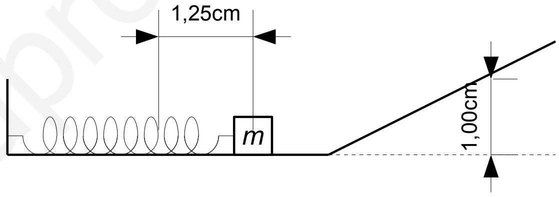
Problemas

Resuelve el problema 1 o 2 (**solo uno de ellos**) y el problema 3

1. Una partícula de 1,54 g inicia un movimiento armónico simple horizontal en el punto de máxima elongación, que se encuentra a 66,7 cm del origen. El tiempo que tarda la partícula desde el instante inicial hasta que alcanza el origen es de 0,225 s.
a) Escribe la ecuación de movimiento.
b) Calcula la fuerza que actúa sobre la partícula, transcurrido 0,350 s desde el instante inicial.
c) Calcula la energía potencial cuando la velocidad sea la mitad de la velocidad máxima.
Solución

2. En el sistema de la figura, un objeto de 250 g se aprieta contra un muelle en un plano horizontal de forma que el muelle se comprime 1,25 cm. Se suelta y el objeto sale despedido y asciende por un plano inclinado hasta una altura de 1,00 cm donde se detiene y vuelve a descender hasta el muelle volviendo a comprimirlo. Si no existe rozamiento en ningún tramo del movimiento, calcula:
a) La constante elástica del muelle.
b) La velocidad del objeto cuando el objeto ha comprimido 5,0 mm el muelle.
c) El tiempo que tarda en comprimirse los 5,0 mm desde que el objeto entra en contacto con el muelle que se supone en la posición de equilibrio.
Solución



3. La ecuación de una onda que se propaga por una cuerda es $y(t, x) = 0{,}200 \text{ sen } \pi\,(100\,t - 0{,}100\,x)$ (Unidades S.I.) Calcula:
a) La frecuencia, el número de ondas k, la velocidad de propagación y la longitud de onda.
b) La velocidad instantánea de un punto de la cuerda que se encuentra a 2,50 m del origen cuando el tiempo es 5,00 ms.
c) ¿Para qué otros tiempos ese punto estará en fase (tendrá la misma elongación y la misma velocidad y el mismo sentido de vibración) con la situación anterior?
Solución

Laboratorio

1. Una masa m = 50 g se cuelga de un resorte helicoidal. La elongación del resorte es de 200 mm. El sistema se pone en movimiento al tirar de la masa hacia abajo una distancia adicional de 50 mm y luego soltándola. El tiempo que tarda en dar 10 oscilaciones completas es de 9,82 s. Calcula el valor de la constante elástica del resorte por el método:
a) Estático
b) Dinámico. [2 Puntos]
Solución

Cuestiones

1. Un objeto realiza un M.A.S., ¿cuáles de las siguientes magnitudes son proporcionales entre sí?:
A) La elongación y la velocidad.
B) La fuerza recuperadora y la velocidad.
C) La aceleración y la elongación.
Solución

2. La energía de una onda es proporcional
   A) Al cuadrado de la amplitud.
   B) A la inversa de la frecuencia.
   C) A la longitud de onda.

Soluciones

1. Una partícula de 1,54 g inicia un movimiento armónico simple horizontal en el punto de máxima elongación, que se encuentra a 66,7 cm del origen. El tiempo que tarda la partícula desde el instante inicial hasta que alcanza el origen es de 0,225 s.
a) Escribe la ecuación de movimiento.
b) Calcula la fuerza que actúa sobre la partícula, transcurrido 0,350 s desde el instante inicial.
c) Calcula la energía potencial cuando la velocidad sea la mitad de la velocidad máxima.
Examen ▲ Problema 2 ►

Solución:

a) La ecuación de movimiento de un M.A.S. es:

$$x = A \text{ sen}(\omega t + \varphi)$$

donde A es la amplitud, ω la frecuencia angular, t el tiempo y φ la fase inicial.

