Examen nº 1 de MATEMÁTICAS I (COU) del libro_96_97

Como libro_96_97 entendemos:
Pruebas de Acceso a la Universidad
Propuestas de Exámenes 1996_97
Universidades Andaluzas
I.S.B.N.:84-7647-757-0
Páginas: 176-182

Debes elegir **DOS** ejercicios de **Análisis** (cada uno de ellos vale 3 puntos) y, por otro lado, **UN** ejercicio de **Álgebra Lineal y Geometría** (que vale cuatro puntos). **Contesta las preguntas de forma razonada**; la mera respuesta numérica no vale para obtener la puntuación máxima de cada apartado. Por favor, **escribe de forma ordenada y con letra clara**. Se permite el uso de calculadoras.

Análisis

Ejercicio 1 (1) [1'5 puntos] Enuncia el teorema de Bolzano.
(2) [1'5 puntos]. Prueba que la función f: R $\rightarrow$ R definida por $f(x) = \text{sen}(x) - (\cos(x))^2 + 1$ toma el valor 1 en algún punto del intervalo $[0, \pi/2]$.

Ejercicio 2. Considera la función f definida por $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^x - 1}$ para $x \neq 0$
(1) [1'5 puntos]. Determina las asíntotas de f y esboza su gráfica.
(2) [1'5 puntos]. Usa el cambio de variable $t = e^x$ para hallar $\int_1^3 [\, f(x)\,]dx$.

Ejercicio 3. Considera la función f : R $\rightarrow$ R definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{e^x} & \text{si} \quad x \le 0 \\ \cos(x) & \text{si} \quad 0 < x < \pi/2 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad \pi/2 \le x \end{cases}$
(1) [1 punto]. Estudia su derivabilidad en x = 0.
(2) [1 punto]. Estudia su derivabilidad en $x = \pi/2$.
(3) [1 punto] Calcula su función derivada.

Ejercicio 4. [3 puntos]. De dos funciones F : R $\rightarrow$ R y G : R $\rightarrow$ R se sabe que son derivables y que para cada $x \in$ R se tiene $F'(x) = G'(x)$. También se sabe que $F(0) = 3$ y $G(0) = 6$. Halla $(F(33) - G(33))^2$ y razona la respuesta.

Álgebra Lineal y Geometría

Ejercicio 5. (1) [1 punto]. Escribe una ecuación que represente el haz de planos que contienen a la recta r que pasa por los puntos (-1,2,0) y (1,0,5).
(2) [1 punto] ¿Cuál de esos planos pasa por el origen?
(3) [1 punto].¿Existe algún plano del haz que sea paralelo al plano $2x + y + 3z - 7 = 0$?
(s) [1 punto]. Halla el plano que es paralelo a la recta s dada por: $s \equiv \begin{cases} 6x - y - 6 = 0, \\ y - 3z = 0. \end{cases}$

Ejercicio 6. (1) [1'5 puntos]. Determina el valor numérico del número real a para que el sistema

$$\begin{aligned} x - y + 4z &= -2 \\ 2x + y + (a+1)z &= -1 \\ x + y + az &= 0 \end{aligned}$$

es compatible indeterminado.
(2) [1 punto]. Si interpretamos geométricamente el conjunto de las soluciones del sistema anterior que se obtiene para el valor de a hallado en el apartado (1), ¿se trata de una recta, un plano e todo el espacio? Razona la respuesta.
(3) [1'5 puntos]. Con el valor de a obtenido en el apartado (1), determina la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular al conjunto obtenido en el apartado (2) formado por las soluciones del sistema.