UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CURSO 2012-2013

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones:	**a) Duración: 1 hora y 30 minutos.**
	b) Elija una de las dos opciones propuestas y conteste los ejercicios de la opción elegida.
	c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima que le corresponde.
	d) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos.
	e) Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin su ayuda. Justifique las respuestas.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sea R la región factible definida por las siguientes inecuaciones $x \geq 3y$, $x \leq 5$, $y \geq 1$.

a) **(0.5 puntos)** Razone si el punto (4.5, 1.55) pertenece a R.

b) **(1.5 puntos)** Dada la función objetivo $F(x, y) = 2x - 3y$, calcule sus valores extremos en R.

c) **(0.5 puntos)** Razone si hay algún punto de R donde la función F valga 3.5. ¿Y 7.5?

EJERCICIO 2

En una empresa de montajes el número de montajes diarios realizados por un trabajador depende de los días trabajados según la función $M(t) = \dfrac{11t+17}{2t+12}$, $t \geq 1$, donde t es el número de días trabajados.

a) **(0.5 puntos)** ¿Cuántos montajes realiza el primer día? ¿Cuántos días necesitará para realizar cinco montajes diarios?

b) **(0.75 puntos)** ¿Qué ocurriría con el número de montajes diarios si trabajara indefinidamente?

c) **(0.75 puntos)** El dueño de la empresa cree que el número de montajes diarios aumenta con los días de trabajo. Estudiando la función, justifique si es cierta dicha creencia.

d) **(0.5 puntos)** Dibuje la gráfica de la función.

EJERCICIO 3

Se cree que hay una vuelta hacia estilos de baile más populares, por lo que se realiza una encuesta a estudiantes de bachillerato, resultando que a140% les gusta la salsa, al 30% les gusta el merengue y al 10% les gusta tanto la salsa corno el merengue.

a) **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que a un estudiante le guste el merengue si le gusta la salsa?

b) **(0.75 puntos)** ¿Y la de que a un estudiante le guste el merengue si no le gusta la salsa?

c) **(1 punto)** ¿Son independientes los sucesos "gustar la salsa" y "gustar el merengue"? ¿Son compatibles?

EJERCICIO 4

(2.5 puntos) En una bodega utilizan una máquina que debe envasar el vino en botellas con un contenido de 750 ml. Para comprobar si esa máquina funciona correctamente, se toma una muestra de 36 botellas y se observa que el contenido medio de las mismas es de 748 ml. Suponiendo que la variable "contenido" sigue una distribución Normal con varianza 25, analice mediante un contraste de hipótesis bilateral (H_0: $\mu = 750$) si se puede aceptar, con un nivel de significación de 0.05, que la máquina envasadora funciona correctamente.

Instrucciones:	a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
	b) Elija una de las dos opciones propuestas y conteste los ejercicios de la opción elegida.
	c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima que le corresponde.
	d) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos.
	e) Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin su ayuda. Justifique las respuestas.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & 0\\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -1\\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

a) **(1.5 puntos)** Resuelva la ecuación matricial $(2A+B)\cdot X=3A-B$.

b) **(1 punto)** Determine en cada caso la dimensión de la matriz D para que se puedan realizar las siguientes operaciones: $C\cdot D+A$, $C^t\cdot D\cdot C$, $D\cdot C^t$, $C\cdot D\cdot C^t$.

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2-bx+1 & \text{si } x\le 2\\ 2x+a & \text{si } x>2\end{cases}$.

a) **(1.5 puntos)** Determine los valores de a y b para que dicha función sea continua en $x=2$ y, además, tenga un mínimo en $x=1$.

b) **(1 punto)** Para $a=2$ y $b=6$, determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=-2$.

EJERCICIO 3

El 50% de los préstamos que concede un banco son para vivienda, el 30% para industria y el 20% para consumo. No se pagan el 20% de los préstamos para vivienda, el 15% de los préstamos para industria y el 70% de los préstamos para consumo.

a) **(1 punto)** Si se elige al azar un préstamo, calcule la probabilidad de que se pague.

b) **(0.75 puntos)** Se elige un préstamo al azar que resulta impagado, ¿cuál es la probabilidad de que sea un préstamo para consumo?

c) **(0.75 puntos)** Ante un préstamo impagado el director del banco afirma que es más probable que sea para vivienda que para consumo, ¿lleva razón el director?