La amplitud es la máxima elongación $A = 66{,}7 \text{ cm} = 0{,}667 \text{ m}$
La fase inicial se calcula en la ecuación $x = A \text{ sen}(\omega t + \varphi)$ a partir de la posición inicial:
Para $t = 0$, $x = 0{,}667$ m

$$0{,}667 = 0{,}667 \text{ sen } \varphi$$

$$\varphi = \text{arc sen } 1 = \pi / 2 \text{ rad} = 1{,}57 \text{ rad}$$

Para calcular la frecuencia angular se puede usar la ecuación. Para el tiempo $t = 0{,}225$ s, la posición es $x = 0$

$$0 = 0{,}667 \text{ sen}(\omega\ 0{,}225 + \pi/2)$$

$$(\omega\ 0{,}225 + \pi/2) = \text{arc sen } 0 = \pi \text{ (el valor 0 daría una pulsación negativa)}$$

$$\omega = 20\ \pi / 9 = 6{,}98 \text{ rad/s}$$

O se puede deducir a partir del período. Si tarda 0,225 s desde la máxima elongación hasta el origen, tardará lo mismo desde el origen hasta el otro extremo. Es decir en 0,225 + 0,225 = 0,450 s habrá efectuado media oscilación. Su período será el doble: $T = 0{,}900$ s y la frecuencia angular:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}900} = \frac{20\,\pi}{9} = 6{,}98 \text{ rad/s}$$

Se sustituyen en la ecuación de movimiento los datos obtenidos:

$$x = A \text{ sen}(\omega t + \varphi) = 0{,}667 \text{ sen}(20\pi\, t / 9 + \pi/2) \text{ [m]}$$

b) Se deriva la ecuación de movimiento para obtener la velocidad

$$\text{v} = dx / dt = 0{,}667 \cdot 20\ \pi / 9 \cos(20\pi\, t / 9 + \pi/2) = 4{,}66 \cos(20\pi\, t / 9 + \pi/2) \text{ [m/s]}$$

Y se deriva la velocidad para obtener la aceleración

$$a = d\text{v} / dt = -4{,}66 \cdot 20\pi / 9 \text{ sen}(20\pi\, t / 9 + \pi/2) = -32{,}5 \text{ sen}(20\pi\, t / 9 + \pi/2) \text{ [m/s}^2\text{]}$$

Se calcula la aceleración en el instante pedido:

$$a(t = 0{,}350 \text{ s}) = -32{,}5 \text{ sen}(20\pi \cdot 0{,}350 / 9 + \pi/2) = 24{,}9 \text{ m/s}^2$$

Y se aplica la 2ª Ley de Newton

$$F = m \cdot a = 1{,}54{\times}10^{-3} \text{ [kg]} \cdot 24{,}9 \text{ [m/s}^2\text{]} = 0{,}0384 \text{ N} = 38{,}4 \text{ mN}$$

La partícula se encuentra en la zona en la que el muelle está comprimido (a la izquierda de la posición de equilibrio), por lo que el sentido de la fuerza es hacia la posición de equilibrio (derecha).

c) La velocidad es máxima para $\cos(20\pi\, t / 9 + \pi/2) = 1$. La velocidad máxima vale:

$$\text{v}_{\text{máx}} = 4{,}66 \text{ m/s}$$

La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial.

$$E = E_c + E_p = ½\, m\, v^2 + ½\, k\, x^2$$

pero es constante porque la fuerza elástica es una fuerza conservativa. Vale lo mismo que en el punto de elongación máxima (donde la velocidad es nula) :

$$E = ½\, k\, A^2$$

o en el origen (donde la elongación es nula):

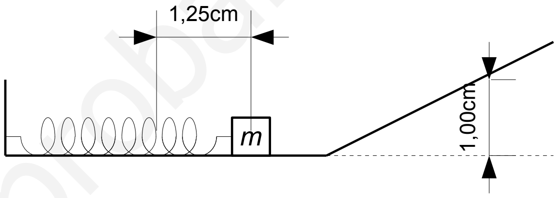
$$E = ½\, m\, v^2_{máx} = 1{,}54×10^{-3}\ [\text{kg}] \cdot (4{,}66\ [\text{m/s}])^2 / 2 = 0{,}0167\ \text{J}$$

Aplicando esta igualdad:

$$E_c + E_p = ½\, m\, v^2 + E_p = 0{,}0167\ \text{J}$$

$$E_p = 0{,}0167\ [\text{J}] – (½\ 1{,}54×10^{-3}\ [\text{kg}] \cdot (2{,}33\ [\text{m/s}])^2) = 0{,}0125\ \text{J}$$

2. En el sistema de la figura, un objeto de 250 g se aprieta contra un muelle en un plano horizontal de forma que el muelle se comprime 1,25 cm. Se suelta y el objeto sale despedido y asciende por un plano inclinado hasta una altura de 1,00 cm donde se detiene y vuelve a descender hasta el muelle volviendo a comprimirlo. Si no existe rozamiento en ningún tramo del movimiento, calcula:



a) La constante elástica del muelle.
b) La velocidad del objeto cuando el objeto ha comprimido 5,0 mm el muelle.
c) El tiempo que tarda en comprimirse los 5,0 mm desde que el objeto entra en contacto con el muelle que se supone en la posición de equilibrio.

