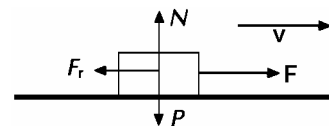


## Problemas de trabajo

1.- Calcula el trabajo que debe hacer el motor de un coche para recorrer 1 km con velocidad constante a pesar del rozamiento. (Supón que el coche tiene una masa de 1.000 kg y que el coeficiente de rozamiento con el suelo es  $\mu = 0'3$ .)

Datos:  $\Delta r = 1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$ ,  $m = 1000 \text{ kg}$ ,  $\mu = 0'3$

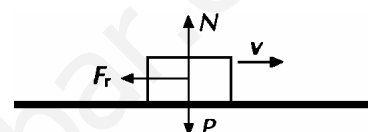


$$\left. \begin{array}{l} \sum F = 0 \\ F - F_r = 0 \\ F = F_r \end{array} \right\} \begin{array}{l} F_r = \mu \cdot N = \mu \cdot m \cdot g = 0'3 \cdot 1000 \cdot 9'8 = 2940 \text{ N} \\ F = F_r = 2940 \text{ N} \\ W = F \cdot \Delta r \cdot \cos \theta = 2940 \cdot 1000 \cdot \cos 0^\circ = 2.940.000 \text{ J} \end{array}$$

2.- Calcula el trabajo que realizan los frenos de un tren de cien toneladas si lo detienen completamente en doscientos metros. Imagina que el coeficiente de rozamiento vale 0'1. ¿Y si tiene doscientas toneladas? ¿Y si frena en 300 m? ¿Cómo explicas que el trabajo sea mayor? Datos:  $\Delta r = 200 \text{ m}$ ,  $m = 100 \text{ T} = 100.000 \text{ kg}$ ,  $\mu = 0'1$

a)  $F_r = \mu \cdot m \cdot g = 0'1 \cdot 100000 \cdot 9'8 = 98000 \text{ N}$

$W = F \cdot \Delta r \cdot \cos \theta = 98000 \cdot 200 \cdot \cos 180^\circ = -19.600.000 \text{ J}$



b)  $W = -39.200.000 \text{ J}$  El doble del caso anterior.

c)  $W = 98.000 \cdot 300 = -29.400.000 \text{ J}$

En el caso b) es mayor porque la masa del objeto es mayor, en el caso c) es mayor porque el desplazamiento ha sido mayor y por tanto se ha aplicado la fuerza durante más tiempo.

3.- Una fuerza de 25 N ha actuado sobre un cuerpo desplazándolo 3 m. Calcula el trabajo realizado en los siguientes casos: a) La fuerza tiene la misma dirección y sentido que el desplazamiento. b) La fuerza forma un ángulo de  $30^\circ$  con el desplazamiento. c) La fuerza forma un ángulo de  $180^\circ$  con el desplazamiento.

Datos:  $\Delta r = 3 \text{ m}$ ,  $F = 25 \text{ N}$

a)  $W = F \cdot \Delta r \cdot \cos \theta = 25 \cdot 3 \cdot \cos 0^\circ = 25 \cdot 3 \cdot 1 = 75 \text{ J}$

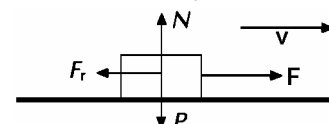
b)  $W = F \cdot \Delta r \cdot \cos \theta = 25 \cdot 3 \cdot \cos 30^\circ = 64'95 \text{ J}$

c)  $W = F \cdot \Delta r \cdot \cos \theta = 25 \cdot 3 \cdot \cos 180^\circ = -75 \text{ J}$

4- Un cuerpo se encuentra en reposo en un plano horizontal en el que el coeficiente de rozamiento es  $\mu = 0'1$ . Un niño decide empujarlo con una fuerza de 7 N en la dirección del plano. Si la masa del cuerpo es de 5 kg y el niño aplica la fuerza durante 8 s, calcula el trabajo realizado por el niño.

Datos:  $\Delta r = 3 \text{ m}$ ,  $F = 7 \text{ N}$ ,  $\mu = 0'1$ ,  $m = 5 \text{ kg}$ ,  $\Delta t = 8 \text{ s}$ ,  $v_1 = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Eje y : } N = P \\ \text{Eje x : } \sum F = m \cdot a \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} F - F_r = m \cdot a \\ F_r = \mu \cdot m \cdot g = 0'1 \cdot 5 \cdot 9'8 = 4'9 \text{ N} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 7 - 4'9 = 5 \cdot a \\ a = \frac{2'1}{5} = 0'42 \text{ m/s}^2 \end{array} \right\}$$



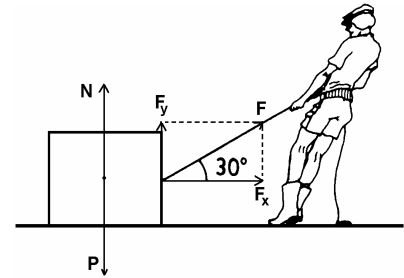
Como el cuerpo describe un M.R.U.A.:  $\Delta x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2 = 0'5 \cdot 0'42 \cdot 8^2 = 13'44 \text{ m}$

$W = F \cdot \Delta r \cdot \cos 0^\circ = 2'1 \cdot 13'44 \cdot 1 = 28'4 \text{ J}$

5.- Antonio arrastra su trineo, de 80 kg de masa, con M.R.U. por un plano horizontal en el que el coeficiente de rozamiento es 0'1. Para ello tira de él mediante una cuerda que forma un ángulo de 30° con la horizontal. ¿Con qué fuerza está tirando? ¿Qué trabajo ha realizado después de recorrer 100 m?