EJERCICIO 4

El gasto mensual de las familias de un municipio se distribuye según una variable Normal con desviación típica igual a 180 euros. Seleccionadas 30 familias al azar, han tenido un gasto medio mensual de 900 euros.

a) **(1.25 puntos)** Calcule un intervalo de confianza para el gasto medio mensual de las familias de ese municipio con un nivel de confianza del 98%.

b) **(1.25 puntos)** Calcule el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el gasto medio mensual de las familias con un error no superior a 60 euros, con el mismo nivel de confianza.

OPCIÓN A
SOLUCIONES

EJERCICIO 1

Sea R la región factible definida por las siguientes inecuaciones $x \geq 3y$, $x \leq 5$, $y \geq 1$.

a) **(0.5 puntos)** Razone si el punto (4.5, 1.55) pertenece a R.

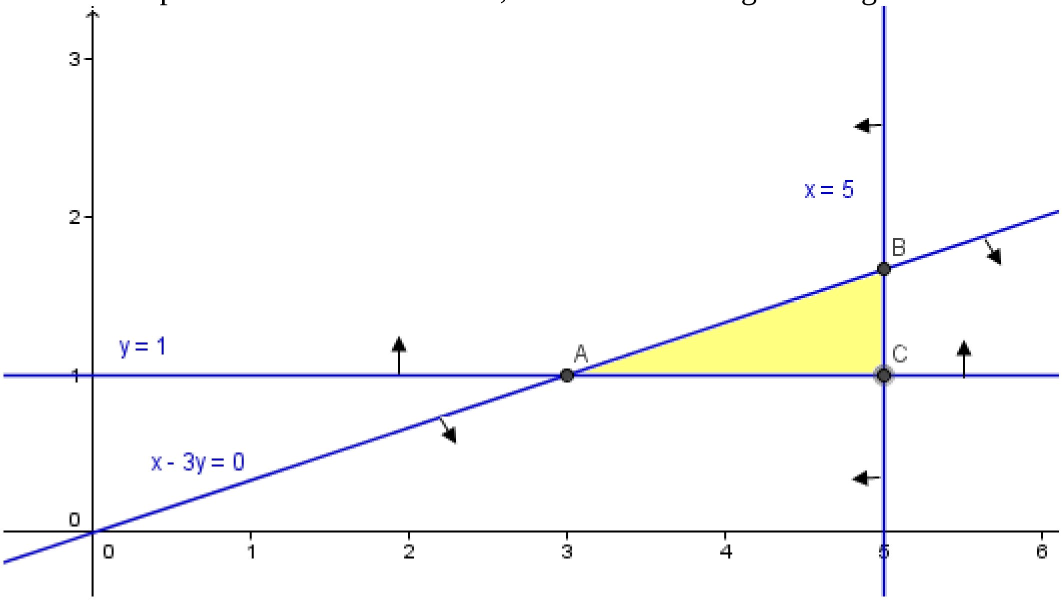
Basta comprobar si verifican las tres inecuaciones que definen a R:

Para la primera $x \geq 3y$: $4.5 \geq 3 \cdot 1.55 \iff 4.5 \geq 4.65$ lo que no es cierto.

Por lo que no puede pertenecer a R, dado que hay al menos una de las tres inecuaciones que no es verificada (ya no hace falta continuar con las otras dos).

b) **(1.5 puntos)** Dada la función objetivo $F(x, y) = 2x – 3y$, calcule sus valores extremos en R.

Dibujamos la región factible R. Para ello, trazamos cada una de las tres rectas resultantes de cambiar el signo de desigualdad por un igual. Cada recta divide al plano en dos semiplanos, uno de los cuales, tan sólo, verifica la inecuación correspondiente. Podemos deducir cuál de ellos es de dos formas: una es comprobando si un punto cualquiera que no está sobre la recta en cuestión, y del que sabemos en cuál de los dos semiplanos se ubica, verifica la inecuación. Si lo hace, el semiplano en que está el punto elegido es el que soluciona la inecuación; de lo contrario, es el otro. La otra forma, consiste en despejar y en la inecuación, siguiendo las propiedades de desigualdades (si pasamos multiplicando o dividiendo un número al otro miembro, cambia el sentido de la desigualdad) y si resulta que $y \leq$ *resto de la expresión en x*, es que los puntos solución están *por debajo* de la recta, y están *por encima* en caso contrario. Señalamos con flechas el semiplano solución para cada una de las rectas, obteniendo así el gráfico siguiente:



A continuación, calculamos las coordenadas de los *vértices*, o sea, las intersecciones de las distintas rectas.

