PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2017

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 4: FUNCIONES

Sea $f(t)$ el porcentaje de ocupación de un determinado complejo hotelero en función del tiempo *t*, medido en meses, transcurridos desde su inauguración:

$$f(t)=\begin{cases} -\dfrac{5}{2}t^2+20t & \text{si } 0\le t\le 6 \\ \dfrac{90t-240}{t+4} & si \quad t>6 \end{cases}.$$

a) ¿Evoluciona la función *f* de forma continua?.
b) ¿Cuál sería el porcentaje de ocupación al finalizar el segundo año?.
c) ¿En qué momentos el porcentaje de ocupación sería del 40 %?.
d) ¿Llegaría en algún momento a estar completo en caso de que estuviese abierto indefinidamente?
SOCIALES II. 2017 JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) La función polinómica $-\frac{5}{2}t^2+20t$ es continua en $\mathbb{R}$. La función racional $\frac{90t-240}{t+4}$ es continua en $\mathbb{R}-(-4)$.Por lo tanto, solo tenemos que estudiar la continuidad en $x=6$.

Estudiamos la continuidad en $x=6$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 6^-} -\dfrac{5}{2}t^2+20t=30 \\ \lim\limits_{x\to 6^+} \dfrac{90t-240}{t+4}=30 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 6^-}=\lim\limits_{x\to 6^+}=f(6)\Rightarrow \text{ Es continua en } x=6$$

Por lo tanto, la función es continua en el intervalo $[0,+\infty)$

b) Calculamos: $f(24)=\dfrac{90\cdot 24-240}{24+4}=\dfrac{1920}{28}=68'57$

Luego, al finalizar el segundo año, la ocupación sería del 68'57 %

c) Calculamos $f(t)=40$

$$-\frac{5}{2}t^2+20t=40\Rightarrow -5t^2+40t-80=0\Rightarrow t=4$$
$$\frac{90t-240}{t+4}=40\Rightarrow 90t-240=40t+160\Rightarrow t=8$$

Luego, la ocupación hotelera es del 40 % en el mes 4 y en el mes 8

d) Calculamos si tiene asíntota horizontal

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{90t-240}{t+4}=\frac{\infty}{\infty}=90\Rightarrow y=90$$

Luego, el porcentaje de ocupación no llegaría al 90 % aunque estuviese abierto indefinidamente.

a) Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{e^{5x}-x}{x^2-x} \qquad g(x)=(2x^2-x)^3\cdot \ln(x^3+2)}$$

b) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $\boldsymbol{h(x)=\frac{1}{x}}$ en el punto de abscisa $\boldsymbol{x=1}$.

SOCIALES II. 2017. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCION B

R E S O L U C I Ó N

a)

$$f'(x)=\frac{(5\cdot e^{5x}-1)\cdot(x^2-x)-(2x-1)\cdot(e^{5x}-x)}{\left(x^2-x\right)^2}$$

$$g'(x)=3\cdot(2x^2-x)^2\cdot(4x-1)\cdot\ln(x^3+2)+\frac{3x^2}{x^3+2}\cdot(2x^2-x)^3$$

b) La recta tangente en $x=1$ es $y-h(1)=h'(1)\cdot(x-1)$

- $h(1)=\frac{1}{1}=$
- $h'(x)=-\frac{1}{x^2}\Rightarrow h'(1)=-1$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-1=-1\cdot(x-1)\Rightarrow y=-x+2$

En una especie animal la contracción del iris, en décimas de milímetro, después de exponer el ojo a una luz brillante durante un determinado tiempo, viene dada por

$$f(t)=\begin{cases} t^2 & si \quad 0\le t\le 2 \\ \dfrac{4}{t-1} & si \quad t>2 \end{cases}$$

donde *t* es el tiempo, en segundos, que transcurre desde que se concentra la luz en el ojo.
a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función *f*.
b) Represente gráficamente la función *f*, determinando los intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus asíntotas, en caso de que existan.
c) Determine en qué instante se obtiene la máxima contracción y su valor.
SOCIALES II. 2017 RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) La función t^2 es continua y derivable para $0\le t\le 2$; la función $\dfrac{4}{t-1}$ es, también, continua y derivable para $t>2$. Vamos a estudiar si la función $f(x)$ es continua y derivable en $t=2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} t^2=4 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{4}{t-1}=4 \end{array}\right\} \Rightarrow f(2)=\lim_{x\to 2} f(x)=4 \Rightarrow \text{Continua en } t=2$$