Datos:  $\Delta r = 100 \text{ m}$ ,  $m = 80 \text{ kg}$ ,  $\mu = 0'1$ ,  $\theta = 30^\circ$

$$\left. \begin{array}{l} \text{En el eje y: } N + F_y = P \\ N + F \cdot \sin 30^\circ = m \cdot g \\ N + F \cdot 0'5 = 80 \cdot 9'8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} N + 0'5 \cdot F = 784 \\ N = 784 - 0'5 \cdot F \end{array}$$



En el eje x:  $\sum F = 0$ , porque  $v = \text{cte}$ .

$$\left. \begin{array}{l} F_x = F_r \\ F \cdot \cos 30^\circ = \mu \cdot N \end{array} \right\} \begin{array}{l} F \cdot 0'866 = 0'1 \cdot (784 - 0'5 \cdot F) \\ F \cdot 0'866 = 78'4 - 0'05 \cdot F \end{array} \left\} \begin{array}{l} F \cdot 0'866 + 0'05 \cdot F = 78'4 \\ 0'916 \cdot F = 78'4 \end{array}$$

$$F = \frac{78'4}{0'916} = 85'6 \text{ N}$$

El trabajo que realiza:  $W = F \cdot \Delta r \cdot \cos 0^\circ = 85'6 \cdot 100 \cdot \cos 30^\circ = 7413 \text{ J}$

6.- Un bloque de 50 kg se desliza hacia abajo por un plano inclinado 20°. Si el coeficiente de rozamiento es 0'15, calcula el trabajo que realiza cada una de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo cuando éste desliza 20 cm. Comprueba que la suma de todos los trabajos coincide con el trabajo de la fuerza resultante.

Datos:  $m = 50 \text{ kg}$ ,  $\Delta x = 20 \text{ cm} = 0'2 \text{ m}$ ,  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\mu = 0'15$

$$P_y = m \cdot g \cdot \cos 20^\circ = 50 \cdot 9'8 \cdot \cos 20^\circ = 460'4 \text{ N}$$

$$W = P_y \cdot \Delta r \cdot \cos \theta = 460 \cdot 0'2 \cdot \cos 270^\circ = 0 \text{ J}$$

$$N = P_y = 460'4 \text{ N}$$

$$W = N \cdot \Delta r \cdot \cos \theta = 460 \cdot 0'2 \cdot \cos 90^\circ = 0 \text{ J}$$

$$P_x = m \cdot g \cdot \sin 20^\circ = 50 \cdot 9'8 \cdot \sin 20^\circ = 167'6 \text{ N}$$

$$W = P_x \cdot \Delta r \cdot \cos \theta = 167'6 \cdot 0'2 \cdot \cos 0^\circ = 33'5 \text{ J}$$

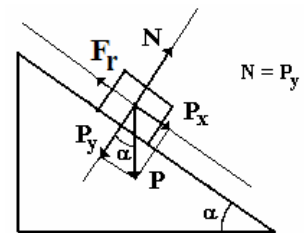
$$F_R = \mu \cdot N = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 20^\circ = 0'15 \cdot 50 \cdot 9'8 \cdot \cos 20^\circ = 69'1 \text{ N}$$

$$W = F_R \cdot \Delta r \cdot \cos \theta = 69'1 \cdot 0'2 \cdot \cos 180^\circ = -13'8 \text{ J}$$

$$W_{\text{total}} = 33'5 - 13'8 = 19'7 \text{ J}$$

$$\sum F = P_y - N + P_x - F_R = 460'4 - 460'4 + 167'6 - 69'1 = 98'5 \text{ N}$$

$$W_{\text{total}} = F \cdot \Delta r \cdot \cos \theta = 98'5 \cdot 0'2 \cdot \cos 0^\circ = 19'7 \text{ J}$$



7.- ¿Qué trabajo recibe en total un cuerpo de 50 kg cuando se desliza 1 m por un plano inclinado 30°. Coeficiente de rozamiento = 0'1.

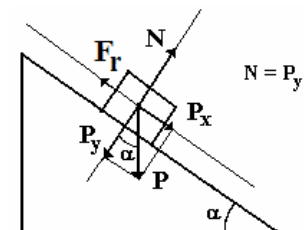
Datos:  $m = 50 \text{ kg}$ ,  $\Delta x = 1 \text{ m}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\mu = 0'1$

$$P_x = m \cdot g \cdot \sin 30^\circ = 50 \cdot 9'8 \cdot \sin 30^\circ = 245 \text{ N}$$

$$F_R = \mu \cdot N = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 30^\circ = 0'1 \cdot 50 \cdot 9'8 \cdot \cos 30^\circ = 42'4 \text{ N}$$

$$\text{La fuerza total: } \sum F = P_x - F_R = 245 - 42'4 = 202'6 \text{ N}$$

$$W = F \cdot \Delta r \cdot \cos 0^\circ = 202'6 \cdot 1 \cdot \cos 0^\circ = 202'6 \text{ J}$$



