UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID

PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS
OFICIALES DE GRADO

Curso 2016/2017 JUNIO

MATERIA: MATEMATICAS II

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
Calificación: Las preguntas 1ª y 2ª se valorarán sobre 3 puntos; las preguntas 3ª y 4ª sobre 2 puntos. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas**.
Tiempo: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x + ay + z = a, \\ x - 4y + (a+1)z = 1, \\ 4y - az = 0, \end{cases}$ se pide:

- **a)** (2 puntos) Discutirlo en función de los valores del parámetro real a.
- **b)** (0.5 puntos) Resolver el sistema para a = 1.
- **c)** (0.5 puntos) Resolver el sistema para a = 2.

Solución.

a. El sistema viene definido por dos matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & -4 & a+1 \\ 0 & 4 & -a \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 & a \\ 1 & -4 & a+1 & 1 \\ 0 & 4 & -a & 0 \end{pmatrix} \qquad A \subset A^* \Rightarrow \text{rg } A^* \geq \text{rg } A$$

Si el $|A| \neq 0 \Rightarrow \text{rg } A = \text{rg } A^* = n = 3$, el sistema seria compatible determinado, por lo tanto se discute el tipo de solución del sistema para los valores del parámetro que anulan el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & -4 & a+1 \\ 0 & 4 & -a \end{vmatrix} = 8a + 0 + 4 - (0 - a^2 + 8a + 8) = a^2 - 4 = 0 : \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases}$$

Discusión.

i. Si $a \neq \pm 2$, $|A| \neq 0 \Rightarrow \text{rg } A = \text{rg } A^* = n = 3$, sistema seria compatible determinado.

ii. Si a = –2, $|A| = 0 \Rightarrow \text{rg } A < 3$. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow \text{rg } A = 2$. Para estudiar el rango de la matriz ampliada, $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ se parte del menor de orden dos distinto de cero y se estudian sus menores orlados, de los dos posibles, solo que queda por estudiar el formado por la 1ª, 2ª y 4ª columna. $\begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 \neq 0 \Rightarrow \text{rg } A^* = 3 \neq \text{rg } A$, sistema incompatible.

iii. Si a = 2, $|A| = 0 \Rightarrow \text{rg } A < 3$. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow \text{rg } A = 2$. Para estudiar el rango de la matriz ampliada, $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ se parte del menor de orden dos distinto de cero y se estudian sus menores orlados, de los dos posibles, solo que queda por estudiar el formado por la 1ª, 2ª y 4ª columna. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg } A^* = 2 = \text{rg } A \neq n = 3$, sistema compatible indeterminado.

b. Para a = 1. Según la discusión del apartado a, sistema compatible determinado, se puede resolver por el método de Gauss o por el método de Cramer.

Método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{E_1 \leftrightarrow E_2}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{E_2 - 2E_1}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{9E_3 - 4E_2}{=}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right); \begin{cases} x - 4y + 2z = 1 \\ 9y - 3z = -1 \\ 3z = 4 \end{cases}; \ z = \frac{4}{3}; \begin{cases} x - 4y + \frac{8}{3} = 1 \\ 9y - 4 = -1 \end{cases}; \begin{cases} x - 4y = -\frac{5}{3} \\ 9y = 3 \end{cases}; \ y = \frac{1}{3}; \left\{ x - \frac{4}{3} = -\frac{5}{3} \right.; \ x = -\frac{1}{3}$$

Solución: $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$

Método de Cramer:

$$|A| = m^2 - 4 \overset{m=1}{=} 1^2 - 4 = -3$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{1}{-3}; \ y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}; \ z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

Solución: $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$

c. Para a = 2, $\begin{cases} 2x + 2y + z = 2 \\ x - 4y + 3z = 1 \\ \quad\ \ 4y - 2z = 0 \end{cases}$ teniendo en cuenta la discusión del apartado a, sistema compatible indeterminado de rango 2, por lo tanto solo tiene dos ecuaciones linealmente independientes. Se seleccionan como independientes las ecuaciones que contienen los coeficientes del menor de orden dos distinto de cero.

$$\begin{cases} x - 4y + 3z = 1 \\ \quad\ \ 4y - 2z = 0 \end{cases}$$

Para resolver el sistema se transforma una variable en parámetro y se resuelve en función de este, se toma como parámetro la variable cuyos coeficientes no formaron el menor de orden 2 $(z = \lambda)$.