- A es la intersección de $\left.\begin{array}{r} x = 3y \\ y = 1 \end{array}\right\}$ Sustituyendo $y = 1$ en la primera ecuación obtenemos que $x = 3 \Rightarrow \boxed{A(3, 1)}$.
- B se obtiene de $\left.\begin{array}{r} x = 3y \\ x = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow 5 = 3y \Rightarrow y = 5/3 \Rightarrow \boxed{B(5, 5/3)}$.
- C es intersección de $x = 5$ con $y = 1$. Por tanto: $\boxed{C(5, 1)}$.

Por último, calculamos el valor de $F(x, y)$ en cada uno de los tres vértices. El método nos dice que el valor máximo obtenido al hacerlo nos da el máximo de F en la región factible, y dicho máximo se alcanza en el vértice del que proceda, o en todos y cada uno de los puntos que unen los dos vértices afectados, en el caso de que dicho máximo se alcance en dos vértices diferentes. Y análogo para el mínimo. Así:

- $F(A) = F(3, 1) = 2\cdot 3 - 3\cdot 1 = 6 - 3 = 3$.
- $F(B) = F(5, 5/3) = 2\cdot 5 - 3\cdot\dfrac{5}{3} = 10 - 5 = 5$.
- $F(C) = F(5, 1) = 2\cdot 5 - 3\cdot 1 = 10 - 3 = 7$.

Así que $\boxed{\text{el máximo valor es 7 y se alcanza en (5, 1), y el mínimo es 3, en (3,1)}}$.

c) **(0.5 puntos)** Razone si hay algún punto de R donde la función F valga 3.5. ¿Y 7.5?

Como, según los cálculos anteriores, F toma en R valores comprendidos entre 3 y 7, $\boxed{\text{puede haber punto en los que valga 3.5 pero ninguno donde tome el valor 7.5}}$ (mayor que el máximo dentro de la región factible).

EJERCICIO 2

En una empresa de montajes el número de montajes diarios realizados por un trabajador depende de los días trabajados según la función $M(t) = \dfrac{11t+17}{2t+12}$, $t \geq 1$, donde t es el número de días trabajados.

a) **(0.5 puntos)** ¿Cuántos montajes realiza el primer día? ¿Cuántos días necesitará para realizar cinco montajes diarios?

Para $t = 1$, $M(1) = \dfrac{11\cdot 1+17}{2\cdot 1+12} = \dfrac{28}{14} = 2$. $\boxed{\text{Realiza 2 montajes el primer día}}$.

Si $M(t) = 5 \Rightarrow \dfrac{11t+17}{2t+12} = 5 \Rightarrow 11t + 17 = 5(2t + 12) \Rightarrow 11t + 17 = 10t + 60 \Rightarrow$

$\Rightarrow 11t - 10t = 60 - 17 \Rightarrow t = 43$. $\boxed{\text{Necesita 43 días para realizar 5 montajes diarios}}$.

b) **(0.75 puntos)** ¿Qué ocurriría con el número de montajes diarios si trabajara indefinidamente?

Cuando el tiempo aumenta indefinidamente (hacia $+\infty$):

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{11t+17}{2t+12} = \lim_{t\to\infty}\frac{11t}{2t} =$$

porque 17 es despreciable frente a $11t$ cuando $t \to \infty$, e igual ocurre en el denominador. Simplificando:

$$= \lim_{t\to+\infty}\frac{11t}{2t} = \boxed{\frac{11}{2}}$$

O sea, el número de montajes $\boxed{\text{tiende a ser algo más de 5 (11/2 = 5,5), concretamente, 5 montajes y la mitad de otro}}$.

c) **(0.75 puntos)** El dueño de la empresa cree que el número de montajes diarios aumenta con los días de trabajo. Estudiando la función, justifique si es cierta dicha creencia.