**8.- Una fuerza de 490 N tira de un bloque, inicialmente en reposo que pesa 20 kg, situado en un plano inclinado 30° sobre la horizontal. La fuerza actúa hacia arriba y paralelamente al plano, y de esta forma el cuerpo recorre 10 m. Se sabe que el coeficiente de rozamiento es 0'2. Calcular: a) el trabajo realizado por la fuerza y su distribución, b) la velocidad adquirida por el cuerpo al final del recorrido c) Trabajo de la fuerza de rozamiento.**

Datos:  $F = 490 \text{ N}$ ,  $m = 20 \text{ kg}$ ,  $\Delta x = 10 \text{ m}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\mu = 0'2$ ,  $v_i = 0$

a) El trabajo realizado por la fuerza aplicada es:  $W = F \cdot \Delta r \cdot \cos 0^\circ = 490 \cdot 10 = 4900 \text{ J}$

Se emplea en vencer el rozamiento y aumentar la energía cinética y potencial del bloque.

b) Aplicando el segundo principio de la dinámica:  $\sum F = m \cdot a$

$$P_x = m \cdot g \cdot \sin 30^\circ = 20 \cdot 9'8 \cdot \sin 30^\circ = 98 \text{ N}$$

$$F_R = \mu \cdot N = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 30^\circ = 0'2 \cdot 20 \cdot 9'8 \cdot \cos 30^\circ = 33'9 \text{ N}$$

La resultante de las fuerzas que actúan sobre el bloque:  $F - F_R - P_x = m \cdot a$

$$490 - 98 - 33'9 = 20 \cdot a \quad \left. \begin{array}{l} 358'1 = 20 \cdot a \\ a = \frac{358'1}{20} = 17'9 \text{ m/s}^2 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta x = v_i \Delta t + 0'5 \cdot a \cdot \Delta t^2 \\ v_F = v_i + a \Delta t \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 10 = 0 + 0'5 \cdot 17'9 \cdot \Delta t^2 \\ v_F = 0 + 17'9 \cdot \Delta t \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 10 = 8'95 \cdot \Delta t^2 \\ v_F = 17'9 \cdot \Delta t \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \Delta t = \sqrt{\frac{10}{8'95}} = 1'06 \text{ s} \\ v_F = 17'9 \cdot 1'06 = 18'9 \text{ m/s} \end{array} \right\}$$

c) El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento:

$$W_R = F_R \cdot \Delta r \cdot \cos 180^\circ = 33'9 \cdot 10 \cdot \cos 180^\circ = -339 \text{ J}$$

**9.- Un cuerpo de 2 kg se mueve a lo largo de una trayectoria cuyos puntos vienen determinados por las ecuaciones paramétricas:  $x = 3t^2$ ,  $y = 3t^3$ ,  $z = -2t$  expresadas en metros. Deducir: a) la ecuación de la velocidad y su módulo, b) el momento lineal del cuerpo, c) el trabajo realizado por la fuerza que actúa sobre ese cuerpo entre los instantes  $t=1$  y  $t=2$  s.**

a) El vector de posición del cuerpo es:  $\vec{r} = 3t^2\vec{i} + 3t^3\vec{j} - 2t\vec{k}$  (S.I.)

$$\text{El vector velocidad es: } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 6t\vec{i} + 9t^2\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\text{El módulo del vector velocidad es: } v = \sqrt{(6t)^2 + (9t^2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{36t^2 + 81t^4 + 4}$$

b) El momento lineal del cuerpo es:  $\vec{p} = m \cdot \vec{v} = 2 \cdot (6t\vec{i} + 9t^2\vec{j} - 2\vec{k}) = 12t\vec{i} + 18t^2\vec{j} - 4\vec{k}$

c) La fuerza que actúa sobre el cuerpo:  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = 12\vec{i} + 36t\vec{j}$

El trabajo realizado es:  $W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$

Como la fuerza no es constante (depende del tiempo) hay que integrar:  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \longrightarrow d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt$

$$W = \int_{t=1}^{t=2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t=1}^{t=2} \vec{F} \cdot \vec{v} \cdot dt = \int_{t=1}^{t=2} (12\vec{i} + 36t\vec{j}) \cdot (6t\vec{i} + 9t^2\vec{j} - 2\vec{k}) \cdot dt = \int_{t=1}^{t=2} (72t\vec{i} + 324t^3\vec{j}) \cdot dt$$

$$= \left[ \frac{72t^2}{2} \right]_{t=1}^{t=2} + \left[ \frac{324t^4}{4} \right]_{t=1}^{t=2} = [36t^2]_{t=1}^{t=2} + [81t^4]_{t=1}^{t=2} = (36(2^2 - 1^2) + 81(2^4 - 1^4)) = 108 + 1215 = 1323 \text{ J}$$

## Cuestiones y problemas de Selectividad

1.- (Junio 2006) Razone si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Según la ley de la gravitación la fuerza que ejerce la Tierra sobre un cuerpo es directamente proporcional a la masa de éste. Sin embargo, dos cuerpos de diferente masa que se sueltan desde la misma altura llegan al suelo simultáneamente.

b) El trabajo realizado por una fuerza conservativa en el desplazamiento de una partícula entre dos puntos es menor si la trayectoria seguida es el segmento que une dichos puntos.

a) Es verdadera. La fuerza que hace que caigan los cuerpos, es el peso, que es proporcional a la masa de la Tierra y a la aceleración de la gravedad del planeta:  $P = m \cdot g$ .