$$\begin{cases} x - 4y = 1 - 3\lambda \\ \quad\ \ 4y = 2\lambda \end{cases}$$

De la segunda ecuación se despeja y y sumando las ecuaciones se despeja x.

$$x = 1 - \lambda \quad y = \frac{\lambda}{2} \quad z = \lambda \quad \forall \lambda \in R$$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos

Dados los puntos P(1, –2, 1), Q(–4, 0, 1), R(–3, 1, 2), S(0, –3, 0), se pide:

a) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a P, Q y R.

b) (1 punto) Estudiar la posición relativa de la recta r, que pasa por los puntos P y Q, y la recta s, que pasa por R y S.

c) (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por los puntos P, Q y R.

Solución.

a. La mínima determinación lineal de un plano es un punto y dos vectores linealmente independientes y paralelos al plano.

Con los puntos P, Q y R una determinación lineal del plano que los contiene (π) puede ser:

$$\pi \equiv \begin{cases} P(1,-2,1) \\ \overline{PQ} = (-4-1, 0-(-2), 1-1) = (-5, 2, 0) \\ \overline{PR} = (-3-1, 1-(-2), 2-1) = (-4, 3, 1) \end{cases} \qquad \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-(-2) & z-1 \\ -5 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante por los elementos de la primera fila, operando y ordenando se obtiene la ecuación general del plano que se pide.

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}(x-1) - \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}(y+2) + \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}(z-1) = 0$$

$$\pi \equiv 2(x-1) - (-5)(y+2) - 7(z-1) = 0$$

$$\pi \equiv 2x + 5y - 7z + 15 = 0$$

b. Una forma de estudiar la posición relativa de dos rectas es relacionarla con el rango de la matriz que forman los vectores de dirección de ambas rectas y un vector formado por un punto de cada recta.

$$r_{PQ} \equiv \begin{cases} P(1,-2,1) \\ \overline{PQ} = (-5, 2, 0) \end{cases} \qquad s_{RS} \equiv \begin{cases} R = (-3, 1, 2) \\ \overline{RS} = (3, -4, -2) \end{cases} \quad rg\begin{pmatrix} \overline{PR} \\ \overline{PQ} \\ \overline{RS} \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix} < 3$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow rg\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix} = 2 \text{ Las rectas son coplanarias.}$$

$$\left.\begin{matrix} rg = 2 \\ \overline{PQ} = k \cdot \overline{RS} \end{matrix}\right\}: \text{Las rectas son secantes}$$

c. $\text{Área PQR} = \dfrac{1}{2}\left|\overline{PQ} \times \overline{PR}\right|$

Para calcular el producto vectorial $\overline{PQ} \times \overline{PR}$, se puede tener en cuenta que son los coeficientes de la ecuación general del plano π calculado en el apartado a.

$$\overline{PQ} \times \overline{PR} = (2, 5, -7)$$

$$\text{Área PQR} = \frac{1}{2}\left|\overline{PQ} \times \overline{PR}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 5^2 + (-7)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{78}\ u^2$$

Ejercicio 3: Calificación máxima: 2 puntos.

Se administra una medicina a un enfermo y t horas después la concentración en sangre del principio activo viene dada por $c(t) = t\, e^{-t/2}$ miligramos por mililitro. Determine el valor máximo de c(t) e indique en qué momento se alcanza dicho valor máximo. Sabiendo que la máxima concentración sin peligro es de 1 mg/ml, señale si en algún momento hay riesgo para el paciente.

Solución.

La función tendrá máximos relativos en aquellos puntos donde su primera derivada sea cero y su segunda derivada sea negativa.

$$c'(t) = 1 \cdot e^{-t/2} + t \cdot e^{-t/2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \left(1 - \frac{t}{2}\right) \cdot e^{-t/2}$$

$$c'(t) = 0: \quad \left(1 - \frac{t}{2}\right) \cdot e^{-t/2} = 0: \quad 1 - \frac{t}{2} = 0: \quad t = 2$$

En la resolución de la ecuación, hay que tener en cuenta que la parte exponencial nunca se anula

$$c''(t) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot e^{-t/2} + \left(1 - \frac{t}{2}\right) \cdot e^{-t/2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{t}{4}\right) \cdot e^{-t/2} = \left(\frac{t}{4} - 1\right) \cdot e^{-t/2}$$

$$c''(2) = \left(\frac{2}{4} - 1\right) \cdot e^{-2/2} = -\frac{1}{2} e^{-1} = \frac{-1}{2e} < 0$$

$$c(2) = 2\,e^{-2/2} = \frac{2}{e} \approx 0{,}74 \text{ mg/mL}$$

La concentración del fármaco es máxima a las dos horas de haberlo administrado, siendo el valor máximo (0,74 mg/mL) inferior a la concentración máxima que no entraña riesgo para el paciente, por lo tanto, el paciente no corre ningún riesgo.