Calculamos la función derivada: $f'(t)=\begin{cases} 2t & si \quad 0\le t<2 \\ \dfrac{-4}{(t-1)^2} & si \quad t>2 \end{cases}$ y como:

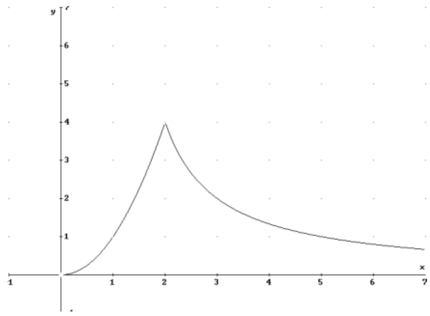
$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=4 \\ f'(2^+)=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(2^-)\ne f'(2^+) \Rightarrow \text{No es derivable en } t=2$$

Luego la función $f(t)$ es continua en $[0,+\infty)$ y derivable en $[0,+\infty)-\{2\}$.

b) Igualamos la primera derivada a cero: $2t=0\Rightarrow t=0$; $\dfrac{-4}{(t-1)^2}=0\Rightarrow$ No

	$[0,2)$	$(2,+\infty)$
Signo $f'(t)$	+	−
Función	C	D

Asíntota vertical y oblicua no tiene. Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{t-1}=\dfrac{4}{\infty}=0\Rightarrow y=0$



c) La máxima contracción se obtiene para $t=2$ y vale 4

Sea la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-4} & si \quad x\le 0 \\ x+3 & si \quad 0<x<2 \\ x^2+1 & si \quad x\ge 2 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad de la función en su dominio y clasifique sus discontinuidades, en caso de que exista alguna.
b) Estudie la derivabilidad de la función en su dominio.
SOCIALES II. 2017 RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La función $\dfrac{1}{x-4}$ es continua y derivable para $x\le 0$; la función $x+3$ es, también, continua y derivable para $0<x<2$; la función x^2+1 es, también, continua y derivable para $x\ge 2$;. Vamos a estudiar si la función $f(x)$ es continua y derivable en $x=0$ y $x=2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x-4}=-\dfrac{1}{4} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x+3=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)\ne \lim_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow \text{Discontinua inevitable de salto finito}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} x+3=5 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} x^2+1=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2) \Rightarrow \text{Continua en } x=2$$

b) En $x=0$ no es derivable ya que no es continua. Estudiamos la derivabilidad en $x=2$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-1}{(x-4)^2} & si \quad x<0 \\ 1 & si \quad 0<x<2 \\ 2x & si \quad x>2 \end{cases}$ y como:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=1 \\ f'(2^+)=4 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(2^-)\ne f'(2^+) \Rightarrow \text{No es derivable en } x=2$$

Luego la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{0\, y\, 2\}$.

Sea la función $f(x)=x^3-12x+1$.
a) Estudie su monotonía y determine sus extremos relativos.
b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=1$.
SOCIALES II. 2017 RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x)=3x^2-12=0 \Rightarrow x=2 \ ; \ x=-2$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,\infty)$
Signo $f'(x)$	+	−	+
Función	C	D	C

La función es creciente en $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ y decreciente en $(-2,2)$
Tiene un Máximo en $(-2,17)$ y un mínimo en $(2,-15)$

b) La ecuación de la recta tangente es: $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$

$f(1)=-10$

$f'(1)=-9$

Sustituyendo, tenemos: $y+10=-9\cdot(x-1)\Rightarrow y=-9x-1$

a) Calcule los valores de los parámetros a y b para que la gráfica de la función $f(x)=x^{3}+ax^{2}+b$ presente un extremo relativo en el punto $(2,6)$.
b) Para $a=1$ y $b=1$, halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa función en el punto de abscisa $x=1$.
SOCIALES II. 2017 RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada de la función: $f(x)=x^{3}+ax^{2}+b \Rightarrow f'(x)=3x^{2}+2ax$

- Extremo en $(2,6) \Rightarrow \begin{cases} f(2)=6 \Rightarrow 8+4a+b=6 \\ f'(2)=0 \Rightarrow 12+4a=0 \end{cases}$

Resolviendo el sistema sale que: $a=-3$; $b=10$

b) La función es: $f(x)=x^{3}+x^{2}+1$. La ecuación de la recta tangente es: $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$