Según el 2º principio de la Dinámica, la aceleración que adquiere un cuerpo sobre el que actúa una fuerza es:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{m \cdot g}{m} = g$$

Aunque es cierto que un cuerpo con mayor masa, es atraído más fuertemente por la Tierra, también tiene mayor inercia. El resultado obtenido señala que la aceleración con la que cae cualquier objeto es la misma independientemente de su masa. Aunque, si hay rozamiento con el aire, la velocidad dependerá de la forma más o menos aerodinámica del objeto.

b) Es falsa. Una fuerza es conservativa si el trabajo,  $W_{A \rightarrow B}$ , que realiza sobre un cuerpo, cuando este pasa de un punto A, a otro B, es el mismo para cualquiera de las trayectorias que siga y solo depende de las posiciones de partida y llegada. Es decir,  $W_{A \rightarrow B}$  es independiente de la trayectoria. El trabajo realizado para trasladar un cuerpo entre dos puntos dados equivale la variación de la energía potencial entre dichos puntos:

$$W_{(A \rightarrow B)} = -\Delta E_p (A \rightarrow B)$$

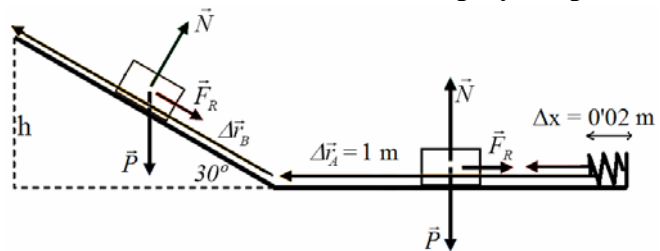
2.- Junio (2006) Un bloque de 2 kg está situado en el extremo de un muelle, de constante elástica  $500 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ , comprimido 20 cm. Al liberar el muelle el bloque se desplaza por un plano horizontal y, tras recorrer una distancia de 1 m, asciende por un plano inclinado  $30^\circ$  con la horizontal. Calcule la distancia recorrida por el bloque sobre el plano inclinado. a) Supuesto nulo el rozamiento. b) Si el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y los planos es 0'1. Dato:  $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

a) Como no actúan fuerzas no conservativas (no hay rozamiento), la energía mecánica se conserva, es decir:  $E_f = E_i$

$$E_{p_{elástica}} \text{ inicial} = E_{p_{gravitatoria}} \text{ final}$$

$$\text{Como: } h = \Delta r_B \cdot \text{sen}30^\circ$$

$$\left. \begin{aligned} 0'5 \cdot k \cdot \Delta x^2 = m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot \Delta r_B \cdot \text{sen}30^\circ \\ 0'5 \cdot 500 \cdot 0'2^2 = 2 \cdot 10 \cdot \Delta r_B \cdot 0'5 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 10 &= 10 \cdot \Delta r_B \\ \Delta r_B &= 1 \text{ m} \end{aligned}$$



b) Cuando actúan fuerzas no conservativas (rozamiento), el principio de conservación de la energía queda:  $E_f = E_i + W_{no \text{ con}}$

La fuerza de rozamiento es diferente en el plano horizontal y inclinado ya que la normal cambia.

$$\text{En el plano horizontal: } F_{roz} = \mu \cdot m \cdot g = 0'1 \cdot 2 \cdot 10 = 2 \text{ N}$$

$$\text{En el plano inclinado: } F_{roz} = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 30^\circ = 0'1 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 0'866 = 1'73 \text{ N}$$

$$\text{El trabajo de la fuerza de rozamiento: } W_{no \text{ con}} = (\mu \cdot m \cdot g) \cdot 1 + (\mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 30^\circ) \cdot \Delta r_B = 2 + 1'73 \cdot \Delta r_B$$

$$m \cdot g \cdot \Delta r_B \cdot \sin 30^\circ = 0'5 \cdot k \cdot \Delta x^2 - W_{\text{no con}}$$

$$2 \cdot 10 \cdot \Delta r_B \cdot 0'5 = 0'5 \cdot 500 \cdot 0'2^2 - (2 + 1'73 \cdot \Delta r_B)$$

$$\left. \begin{array}{l} 10 \cdot \Delta r_B = 10 - 2 - 1'73 \cdot \Delta r_B \\ 10 \Delta r_B = 8 - 1'73 \Delta r_B \end{array} \right\} \begin{array}{l} 10 \Delta r_B + 1'73 \Delta r_B = 8 \\ 11'73 \Delta r_B = 8 \end{array} \left\} \Delta r_B = \frac{8}{11'73} = 0'68 \text{ m}$$

**3.- (Junio 2007) conteste razonadamente a las siguientes preguntas:**

**a) ¿Puede asociarse una energía potencial a una fuerza de rozamiento?**

**b) ¿Qué tiene más sentido físico, la energía potencial en un punto o la variación de energía potencial entre dos puntos?**

a) No, la fuerza de rozamiento es una fuerza no conservativa. Para poder asociar una energía potencial a una fuerza, ésta ha de ser conservativa, de manera que el trabajo que realice sea independiente de la trayectoria seguida y, por tanto, que el trabajo realizado en una trayectoria cerrada sea nulo. Esto no ocurre con la fuerza de rozamiento, ya que, al actuar a lo largo de una trayectoria cerrada siempre da un trabajo, al actuar, en cada instante, oponiéndose al movimiento del cuerpo.

b) Tanto la energía potencia como la energía cinética son relativas. Ambas dependen del punto de referencia que se tome, por tanto, es más coherente hablar de variación de energía potencial entre dos puntos, que hacerlo como algo absoluto.