Ejercicio 4: Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 6}{x - 2}$, se pide:

- **a)** (0.5 puntos) Determinar su dominio y asíntotas verticales.
- **b)** (0.5 puntos) Calcular $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$
- **c)** (1 punto) Calcular $\displaystyle \int_3^5 f(x)\,dx$

Solución.

a. $D[f(x)] = \{x \in R / x - 2 \neq 0\} = R - \{2\}$

Asíntota vertical: recta de la forma x = a / a∉ D y $\displaystyle \lim_{x\to a} f(x) = \frac{k}{0}$

x = 2 es un candidato a asíntota vertical.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x + 6}{x - 2} = \frac{12}{0} \Rightarrow x = 2 \text{ es un asíntota vertical.} \begin{cases} \displaystyle \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2 + x + 6}{x - 2} = \frac{12}{0^-} = -\infty \\ \displaystyle \lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x + 6}{x - 2} = \frac{12}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

b. $$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2 + x + 6}{x - 2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x + 6}{x^2 - 2x} \cong \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

c. $$\int_3^5 f(x)\,dx = \int_3^5 \frac{x^2 + x + 6}{x - 2}\,dx$$

Por ser el numerador de mayor grado que el denominador, se divide la fracción. Utilizando el método de Ruffini:

	1	1	6
2		2	6
	1	3	12

$$\frac{x^2 + x + 6}{x - 2} = x + 3 + \frac{12}{x - 2}$$

$$\int_3^5 f(x)\,dx = \int_3^5 \left(x + 3 + \frac{12}{x - 2}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 3x + 12\,\text{Ln}|x - 2|\right)\Bigg]_3^5 =$$

$$= \frac{5^2}{2} + 3 \cdot 5 + 12\,\text{Ln}|5 - 2| - \left(\frac{3^2}{2} + 3 \cdot 3 + 12\,\text{Ln}|3 - 2|\right) = 14 + 12\,\text{Ln}\,3$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{2}{x}$ y g(x) = sen (x), se pide:

a) (1 punto) Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)-\dfrac{2}{g(x)}\right)$

b) (0.75 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva y = f(x) en el punto (½, 4).

c) (1.25 puntos) Calcular el área delimitada por la curva y = f(x) y la recta y = –x + 3.

Solución.

a.

$$\lim_{x\to 0}\left(f(x)-\frac{2}{g(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{\text{sen } x}\right)^{(\infty-\infty)}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x - x}{x\cdot\text{sen } x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{L'H}{=}}2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{1\cdot\text{sen } x+x\cdot\cos x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{L'H}{=}}$$

$$=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-\text{sen } x}{\cos x+1\cdot\cos x+x\cdot(-\text{sen } x)}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-\text{sen } x}{2\cos x-x\cdot\text{sen } x}=2\cdot\frac{-\text{sen } 0}{2\cos 0-0\cdot\text{sen } 0}=2\cdot\frac{0}{2-0}=0$$

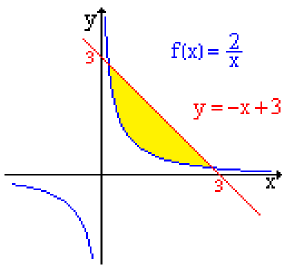
b. La ecuación de la recta tangente a la función y = f(x) en el punto (½, 4) en forma punto-pendiente es:

$$y-4=f'\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$f(x)=\frac{2}{x}=2x^{-1}\ :\ f'(x)=-2x^{-2}=\frac{-2}{x^2}\ :\ f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-2}{(1/2)^2}=-8$$

$$y-4=-8\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\qquad y=-8x+8$$

c. Se pide el área comprendida entre dos funciones (no es necesario representar). Se empieza por calcular los puntos comunes entre las funciones que serán los límites de integración.