$f(1)=3$

$f'(x)=3x^{2}+2x \Rightarrow f'(1)=5$

Sustituyendo, tenemos: $y-3=5\cdot(x-1) \Rightarrow y=5x-2$

El beneficio en euros que obtiene una empresa al vender x unidades de un artículo viene dado por la función $B(x)=-x^{2}+360x-18000 \quad 50\leq x\leq 350$.
a) ¿Cuál es el beneficio obtenido si vende 100 unidades? ¿Cuántas unidades debe vender para obtener un beneficio de 13500 €?
b) ¿Cuál es el número de unidades que debe vender para que el beneficio sea máximo? ¿A cuánto asciende ese beneficio?
c) Represente gráficamente la función y determine cuántas unidades hay que vender para no obtener pérdidas.
SOCIALES II. 2017 RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Si $x=100\Rightarrow B(x)=-100^{2}+360\cdot 100-18000=8000$ €

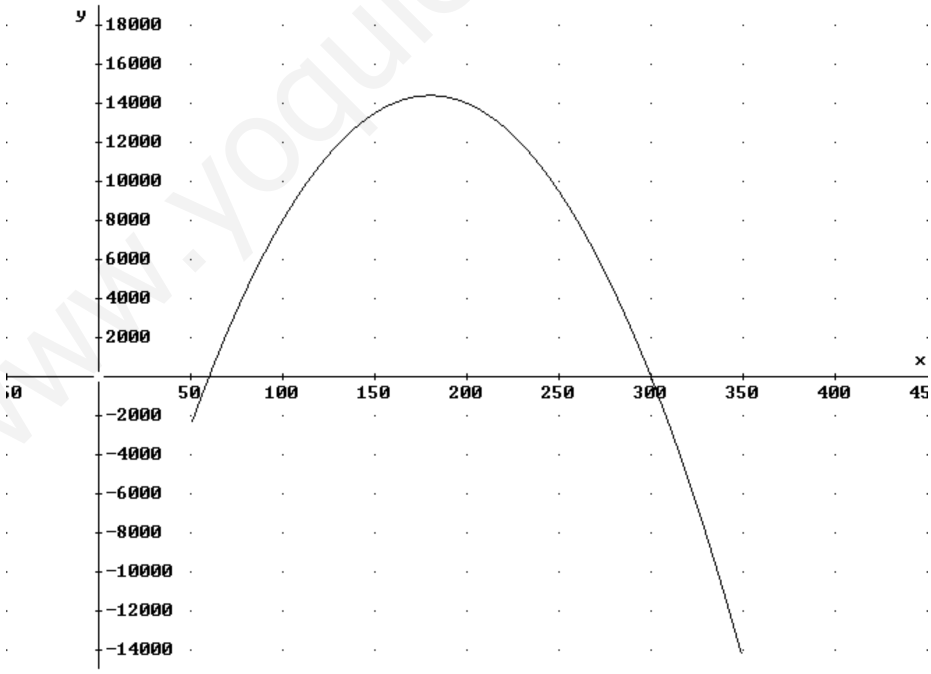
$13500=-x^{2}+360x-18000\Rightarrow x^{2}360x+31500=0\Rightarrow x=210 \quad x=150$

b) Calculamos la derivada y la igualamos a cero

$$B'(x)=-2x+360=0\Rightarrow x=180$$

$$x=180\Rightarrow B(x)=-180^{2}+360\cdot 180-18000=14400 \text{ €}$$

c)



$$B(x)=-x^{2}+360x-18000=0\Rightarrow x=60 \;;\; x=300$$

Debe vender más de 60 unidades y menos de 300 unidades

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{a}{x-1} & si \quad x<0 \\ x^2-bx-1 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

a) Calcule el valor de *a* y *b*, para que la función sea derivable en $x=0$.

b) Para $a=1$ y $b=2$, halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=2$.

SOCIALES II. 2017 RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Si la función es derivable en $x=0$, entonces es continua en $x=0$.
Estudiamos la continuidad en $x=0$.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} \frac{a}{x-1} &= -a \\ \lim_{x\to 0^+} x^2-bx-1 &= -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a=1$$

Estudiamos la derivabilidad en $x=0$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{a}{(x-1)^2} & si \quad x<0 \\ 2x-b & si \quad x>0 \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} f'(0^-) &= -1 \\ f'(0^+) &= -b \end{aligned}\right\} \Rightarrow b=1$$

Luego, tenemos que: $a=1$ y $b=1$

b) La función es: $f(x)=x^2-2x-1$. La ecuación de la recta tangente es: $y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2)$

$f(2)=-1$

$f'(x)=2x-2 \Rightarrow f'(2)=2$

Sustituyendo, tenemos: $y+1=2\cdot(x-2)\Rightarrow y=2x-5$

Una empresa quiere invertir en productos financieros un mínimo de un millón de euros y un máximo de seis millones de euros. La rentabilidad que obtiene viene dada en función de la cantidad invertida, *x*, por la siguiente expresión:

$$R(x)=\begin{cases} x-2 & si \quad 1\le x<2 \\ -x^2+10x-16 & si \quad 2\le x\le 6 \end{cases}$$

donde tanto *x*, como $R(x)$, están expresadas en millones de euros.

a) Estudie la continuidad de la función $R(x)$.

b) Esboce la gráfica de la función.

c) ¿Qué cantidad debe invertir para obtener la máxima rentabilidad y a cuánto asciende ésta? ¿Para qué valores de *x* la rentabilidad es positiva?