Por ejemplo cuando se calcula el trabajo realizado por las fuerzas gravitatorias o eléctricas se utiliza una integral en la que aparecen constantes arbitrarias. Gracias a esta arbitrariedad, se puede definir el nivel de referencia que nos interese. Se suele tomar como origen de energías potenciales gravitatorias el infinito, aunque también se podía definir una expresión de energía potencial gravitatoria sobre la superficie del planeta, por ejemplo.

**4.- (Junio 2008) a) Conservación de la energía mecánica. b) Un cuerpo desliza hacia arriba por un plano inclinado que forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal. Razone qué trabajo realiza la fuerza peso del cuerpo, al desplazarse éste una distancia  $d$  por el plano.**

a) La energía mecánica de un cuerpo es suma de sus energías cinéticas y potenciales:  $E_m = E_p + E_c$

Se producirá variación en la energía mecánica siempre que se dé un intercambio de energía con el exterior (trabajo mecánico), producido por la acción de una fuerza externa:  $\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p$

- De acuerdo con el teorema de la energía cinética o **de las fuerzas vivas**:  $W_{\text{total}} = \Delta E_c$

Si sobre el cuerpo actúan fuerzas conservativas y fuerzas no conservativas, el trabajo total realizado sobre él, será igual a la suma del trabajo realizado por las fuerzas conservativas ( $W_{\text{con}}$ ) más el realizado por las fuerzas no conservativas ( $W_{\text{nocon}}$ ):

$$W_{\text{total}} = W_{\text{con}} + W_{\text{nocon}} = \Delta E_c$$

- Dado que el trabajo que realizan las fuerzas conservativas es a expensa de una pérdida de energía potencial:  $W_{\text{con}} = -\Delta E_p$ :

$$-\Delta E_p + W_{\text{nocon}} = \Delta E_c$$

Por tanto:  $W_{\text{nocon}} = \Delta E_c + \Delta E_p = \Delta(E_c + E_p) = \Delta E_m$

Es decir, el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas es igual a la variación de la energía mecánica del cuerpo:  $W_{\text{nocon}} = \Delta E_m$

Para que la energía mecánica permanezca constante, el trabajo total de las fuerzas no conservativas debe ser cero y esto puede ocurrir porque no haya fuerzas no conservativas, porque haya, pero ninguna de ellas realice trabajo, o porque la suma de todos sus trabajos sea cero.

**Enunciado del principio de conservación de la energía mecánica:** *Si sobre un cuerpo no actúan fuerzas no conservativas, o estas no realizan trabajo, la energía mecánica del cuerpo se mantendrá constante.*

$$W_{\text{nocon}} = 0 \Rightarrow \Delta E_m = 0 \quad (E_m = \text{cte}) \text{ y, por tanto, } \Delta E_c = -\Delta E_p$$

Es decir, un cuerpo sobre el que solo actúen fuerzas conservativas, mantendrá constante su energía mecánica, y su energía cinética aumentará en la misma cantidad que disminuya su energía potencial y viceversa.

Un caso muy frecuente en el que no se conserva la energía mecánica se produce cuando actúan fuerzas de rozamiento sobre el cuerpo. En estos casos suele perderse energía mecánica que se transforma en energía térmica.

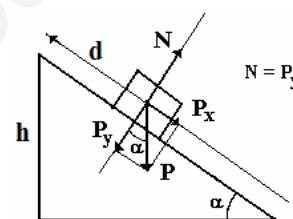
b) Se puede resolver de dos formas:

- A partir del hecho de que la fuerza gravitatoria es una fuerza conservativa:

$$W_{\text{con}} = -\Delta E_p = -m \cdot g \cdot h = -m \cdot g \cdot d \cdot \sin \alpha$$

- Partiendo de la ecuación general de trabajo:

$$W = F \cdot \Delta r \cdot \cos \theta = P_x \cdot d \cdot \cos 180^\circ = -P \cdot \sin \alpha \cdot d = -m \cdot g \cdot d \cdot \sin \alpha$$



El trabajo resultaría negativo, es decir, la fuerza peso restaría energía al objeto. Ahora bien, esa energía se almacenará como energía potencial gravitatoria ( $m \cdot g \cdot h$ ) manteniéndose la energía mecánica constante.

**5.- (Junio 2009) En un instante  $t_1$ , la energía cinética de una partícula es 30 J y su energía potencial 12 J. En un instante posterior,  $t_2$ , la energía cinética de la partícula es de 18 J.**

**a) Si únicamente actúan fuerzas conservativas sobre la partícula, ¿cuál es su energía potencial en el instante  $t_2$ ?**

**b) Si la energía potencial en el instante  $t_2$  fuese 6 J, ¿actuarían fuerzas no conservativas sobre la partícula? Razone las respuestas.**

a) Datos:  $t_1$ :  $E_c = 30 \text{ J}$  y  $E_p = 12 \text{ J}$ ,  $t_2$ :  $E_c = 18 \text{ J}$

Si sólo actúan fuerzas conservativas, la energía mecánica se mantendrá constante en cualquier instante y lugar:  $E_{m,1} = E_{m,2}$

Como la energía mecánica es suma de energía potencial y cinética:  $E_{m,1} = 30 + 12 = 42 \text{ J}$

$$42 = 18 + E_{p,2} \quad \left. \vphantom{42 = 18 + E_{p,2}} \right\} E_{p,2} = 42 - 18 = 24 \text{ J}$$

b) Si la energía potencial en el instante  $t_2$  fuese de 6 J podrían estar ocurriendo dos cosas:

- Que la pérdida de energía mecánica sea debida a la intervención de fuerzas no conservativas que realizan un trabajo. La energía iría a parar a otro cuerpo o se disiparía en forma de calor. El trabajo realizado equivale a la variación de energía mecánica:

$$W_{\text{nocon}} = \Delta E_m = (18 + 6) - 42 = -18 \text{ J}$$

- Que actúen otras fuerzas conservativas, de forma que los 18 J se habrían almacenado como otro tipo de energía potencial (elástica, eléctrica...).