$$\begin{cases} y=\dfrac{2}{x} \\ y=-x+3\end{cases}:\text{Por igualación } \frac{2}{x}=-x+3$$

$$x^2-3x+2=0:\begin{cases}x=1\\x=2\end{cases}$$

Para calcular el área se hace la integral de la función que esta por encima menos la que esta por debajo, en el caso de no saber la posición relativa, se restan en cualquier orden y se hace la integral en valor absoluto.

$$\text{Área}=\int_1^2\left(-x+3-\frac{2}{x}\right)dx=\left(-\frac{x^2}{2}+3x-2\text{Ln } x\right]_1^2=\left(-\frac{2^2}{2}+3\cdot 2-2\text{Ln } 2\right)-\left(-\frac{1^2}{2}+3\cdot 1-2\text{Ln } 1\right)=\frac{3}{2}-2\text{ Ln } 2\ u^2$$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos

Dadas las matrices

$$P=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&2&2\\2&3&2\end{pmatrix}\qquad J=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto) Determinar la matriz P^{-1}, inversa de la matriz P.

b) (1 punto) Determinar la matriz B^{-1}, inversa de la matriz $B = P^{-1}J^{-1}$.

c) (1 punto) Calcular el determinante de la matriz A^2, siendo $A = PJP^{-1}$.

Solución.

a. La inversa de una matriz es $P^{-1}=\dfrac{1}{|P|}(\text{adj } P)^t$

El primer paso es calcular el determinante de la matriz, y comprobar que es distinto de cero, que es la condición necesaria y suficiente para que una matriz tenga inversa.

$$\det P = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4+8+9-(4+12+6) = 21-22 = -1 \neq 0$$

$$\operatorname{adj} P = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \qquad (\operatorname{adj} P)^t = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|}(\operatorname{adj} P)^t = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

b. Teniendo en cuenta las siguientes propiedades de la matriz inversa:

- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

$$B^{-1} = \left(P^{-1} \cdot J^{-1}\right)^{-1} = \left(J^{-1}\right)^{-1} \cdot \left(P^{-1}\right)^{-1} = J \cdot P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

c. El determinante se calcula aplicando las siguientes propiedades de los determinantes:

- $|A^n| = |A|^n$
- $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
- $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

$$|A^2| = |A|^2 = |P \cdot J \cdot P^{-1}|^2 = \left(|P| \cdot |J| \cdot |P^{-1}|\right)^2 = \left(|P| \cdot |J| \cdot \frac{1}{|P|}\right)^2 = |J|^2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}^2 = (-2)^2 = 4$$

Ejercicio 3. Calificación máxima 2 puntos

a) (1 punto) Determine la distancia entre las rectas

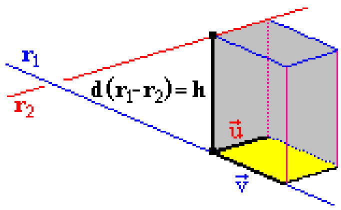
$$r_1 \equiv x = y = z \qquad \text{y} \qquad r_2 \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$$

b) (1 punto) Obtenga el punto de corte de la recta $s \equiv x = 2 - y = z - 1$ con el plano perpendicular a s, que pasa por el origen.

Solución.

a. Para calcular la distancia entre dos rectas, se necesita una determinación lineal (punto, vector) de cada una de ellas.

$$r_1 \equiv x = y = z : \begin{cases} A(0,0,0) \\ \vec{v} = (1,1,1) \end{cases} \qquad r_2 \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{x=\lambda} r_2 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} : \begin{cases} B(0,1,1) \\ \vec{u}(1,-1,1) \end{cases}$$



La distancia entre dos rectas se puede calcular de varias formas, en mi opinión la más rápida es como aplicación del producto mixto y del módulo del producto vectorial. Teniendo en cuenta que el volumen de un paralelepípedo es (Área de la base)×(Altura), la altura es la mínima distancia entre la recta por lo que despejando y teniendo en cuenta las aplicaciones del producto mixto y del módulo del producto vectorial:

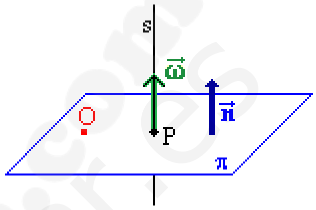
$$d(r_1 - r_2) = h = \frac{\text{Volumen paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{\overline{AB} \circ (\vec{v} \times \vec{u})}{|\vec{v} \times \vec{u}|}$$

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2, 0, -2) \qquad \overline{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (0,1,1) - (0,0,0) = (0,1,1)$$

$$d(r_1 - r_2) = \frac{\overline{AB} \circ (\vec{v} \times \vec{u})}{|\vec{v} \times \vec{u}|} = \frac{|(0,1,1) \circ (2,0,-2)|}{\sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,u$$

b. El punto P, se obtiene por intersección del la recta s y un plano π.