- Dominio. No se puede anular el denominador. Así: $2t + 12 = 0 \Rightarrow t = -6$. Pero como $t \geq 1$ por las condiciones del problema, este resultado no influye. Por tanto, $D(M) = [1, +\infty)$. Y aquí es continua, por ser función elemental.
- Cortes con los ejes. No corta a OY porque $t = 0$ no es un punto del dominio. Y si $M(t) = 0 \Rightarrow 11t + 17 = 0$ (para que una fracción se anule, debe hacerlo el

numerador, sin que el denominador lo haga a la vez) $\Rightarrow$ t = –17/11, que no está en el dominio $\Rightarrow$ <u>Tampoco corta al eje de ordenadas</u>.

- <u>Asíntotas</u>. <u>No tiene A. Verticales</u>, por ser continua en su dominio. Como $\lim_{t\to+\infty} \frac{11t+17}{2t+12} = \frac{11}{2}$ $\Rightarrow$ <u>y = 11/2 es A.Horizontal</u>. Al tener horizontal, no calculamos la oblicua porque saldría la misma.
- <u>Monotonía</u>. $M'(t) = \frac{11(2t+12)-2(11t+17)}{(2t+12)^2} = \frac{22t+132-22t-34}{(2t+12)^2} =$

  $= \frac{98}{(2t+12)^2}$

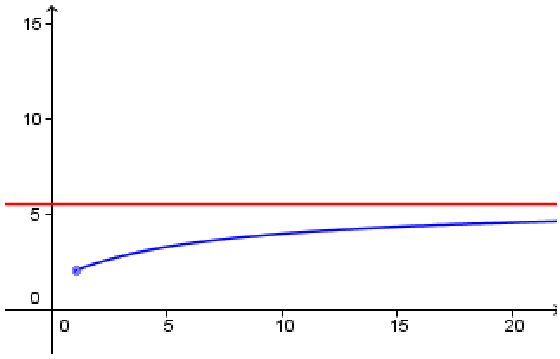
  Como no hay discontinuidades, ni de M ni de su derivada, ya que $t = -6 \notin$ D(M), siendo el denominador siempre positivo (está al cuadrado y no se anula en el dominio), la derivada siempre es positiva, al serlo también el numerador, por lo que <u>la función es siempre creciente, sin máximos ni mínimos relativos</u>.

Como consecuencia de todo ello, el número de montajes aumenta con los días de trabajo, pero no indefinidamente, porque se topa con la asíntota horizontal, que queda por encima de la función (ya que al ser siempre creciente debe abordarla desde abajo). Es decir, $\boxed{\text{la afirmación es cierta pero con límite en 5,5 montajes}}$ (que no se alcanza, porque no se llega al infinito).

d) **(0.5 puntos)** Dibuje la gráfica de la función.

- <u>Curvatura</u>. $M''(t) = \frac{-98 \cdot 2(2t+12) \cdot 2}{(2t+12)^4} = \frac{-392}{(2t+12)^3}$

  El numerador es siempre negativo. El denominador no se anula en $t \geq 1$, por lo que en todo el dominio mantiene signo. Lo averiguamos, entonces, con un valor arbitrario de t del dominio, por ejemplo t = 2: positivo. Así que la derivada segunda es siempre negativa y la función, por tanto, <u>cóncava</u>.



Aplicando el estudio hecho en el apartado anterior más éste, obtenemos la gráfica de la función.

<u>EJERCICIO 3</u>

Se cree que hay una vuelta hacia estilos de baile más populares, por lo que se realiza una encuesta a estudiantes de bachillerato, resultando que al 40% les gusta la salsa, al 30% les gusta el merengue y al 10% les gusta tanto la salsa corno el merengue.

a) **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que a un estudiante le guste el merengue si le gusta la salsa?

Siendo los sucesos S = que a un estudiante le guste la *salsa*, M = que le guste el *merengue*, nos dicen que:

$$P(S) = 0.4 \quad P(M) = 0.3 \quad P(S \cap M) = 0.1$$

Nos piden $P(M / S)$, ya que sabemos seguro que le gusta la *salsa*. Así:

$$P(M/S) = \frac{P(M \cap S)}{P(S)} = \frac{0.1}{0.4} = \boxed{\frac{1}{4} = 0.25}$$

b) **(0.75 puntos)** ¿Y la de que a un estudiante le guste el merengue si no le gusta la salsa?

$$P(M/S^c) = \frac{P(M \cap S^C)}{P(S)} = \frac{P(M-S)}{P(S)} = \frac{P(M-S)}{P(S)} = \frac{P(M)-P(M\cap S)}{P(S)} = \frac{0.3-0.1}{0.4} =$$

$$= \frac{0.2}{0.4} = \boxed{\frac{1}{2} = 0.5}$$

c) **(1 punto)** ¿Son independientes los sucesos "gustar la salsa" y "gustar el merengue"? ¿Son compatibles?