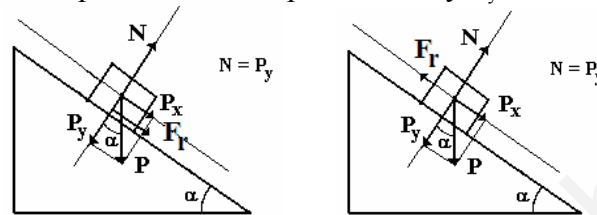
6.- (Junio 2010) Por un plano inclinado que forma  $30^\circ$  con la horizontal, se lanza hacia arriba un bloque con 10 kg de masa con una velocidad inicial de  $5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Tras su ascenso por el plano inclinado, el bloque desciende y regresa al punto de partida con una cierta velocidad. El coeficiente de rozamiento entre plano y bloque es 0'1.

a) Dibuje en dos esquemas distintos las fuerzas que actúan sobre el bloque durante el ascenso y durante el descenso e indique sus respectivos valores. Razone si se verifica el principio de conservación de la energía en este proceso.

b) Calcule el trabajo de la fuerza de rozamiento en el ascenso y en el descenso del bloque comente el signo del resultad.  $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

Datos:  $m = 10 \text{ kg}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $v_i = 5 \text{ m/s}$ ,  $\mu = 0'1$

Las fuerzas que actúan son: peso, normal y rozamiento. Pero para resolver el problema es interesante descomponer el peso en sus componentes  $P_x$  y  $P_y$ .



$$P_x = m \cdot g \cdot \sin \alpha = 10 \cdot 10 \cdot \sin 30^\circ = 50 \text{ N}$$

$$P_y = N = m \cdot g \cdot \cos \alpha = 10 \cdot 10 \cdot \cos 30^\circ = 86'6 \text{ N}$$

$$F_r = \mu \cdot N = 0'1 \cdot 86'6 = 8'66 \text{ N}$$

Siempre se cumple el principio de conservación de la energía que es un principio universal. La energía total se conserva, pero se pueden producir transformaciones de unas formas de energía a otras. En este caso, se disipa una parte de la energía en forma de calor, como consecuencia del rozamiento entre el plano y la caja. El resultado es que la energía mecánica de ésta disminuye.

b) Puesto que el rozamiento es una fuerza no conservativa, se cumplirá que:  $E_{mf} = E_{mi} + W_{no\ con}$

Llamando  $\Delta r$  al desplazamiento desde la base del plano hasta el punto más elevado que alcanza el bloque, podemos escribir:  $E_{pF} = E_{cI} + W_R$

$$\left. \begin{aligned} m \cdot g \cdot h &= 0'5 \cdot m \cdot v_i^2 + F_r \cdot \Delta r \cdot \cos 180^\circ \\ 10 \cdot 10 \cdot h &= 0'5 \cdot 10 \cdot 5^2 + 8'66 \cdot \Delta r \cdot \cos 180^\circ \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 100 \cdot h &= 125 + 86'6 \cdot \Delta r \cdot (-1) \\ 100 \cdot \Delta r \cdot \sin 30 &= 125 - 8'66 \cdot \Delta r \end{aligned}$$

Agrupando términos se puede averiguar la distancia que la caja ascenderá y luego descenderá:

$$\left. \begin{aligned} 50 \cdot \Delta r + 8'66 \cdot \Delta r &= 125 \\ 58'66 \cdot \Delta r &= 125 \end{aligned} \right\} \Delta r = \frac{125}{58'66} = 2'13 \text{ m}$$

El trabajo de la fuerza de rozamiento:  $W_{roz} = F_r \cdot \Delta r \cdot \cos 180^\circ = - F_r \cdot \Delta r = - 8'66 \cdot 2'13 = -18'5 \text{ J}$

7.- (Junio 2011) a) Conservación de la energía mecánica.

b) Se lanza hacia arriba por un plano inclinado un bloque una velocidad  $v_0$ . Razone como varían su energía cinética, potencial y mecánica cuando el cuerpo sube y después baja hasta la posición de partida. Considere los casos: 1) que no haya rozamiento. 2) que lo haya.

a) Ver ejercicio 4 a)

b) Si se toma como nivel cero de energía potencial gravitatoria el principio del plano inclinado, inicialmente la energía mecánica del cuerpo será únicamente cinética.

1) Plano sin rozamiento:

Solo actúan sobre el cuerpo el peso, que es una fuerza conservativa y la normal, que es no conservativa pero no realiza trabajo ya que es perpendicular al desplazamiento en todo momento. Aplicando el principio de conservación de la energía mecánica:

$$\Delta E_m = W_{no\ con} = 0 \text{ (no hay fuerzas conservativas que realicen trabajo)} \rightarrow E_m = cte \rightarrow \Delta E_c = - \Delta E_p.$$

En la subida por la rampa aumenta la energía potencial gravitatoria al tiempo que disminuye la energía cinética. Cuando llega a su punto más alto, la energía cinética es cero y la energía potencial gravitatoria es máxima y coincide con la energía cinética inicial.