◄ Problema 1 Examen ▲ Problema 3 ►

Solución:

a) Las únicas fuerzas no conservativas son las que ejercen las superficies sobre el cuerpo, que al ser normales al desplazamiento, no realizan trabajo. Por tanto, la energía se conserva entre la situación (A) con el muelle comprimido y la situación (B) cuando se detiene en el plano inclinado. Tomando como origen de energías potenciales el plano horizontal donde se apoya el cuerpo:

$$(E_C + E_{P(peso)} + E_{P(elástica)})_A = (E_C + E_{P(peso)} + E_{P(elástica)})_B$$

$$½\, m \cdot v_A^2 + m \cdot g \cdot h_A + ½\, k \cdot x_A^2 = ½\, m \cdot v_B^2 + m \cdot g \cdot h_B + ½\, k \cdot x_B^2$$

$$0{,}250 \cdot 0^2 / 2 + 0{,}250 \cdot 9{,}8 \cdot 0 + k \cdot 0{,}0125^2 / 2 = 0{,}250 \cdot 0^2 / 2 + 0{,}250 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}0100 + k \cdot 0^2 / 2$$

$$k = 314\ \text{N/m}$$

b) En este caso la energía también se conserva. Manteniendo la situación (A) inicial con el muelle comprimido 1,25 cm y la situación final (C) cuando se ha comprimido sólo 5,0 mm

$$(E_C + E_{P(elástica)})_A = (E_C + E_{P(elástica)})_C$$

$$½\, m \cdot v_A^2 + ½\, k \cdot x_A^2 = ½\, m \cdot v_B^2 + ½\, k \cdot x_C^2$$

$$0{,}250 \cdot 0^2 / 2 + 314 \cdot 0{,}0125^2 / 2 = 0{,}250 \cdot v_C^2 / 2 + 314 \cdot 0{,}0050^2 / 2$$

$$v_C = 0{,}41\ \text{m/s}$$

c) La ecuación de un M.A.S. es

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

De las ecuaciones $F_{RES} = m \cdot a$ y $F_{ELASTICA} = -k \cdot x$, si la fuerza resultante es la elástica:

$$F_{RES} = F_{ELASTICA} \Rightarrow m \cdot a = -k \cdot x.$$

En un M.A.S.,

$$a = -\omega^2 x$$

por lo que

$$m \cdot (-\omega^2 x) = -k \cdot x$$

$$m \cdot \omega^2 = k$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{314}{0{,}250}} = 35 \text{ rad/s}$$

Si parte de la posición de equilibrio, para $t = 0$, $x = 0$.

$$0 = 0{,}0125 \cos(35 \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$0 = \cos \varphi_0$$

$$\varphi_0 = \pi / 2$$

Cuando se ha comprimido 5,0 mm, $x = -A = -0{,}0050$ m

$$-0{,}0050 = 0{,}0125 \cos(35\, t + \pi / 2)$$

$$-0{,}40 = \cos(35\, t + \pi / 2)$$

$$35\, t + \pi / 2 = 1{,}98 \text{ rad}$$

$$t = 0{,}41 / 35 = 0{,}012 \text{ s}$$

Análisis:Si tenemos en cuenta que el período es $T = 2\pi/\omega = 0{,}177$ s*, el tiempo que tarda debería ser menor que* $T / 4 = 0{,}044$ s*. El resultado es aceptable.*

3. La ecuación de una onda que se propaga por una cuerda es $y(t, x) = 0{,}200 \text{ sen } \pi\, (100\, t - 0{,}100\, x)$. (Unidades S.I.) Calcula:

a) La frecuencia, el número de ondas k, la velocidad de propagación y la longitud de onda.

b) La velocidad instantánea de un punto de la cuerda que se encuentra a 2,50 m del origen cuando el tiempo es 5,00 ms.

c) ¿Para qué otros tiempos ese punto estará en fase (tendrá la misma elongación y la misma velocidad y el mismo sentido de vibración) con la situación anterior?

◄ Problema 2 Examen ▲ Laboratorio ►

Datos	***Cifras significativas: 3***
ecuación de la onda	$y(t, x) = 0{,}20 \cdot \text{sen } \pi(100t - 0{,}100x)$ m
posición del punto	$x = 2{,}50$ m
tiempo de referencia	$t = 5{,}00$ ms $= 5{,}00 \times 10^{-3}$ s
Incógnitas	
frecuencia	f
número de ondas	k
velocidad de propagación	v_p
longitud de onda	λ
velocidad instantánea de un punto en $x = 2{,}50$ m para $t = 5{,}00$ ms	v
tiempos en los que el estado de vibración está en fase con la vibración para $t = 5{,}0$ ms	t
Otros símbolos	
pulsación (frecuencia angular)	ω
número de onda	k
Ecuaciones	
de una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x)$
relación entre la frecuencia f y la frecuencia angular ω	$\omega = 2\, \pi \cdot f$