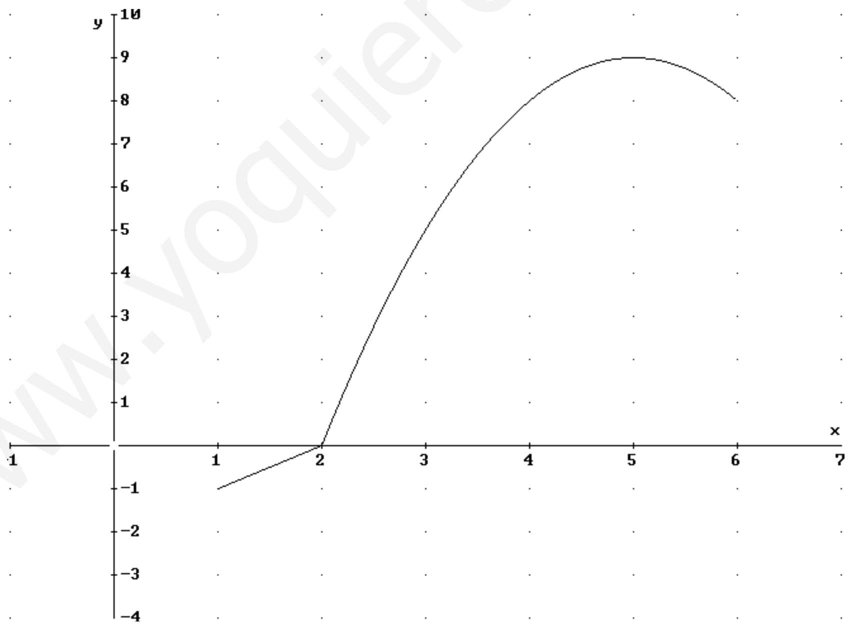
SOCIALES II. 2017 RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Estudiamos primero la continuidad en $x=2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} x-2=0 \\ \lim_{x\to 2^+} -x^2+10x-16=0 \end{array}\right\} \Rightarrow R(2)=\lim_{x\to 2} R(x)=0 \Rightarrow \text{ Es continua}$$

b) Hacemos el dibujo de la función



c) Debe invertir 5 millones de euros y la rentabilidad sería de 9 millones de euros. La rentabilidad es positiva para los valores de *x* mayores de 2.

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} ax-3x^2 & si \quad x\le 1 \\ 2x^2+b & si \quad x>1 \end{cases}$

a) Calcule los valores de *a* y *b* para que la función *f* sea derivable en $x=1$.
b) Para $a=3$ y $b=-2$, estudie la monotonía y curvatura de la función *f*.
SOCIALES II. 2017 RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Si la función es derivable en $x=1$, entonces es continua en $x=1$. Estudiamos la continuidad en $x=1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} ax-3x^2=a-3 \\ \lim_{x\to 1^+} 2x^2+b=2+b \end{array}\right\} \Rightarrow a-3=2+b\Rightarrow a-b=5$$

Estudiamos la derivabilidad en $x=1$. Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} a-6x & si \quad x<1 \\ 4x & si \quad x>1 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=a-6 \\ f'(1^+)=4 \end{array}\right\} \Rightarrow a-6=4\Rightarrow a=10$$

Luego, tenemos que: $a=10$ y $b=5$

b) La función es: $f(x)=\begin{cases} 3x-3x^2 & si \quad x\le 1 \\ 2x^2-2 & si \quad x>1 \end{cases}$

Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $f'(x)=\begin{cases} 3-6x & si \quad x<1 \\ 4x & si \quad x>1 \end{cases}$

$$3-6x=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}. \qquad ; \qquad 4x=0\Rightarrow x=0$$

	$(-\infty,\frac{1}{2})$	$\left(\frac{1}{2},1\right)$	$(1,+\infty)$
Signo $f'(x)$	+	−	+
Función	C	D	C