El plano π, teniendo en cuenta que es perpendicular a la recta s y que contiene al punto O(0, 0, 0) se obtiene tomando como vector normal del plano al vector de dirección de la recta s y particularizando la ecuación del plano en el punto O.



Para obtener una determinación lineal de la recta s, hay que tener la precaución de expresar correctamente la ecuación en su forma continua, ya que la componente "y" de la ecuación no esta correctamente ordenada

$$s \equiv x = \frac{y-2}{-1} = z - 1 : \begin{cases} x = \mu \\ y = 2 - \mu \\ z = 1 + \mu \end{cases} \qquad \vec{\omega}(1, -1, 1)$$

$$\pi \equiv \begin{cases} \vec{n} = \vec{\omega} = (1, -1, 1) \\ O(0, 0, 0) \end{cases} \qquad \pi \equiv x - y + z + K = 0$$

Sustituyendo el punto O se calcula el parámetro K.

$$0 + 0 + 0 + K = 0 \qquad K = 0$$

$$\pi \equiv x - y + z = 0$$

Conocida la ecuación del plano se calcula las coordenadas de P

$$P \equiv \begin{cases} s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = 2 - \mu \\ z = 1 + \mu \end{cases} \\ \pi \equiv x - y + z = 0 \end{cases} \qquad \mu - (2 - \mu) + (1 + \mu) = 0 \qquad 3\lambda - 1 = 0 \qquad \lambda = \frac{1}{\lambda}$$

$$P \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = 2 - \frac{1}{3} \\ z = 1 + \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

Ejercicio 4. Calificación máxima 2 puntos

El 40% de los sábados Marta va al cine, el 30% va de compras y el 30% restante juega a videojuegos. Cuando va al cine, el 60% de las veces lo hace con sus compañeros de baloncesto. Lo mismo le ocurre el 20% de las veces que va de compras, y el 80% de las veces que juega a videojuegos. Se pide:

a) (1 punto) Hallar la probabilidad de que el próximo sábado Marta no quede con sus compañeros de baloncesto.

b) (1 punto) Si se sabe que Marta ha quedado con los compañeros de baloncesto, ¿cuál es la probabilidad de que vayan al cine?

Solución.

Sucesos:

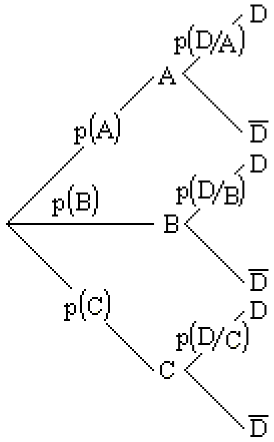
A ≡ Va al cine B ≡ Va de compras C ≡ Juega a videojuegos D ≡ Queda con sus compañeros

Datos:

$$p(A) = 0{,}40 \qquad p(B) = 0{,}30 \qquad p(C) = 0{,}30$$

$$p(D/A) = 0{,}6 \qquad p(D/B) = 0{,}2 \qquad p(C) = 0{,}8$$

El problema se puede representar mediante un diagrama en árbol:



a. El problema se resuelve mas fácilmente por el complementario o contrario, se calcula la probabilidad de que Marta que con sus compañeros y a continuación su contrio

$$p(D) = p[(A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)] = p(A \cap D) + p(B \cap D) + p(C \cap D) =$$
$$= p(A) \cdot p(D/A) + p(B) \cdot p(D/B) + p(C) \cdot p(D/C) = 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}54$$

Conocida la probabilidad de que Marta quede con sus compañeros, se calcula la de que no quede

$$p(\overline{D}) = 1 - p(D) = 1 - 0{,}54 = 0{,}46 = 46\%$$

b. $$p(C/D) = \frac{p(C \cap D)}{p(D)} = \frac{p(C) \cdot p(C/D)}{p(D)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}8}{0{,}54} = 0{,}\widehat{4} = 44{,}\widehat{4}\%$$