es “ortogonal a ∇”, pero es fácil dar un ejemplo de un campo vectorial $\mathbf{F}$, diferenciable en $\mathbb{R}^3$, tal que $\nabla \times \mathbf{F}$ no sea ortogonal a $\mathbf{F}$, o incluso que verifique $\langle \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{x}) \,|\, \mathbf{F}(\mathbf{x}) \rangle \neq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.