Durante el movimiento de caída vuelve a producirse una transformación de energía potencial gravitatoria, que disminuye, en energía cinética, que aumenta hasta hacerse igual a la energía cinética que tenía al principio.

2) Plano con rozamiento: Además de las dos fuerzas antes indicada, ahora actúa la fuerza de rozamiento que se opone al desplazamiento, tanto a la subida como a la bajada. Se trata de una fuerza no conservativa que hace disminuir la energía mecánica, disipándose parte de ésta, en forma de calor, al medio ambiente. De este modo, en la subida, la energía cinética disminuye y la potencial aumenta pero debido a la disipación de energía por el rozamiento, la altura que alcanza es inferior a la que alcanzaría sin rozamiento.

Durante la bajada se vuelve a producir una transformación de la energía potencial en cinética. Nuevamente la disipación de energía al medio ambiente hace que la energía cinética (y por tanto la velocidad) con la que vuelve a llegar abajo es inferior a la de partida.

**8.- (Junio 2012) Un cuerpo de 5 kg, inicialmente en reposo, se desliza por un plano inclinado de superficie rugosa que forma un ángulo de 30° con la horizontal, desde una altura de 0'4 m. Al llegar a la base del plano inclinado, el cuerpo continúa deslizándose por una superficie horizontal rugosa del mismo material que el plano inclinado. El coeficiente de rozamiento dinámico entre el cuerpo y las superficies es de 0'3.**

a) Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en su descenso por el plano inclinado y durante su movimiento a lo largo de la superficie horizontal. ¿A qué distancia de la base del plano se detiene el cuerpo?

b) Calcule el trabajo que realizan todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo durante su descenso por el plano inclinado.  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ .

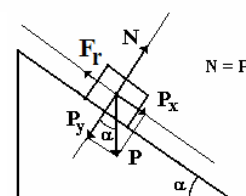
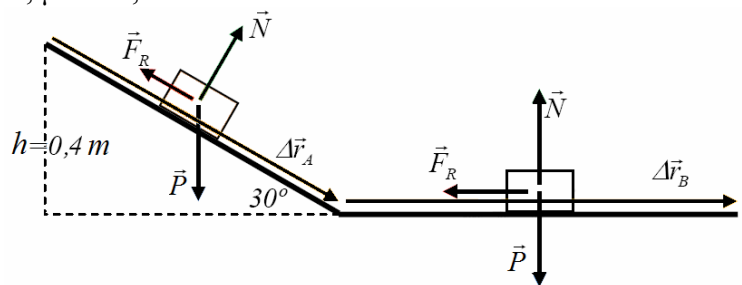
Datos:  $m = 5 \text{ kg}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $v_i = 0 \text{ m/s}$ ,  $\mu = 0'3$ ,  $h = 0'4 \text{ m}$

a) Sobre el bloque actuarán, durante todo el movimiento, las siguientes fuerzas, dibujadas en el esquema:

**Peso:**  $P = m \cdot g = 5 \cdot 10 = 50 \text{ N}$ .

**Normal:**

- En el plano inclinado:  $N = P_y = m \cdot g \cdot \cos \alpha = 43'3 \text{ N}$
- En la superficie horizontal:  $N = P = 50 \text{ N}$





### Fuerza de rozamiento dinámica:

- En el plano inclinado:  $F_R = \mu \cdot N = \mu \cdot P_y = 0'3 \cdot 43'3 \text{ N} = 12'99 \text{ N}$
- En la superficie horizontal:  $F_R = \mu \cdot N = 0'3 \cdot 50 \text{ N} = 15 \text{ N}$

Para calcular la distancia que recorre por la superficie horizontal hasta detenerse, se aplica el principio de conservación de la energía mecánica, teniendo en cuenta que actúa una fuerza no conservativa, el rozamiento, que realiza trabajo (la normal es no conservativa también, pero no realiza trabajo al ser perpendicular al desplazamiento). Por lo tanto, la energía mecánica cambiará y su variación será igual al trabajo realizado por las fuerzas no conservativas.

$$\Delta E_M = E_{M2} - E_{M1} = W_{\text{no con}} = W_{Fr} + W_N \Rightarrow E_{M2} - E_{M1} = W_{Fr}$$

Como:  $E_M = E_c + E_{p_g}$  (origen de  $E_{p_g}$  en la parte baja del plano,  $h = 0 \text{ m}$ )

- Situación inicial: bloque, en reposo, en la parte alta del plano inclinado ( $h = 0,4 \text{ m}$ ).

La energía mecánica será:  $E_{M1} = E_{c1} + E_{p_{g1}} = 0 + m \cdot g \cdot h_1 = 5 \cdot 10 \cdot 0'4 = 20 \text{ J}$

- Situación final: bloque ya detenido, después de recorrer una distancia  $x$  por la superficie horizontal ( $h = 0 \text{ m}$ ).