La función es creciente en $(-\infty,\frac{1}{2})\cup(1,+\infty)$. Decreciente en $\left(\frac{1}{2},1\right)$ y tiene un máximo en $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero: $f''(x)=\begin{cases} -6 & si \quad x<1 \\ 4 & si \quad x>1 \end{cases}$

No hay ningún valor que anule la segunda derivada

	$(-\infty,1)$	$(1,+\infty)$
Signo $f''(x)$	−	+
Función	Cn	Cx

La función es cóncava en $(-\infty,1)$. Convexa $(1,+\infty)$ y tiene un punto de inflexión en $(1,0)$

Sea la función $f(x)=x^3+ax^2+bx$
a) Halle a y b sabiendo que la función tiene un mínimo en el punto de abscisa $x=-1$ y un punto de inflexión en el punto de abscisa $x=-2$.
b) Para $a=6$ y $b=9$, halle los puntos de corte con los ejes, estudie la monotonía y extremos y esboce la gráfica de la función.
SOCIALES II. 2017. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera y segunda derivada

$$f(x)=x^3+ax^2+bx \quad ; \quad f'(x)=3x^2+2ax+b \quad ; \quad f''(x)=6x+2a$$

- Mínimo en $x=-1 \Rightarrow f'(-1)=0 \Rightarrow 3\cdot(-1)^2+2a\cdot(-1)+b=0 \Rightarrow -2a+b=-3$

- Punto de inflexión en $x=-2 \Rightarrow f''(-2)=0 \Rightarrow 6\cdot(-2)+2a=0 \Rightarrow 2a=12$

Resolviendo el sistema, tenemos que: $a=6$; $b=9$

b) Corte con el eje X $\Rightarrow x^3+6x^2+9x=0 \Rightarrow x=0$; $x=-3 \Rightarrow (0,0)$; $(-3,0)$
Corte con el eje Y $\Rightarrow y=0 \Rightarrow (0,0)$

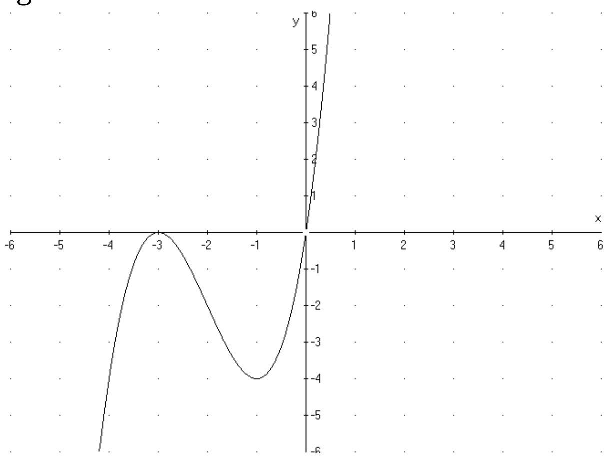
Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$f'(x)=3x^2+12x+9=0 \Rightarrow x=-1$; $x=-3$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,-1)$	$(-1,\infty)$
Signo y'	+	—	+
Función	C	D	C

$\downarrow$ Máximo $(-3,0)$ $\downarrow$ mínimo $(-1,-4)$

Hacemos la representación gráfica.



Se consideran las siguientes funciones: $f(x)=\dfrac{5x-16}{x}$ y $g(x)=x^2$

a) Determine la abscisa del punto donde se verifique $f'(x)=g'(x)$.

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de cada función en el punto de abscisa $x=2$ y determine el punto de corte de ambas rectas tangentes, si existe.

SOCIALES II. 2017. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos las derivadas de las dos funciones y las igualamos

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=\dfrac{5x-5x+16}{x^2}=\dfrac{16}{x^2} \\ g'(x)=2x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{16}{x^2}=2x \Rightarrow x^3=8 \Rightarrow x=2$$

b) Calculamos las rectas tangentes

La recta tangente a $f(x)=\dfrac{5x-16}{x}$ en $x=2$ es $y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2)$

$$f(2)=\frac{10-16}{2}=-3$$

$$f'(x)=\frac{16}{x^2} \Rightarrow f'(2)=\frac{16}{4}=4$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y+3=4\cdot(x-2) \Rightarrow y=4x-11$

La recta tangente a $g(x)=x^2$ en $x=2$ es $y-g(2)=g'(2)\cdot(x-2)$

$$g(2)=2^2=4$$

$$g'(x)=2x \Rightarrow g'(2)=2\cdot 2=4$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-4=4\cdot(x-2) \Rightarrow y=4x-4$

Vemos que las dos rectas son paralelas ya que tienen la misma pendiente, luego, no se cortan.