Como $P(M) \neq P(M / S)$, ya que el primero vale 0.3 y el segundo 0.25, según hemos visto $\Rightarrow$ $\boxed{\text{no son independientes}}$ (el hecho de que uno de los sucesos se verifique cambia la probabilidad de que lo haga el otro).

Como $P(S \cap M) = 0.1 \neq 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{son compatibles}}$ (se pueden presentar a la vez).

EJERCICIO 4

(2.5 puntos) En una bodega utilizan una máquina que debe envasar el vino en botellas con un contenido de 750 ml. Para comprobar si esa máquina funciona correctamente, se toma una muestra de 36 botellas y se observa que el contenido medio de las mismas es de 748 ml. Suponiendo que la variable "contenido" sigue una distribución Normal con varianza 25, analice mediante un contraste de hipótesis bilateral *(H_0: μ = 750)* si se puede aceptar, con un nivel de significación de 0.05, que la máquina envasadora funciona correctamente.

Las hipótesis ya nos las dicen: $\begin{cases} H_0 : \mu = 750 \\ H_1 : \mu \neq 750 \end{cases}$

La distribución en estudio es Normal, y el tamaño muestral mayor que 30, por lo que tenemos doble razón para aplicar el Teorema Central del Límite, en el que se basa el contraste.

Como es bilateral, la región de aceptación será:

$$RA_\alpha = \left(\mu_0 - z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\ \ \mu_0 + z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$$

$\mu_0 = 750.$

$\sigma_0 = \sqrt{25} = 5$

$n = 36$

$\alpha = 0.05 \Rightarrow \alpha/2 = 0.025 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.075 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$

Como consecuencia de todo ello:

$$RA_{0.05} = \left(750 - 1.96\frac{5}{\sqrt{36}},\ \ 750 + 1.96\frac{5}{\sqrt{36}}\right) = (748.37,\ 751.63)$$

Dado que la media muestral $\bar{x} = 748 \notin RA_{0.05}$ $\boxed{\text{rechazamos la hipótesis nula con un riesgo de equivocarnos del 0.05}}$. Es decir, la máquina no funciona correctamente, con dicho margen de error.

OPCIÓN B
SOLUCIONES

EJERCICIO 1

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -1 \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) **(1.5 puntos)** Resuelva la ecuación matricial $(2A + B) \cdot X = 3A - B$.

Si la matriz $2A + B$ es *regular*, esto es, tiene inversa, podremos multiplicar la igualdad por la izquierda (el producto de matrices no es conmutativo) en ambos miembros por ella, quedándonos que:

$$(2A + B) \cdot X = 3A - B \;\Rightarrow\; (2A + B)^{-1} (2A + B) \cdot X = (2A + B)^{-1} (3A - B) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; I{\cdot}X = (2A + B)^{-1} (3A - B) \;\Rightarrow\; X = (2A + B)^{-1} (3A - B) \qquad (1)$$

Veamos si podemos obtener dicho resultado.

$$2A + B = 2\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -1 \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -1 \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

Vamos a llamar D a esta matriz, por comodidad. Como:

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \;\Rightarrow\; \exists D^{-1}. \text{ Calculémosla.}$$

$$D^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \text{Adj}(D^t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; D^{-1} = \frac{1}{|D|}\,\text{Adj}(D^t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Por otro lado:

$$3A - B = 3\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -1 \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 \\ -\frac{6}{5} & \frac{9}{5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -1 \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

En definitiva, sustituyendo en (1):

$$X = (2A + B)^{-1} (3A - B) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

b) **(1 punto)** Determine en cada caso la dimensión de la matriz D para que se puedan realizar las siguientes operaciones: $C \cdot D + A$, $C^t \cdot D \cdot C$, $D \cdot C^t$, $C \cdot D \cdot C^t$.