La energía mecánica será:  $E_{M2} = E_{c2} + E_{p_{g2}} = 0 + m \cdot g \cdot h_2 = 0 \text{ J}$

El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento se calcula en dos partes:

Plano inclinado (A):  $W_{Fr,A} = F_r \cdot \Delta r \cdot \cos \alpha = 12'99 \cdot 0'8 \cdot \cos 180^\circ = -10'39 \text{ J}$

Plano horizontal (B):  $W_{Fr,B} = F_r \cdot \Delta r \cdot \cos \alpha = 15 \cdot x \cdot \cos 180^\circ = -15 \cdot x \text{ J}$

En total:  $E_{M2} - E_{M1} = W_{Fr} \quad \left. \begin{array}{l} 0 - 20 = -10'39 - 15 \cdot x \end{array} \right\}$

$x = 0'64 \text{ m}$  recorre por la superficie horizontal hasta detenerse.

**b)** Dividimos el desplazamiento en dos tramos: el inclinado y el horizontal.

En cada tramo, las fuerzas aplicadas se mantienen constantes durante ese desplazamiento. Por lo tanto, Se puede aplicar la expresión:  $W = F \cdot \Delta r \cdot \cos \alpha$

En el tramo inclinado:  $\Delta r = h/\text{sen}30^\circ = 0'8 \text{ m}$

$W_P = P \cdot \Delta r \cdot \cos \alpha = 50 \cdot 0'8 \cdot \cos 60^\circ = 20 \text{ J}$

$W_N = N \cdot \Delta r \cdot \cos \alpha = 43'3 \cdot 0'8 \cdot \cos 90^\circ = 0 \text{ J}$

$W_{Fr} = F_r \cdot \Delta r \cdot \cos \alpha = 12'99 \cdot 0'8 \cdot \cos 180^\circ = -10'39 \text{ J}$

Trabajo total:  $W_P + W_N + W_{Fr} = 20 \text{ J} + 0 - 10'39 \text{ J} = 9'61 \text{ J}$

9.- (Junio 2013) Un bloque de 5 kg se desliza con una velocidad constante por una superficie horizontal rugosa al aplicarle una fuerza de 20 N en una dirección que forma un ángulo de  $60^\circ$  sobre la horizontal.

a) Dibuje en un esquema todas las fuerzas que actúan sobre el bloque, indique el valor de cada una de ellas y calcule el coeficiente de rozamiento del bloque con la superficie.

b) Determine el trabajo total de las fuerzas que actúan sobre el bloque cuando se desplaza 2 m y comente el resultado obtenido.

Datos:  $m = 5 \text{ kg}$ ,  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  Como  $v = \text{cte} \Rightarrow a = 0$ ,  $F = 20 \text{ N}$

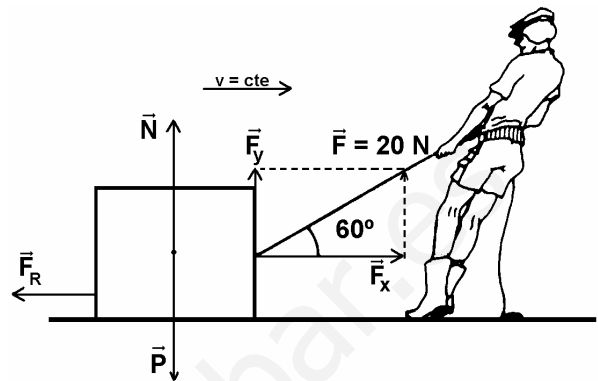
a) Sobre el bloque actuarán, durante todo el movimiento, las siguientes fuerzas, dibujadas en el esquema:

$$F = 20 \text{ N}$$

$$F_x = F \cdot \cos 60^\circ = 20 \cdot \cos 60^\circ = 10 \text{ N}$$

$$F_y = F \cdot \sin 60^\circ = 20 \cdot \sin 60^\circ = 17.32 \text{ N}$$

$$P = m \cdot g = 5 \cdot 9.8 = 49 \text{ N}$$



Como no hay aceleración ni en el eje X ni en el eje Y  $\Rightarrow \sum F = m \cdot a = 0$

- En el eje Y:  $P = N + F_y \Rightarrow N = P - F_y = 49 - 17.32 = 31.68 \text{ N}$

- En el eje X:  $F_x = F_r \Rightarrow F_r = 10 \text{ N}$

Para calcular el coeficiente de rozamiento:  $F_r = \mu \cdot N$

$$10 = \mu \cdot 31.68 \Rightarrow \mu = \frac{10}{31.68} = 0.316$$

b) El trabajo total será la suma del trabajo realizado por todas las fuerzas para producir un desplazamiento,  $\Delta r = 2 \text{ m}$ :  $W_{\text{total}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{r}$

El trabajo realizado por la fuerza F:  $W_F = F \cdot \Delta r \cdot \cos 60^\circ = 20 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 20 \text{ J}$

El trabajo realizado por la fuerza peso:  $W_P = P \cdot \Delta r \cdot \cos 90^\circ = 0 \text{ J}$

El trabajo realizado por la fuerza normal:  $W_N = N \cdot \Delta r \cdot \cos 90^\circ = 0 \text{ J}$

El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento:  $W_R = F_r \cdot \Delta r \cdot \cos 180^\circ = 10 \cdot 2 \cdot \cos 180^\circ = -20 \text{ J}$

$$W_{\text{total}} = 20 - 20 = 0 \text{ J}$$

El resultado es lógico, ya que, de acuerdo con el principio de inercia (1ª ley de Newton) cuando un cuerpo se mueve con velocidad constante (no hay aceleración) la suma de las fuerzas aplicadas sobre él tiene que ser cero.

Si la suma de las fuerzas aplicadas es cero, de acuerdo con esta fórmula:  $W_{\text{total}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{r}$ , el trabajo total tiene que ser cero.