- $C \cdot D + A$: Como dim(C) = 2 x 3, para poder efectuar $C{\cdot}D$ se precisa que D tenga 3 filas. Si tiene k columnas, dim(D) = 3 x k $\Rightarrow$ dim($C{\cdot}D$) = 2 x k. Para poder sumar dicho resultado con A, cuya dimensión es 2 x 2, se requiere que ambas tengan la misma dimensión. Así que $k = 2$, por lo que $\boxed{\text{dim}(D) = 3 \text{ x } 2}$.
- $C^t \cdot D \cdot C$: dim(C^t) = 3 x 2 y dim(C) = 2 x 3. Luego $\boxed{\text{dim}(D) = 2 \text{ x } 2}$. El resultado final será 3 x 3.
- $D \cdot C^t$: Como dim(C^t) = 3 x 2, D debe tener 3 columnas y es indiferente su número de filas: $\boxed{\text{dim}(D) = m \text{ x } 3, \text{ cualquiera que sea } m}$. El resultado de la operación será m x 2.

- $C \cdot D \cdot C^t$: D debe tener las columnas de C y las filas de C^t: $\boxed{\dim(D) = 3 \text{ x } 3}$.

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - bx + 1 & \text{si} \quad x \le 2 \\ 2x + a & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$.

a) **(1.5 puntos)** Determine los valores de a y b para que dicha función sea continua en $x = 2$ y, además, tenga un mínimo en $x = 1$.

Continuidad

- Zona $(-\infty, 2)$: Es continua en toda la zona por coincidir con una función polinómica, las cuales no tienen discontinuidades. Y lo es $\forall b$.
- Zona $(2, +\infty)$: Es continua en toda la zona por idéntica razón, cualquiera que sea el valor de a.
- $x = 2$: 1) $\exists f(2)) = 4 - 2b + 1 = 5 - 2b$; 2) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(x^2 - bx + 1) = 5 - 2b$; $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(2x + a) = 2 + a$. Por tanto, $\exists \lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$ si y sólo si $\boxed{5 - 2b = 2 + a}$ por lo que, si eso se cumple, será continua.

Por tanto, f es continua en todo $\mathbb{R}$ con la última condición que hemos expresado. Luego, así, puede ser derivable.

Derivabilidad

Podemos derivar directamente en intervalos *abiertos*:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - b & \text{si} \quad x < 2 \\ 2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Nos faltaría averiguar si f es derivable en $x = 2$, o las condiciones para que ello ocurra. Pero no es ése, en principio, el objetivo del enunciado, sino que tenga un mínimo (relativo) en $x = 1$. Para ello, al ser continua f' en un entorno de $x = 1$, necesitará anularse, como poco. De esta forma:

$$f'(1) = 2 - b = 0 \iff \boxed{b = 2}.$$

Además, en un entorno de $x = 1$, tendremos que $f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow$ Lo que hay en $x = 1$ es, en efecto, un mínimo relativo.

Sólo nos resta sustituir en la igualdad que se exigía para la continuidad:

$$5 - 2 \cdot 2 = 2 + a \Rightarrow 5 - 4 - 2 = a \Rightarrow \boxed{a = -1}.$$

En consecuencia, $\boxed{a = -1 \text{ y } b = 2}$.

b) **(1 punto)** Para $a = 2$ y $b = 6$, determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = -2$.

Tenemos: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 1 & \text{si} \quad x \le 2 \\ 2x + 2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$ y $f'(x) = \begin{cases} 2x - 6 & \text{si} \quad x < 2 \\ 2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$, a falta de averiguar si $\exists f'(2)$. Pero como el punto que estudiamos es $x = -2$, nos mantenemos siempre a la izquierda y lejos de $x = 2$, por lo que no vamos a necesitar saberlo.

- Punto de tangencia: $f(-2) = 4 + 12 + 1 = 17$. Es: $(-2, 17)$.
- Pendiente de la tangente: $m = f'(-2) = -4 - 6 = -10$.

Usando la ecuación punto-pendiente, la tangente será:

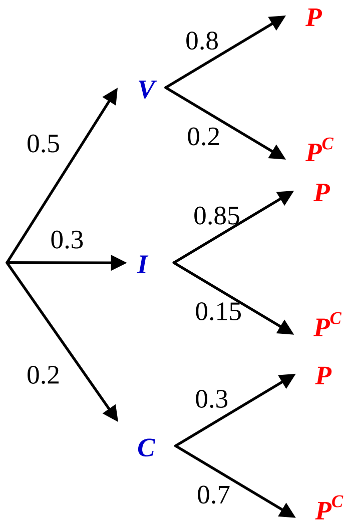
$$y - 17 = -10(x + 2) \Rightarrow y = -10x - 29 + 17 \Rightarrow \boxed{y = -10x - 12}.$$

EJERCICIO 3

El 50% de los préstamos que concede un banco son para vivienda, el 30% para industria y el 20% para consumo. No se pagan el 20% de los préstamos para vivienda, el 15% de los préstamos para industria y el 70% de los préstamos para consumo.

a) **(1 punto)** Si se elige al azar un préstamo, calcule la probabilidad de que se pague.

Podemos crear un árbol con el enunciado del problema, lo que nos facilitará su resolución. Así, según el Teorema de la Probabilidad Total:



$$P(P) = 0.5·0.8 + 0.3·0.85 + 0.2·0.3 = \boxed{0.715}$$

b) **(0.75 puntos)** Se elige un préstamo al azar que resulta impagado, ¿cuál es la probabilidad de que sea un préstamo para consumo?

Aplicando el Teorema de Bayes, que no es más que usar el axioma de la probabilidad condicionada:

$$P(C/P^C) = \frac{P(C \cap P^C)}{P(P^C)} = \frac{0.2·0.7}{1-0.715} = \boxed{0.4912}$$

c) **(0.75 puntos)** Ante un préstamo impagado el director del banco afirma que es más probable que sea para vivienda que para consumo, ¿lleva razón el director?

Ya sabemos cuál es la probabilidad de que un préstamo sea de consumo sabiendo que es impagado. Veamos cuál es para vivienda:

$$P(V/P^C) = \frac{P(V \cap P^C)}{P(P^C)} = \frac{0.5·0.2}{1-0.715} = \boxed{0.3509}$$

Por tanto, es más probable que, sabiendo que un préstamo es impagado, sea de consumo que de vivienda, por lo que $\boxed{\text{no lleva razón el director}}$.

EJERCICIO 4

El gasto mensual de las familias de un municipio se distribuye según una variable Normal con desviación típica igual a 180 euros. Seleccionadas 30 familias al azar, han tenido un gasto medio mensual de 900 euros.

a) **(1.25 puntos)** Calcule un intervalo de confianza para el gasto medio mensual de las familias de ese municipio con un nivel de confianza del 98%.

El intervalo de confianza para la media poblacional es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

La fórmula anterior es aplicable porque estamos en las condiciones del Teorema Central del Límite, ya que $n \geq 30$ y, adicionalmente, la población es Normal. Conocemos una muestra donde $n = 30$ y $\bar{x} = 900$. También sabemos que la d.t. poblacional vale $\sigma = 180$. Como el nivel de confianza es del 98% $\Rightarrow$ $1 - \alpha = 0.98$ $\Rightarrow$ $\alpha = 0.02$ $\Rightarrow$ $\alpha/2 = 0.01$ $\Rightarrow$ $1 - \alpha/2 = 0.99$ $\Rightarrow$ $z_{\alpha/2} = 2.33$, según las tablas de la N(0;1). De esta forma, el intervalo pedido es:

$$\left(900 - 2.33\frac{180}{\sqrt{30}},\ 900 - 2.33\frac{180}{\sqrt{30}}\right) = \boxed{(823.428,\ 976.572)}$$

b) **(1.25 puntos)** Calcule el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el gasto medio mensual de las familias con un error no superior a 60 euros, con el mismo nivel de confianza.

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{n} = \frac{z_{\alpha/2}\sigma}{E} \quad\Rightarrow\quad n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2.33\cdot 180}{60}\right)^2 = 48.8601$$

Si n toma dicho valor, $E = 60$. Para valores de n mayores que dicho valor, como n está en el denominador de la fórmula de E en función de n antes detallada, al dividir por un número mayor el resultado E disminuye. Luego el primer valor válido de n para el que el error E no supera 60 es $\boxed{n = 49}$ (el valor obtenido no es posible como tamaño de una muestra).