Ecuaciones

relación entre la longitud de onda λ y el número de onda k	$k = 2\ \pi / \lambda$
relación entre la longitud de onda λ, la frecuencia f y la velocidad de propagación v_p	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Comparando la ecuación de una onda con la del dato, y suponiendo que las unidades son las del S.I.:

$$y = A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

$$y = 0{,}20 \cdot \operatorname{sen} \pi(100\ t - 0{,}100\ x)$$

Pulsación (frecuencia angular) $\omega = 100\ \pi = 314$ rad/s
Número de onda: $k = 0{,}10\ \pi = 0{,}314$ rad/m
Se calcula ahora la longitud de onda y la frecuencia para determinar la velocidad de propagación.
Frecuencia: $f = \omega / 2\ \pi = 100\ \pi$ [rad/s]/ $2\ \pi$ [rad] = 50,0 s^{-1} = 50,0 Hz
Longitud de onda: $\lambda = 2\ \pi / k = 2\ \pi$ [rad] / $0{,}100\ \pi$ [rad/m] = 20,0 m
Velocidad de propagación: $v_p = \lambda \cdot f = 20{,}0$ [m] · 50,0 [s^{-1}] = $1{,}00 \times 10^3$ m/s

b) La velocidad es la derivada de la posición con respecto al tiempo:

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(0{,}20 \operatorname{sen} \pi(100\,t - 0{,}100\,x)) = 0{,}20\,\pi\,100 \cos \pi(100\,t - 0{,}100\,x) = 20\,\pi \cos \pi(100\,t - 0{,}100\,x)$$

Sustituyendo los valores queda:

$$v = 20\ \pi \cos \pi(100 \cdot 5{,}00 \times 10^{-3} - 0{,}100 \cdot 2{,}50) = 20\ \pi \cos(0{,}250\ \pi) = 44{,}4 \text{ m/s}$$

c)

$$\Delta\varphi = [\pi(100\ t_2 - 0{,}100\ x)] - [\pi(100\ t_1 - 0{,}100\ x)] = 100\ \pi\ (t_2 - t_1) = 2\pi\ n$$

$$t_2 = 0{,}020\ n + t_1 = 0{,}0050 + 0{,}020\ n \text{ [s]}$$

Análisis: *Los instantes en que están en fase son múltiplos del período que es el inverso de la frecuencia*, $\Delta t = 1 / f = 0{,}020\ n$ [s]

Laboratorio

1. Una masa m = 50 g se cuelga de un resorte helicoidal. La elongación del resorte es de 200 mm. El sistema se pone en movimiento al tirar de la masa hacia abajo una distancia adicional de 50 mm y luego soltándola. El tiempo que tarda en dar 10 oscilaciones completas es de 9,82 s. Calcula el valor de la constante elástica del resorte por el método:
a) Estático
b) Dinámico.

◄ Problema 3 Examen ▲ Cuestión 1 ►

Solución:

El método estático consiste en colgar pesas del portapesas y medir los alargamientos del muelle. El cálculo de la constante se hace por la ley de Hooke:

$$F = -\,k\,x$$

En este caso, la masa m = 50 g = 0,050 kg ejerce una fuerza (peso) de

$$F = m\ g = 0{,}050 \text{ [kg]} \cdot 9{,}8 \text{ [m/s}^2\text{]} = 0{,}49 \text{ N}$$

y la constante vale

$$k = F / x = 0{,}49 \text{ [N]} / 0{,}200 \text{ [m]} = 2{,}5 \text{ N/m}$$

aunque habría que hacer más medidas con otras pesas y hallar el valor medio.

El método dinámico consiste en colgar una masa del muelle, estirar y soltar y medir el tiempo de un cierto número de oscilaciones, para luego calcular el período dividiendo ese tiempo entre el número de oscilaciones.

$$T = 9{,}82\ [\mathrm{s}] / 10\ [\mathrm{osc.}] = 0{,}982\ \mathrm{s/osc.}$$

De la ecuación del período de um M.A.S.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

se despeja el valor de la constante.

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{4\pi^2\, 0{,}050[\mathrm{kg}]}{(0{,}982[\mathrm{s}])^2} = 2{,}0\ \mathrm{N/m}$$

Las constantes no dan lo mismo. Como deberían ser iguales, se toma como correcto el valor medio.

$$k_{\mathrm{medio}} = 2{,}2\ \mathrm{N/m}$$

Cuestiones

1. Un objeto realiza un M.A.S., ¿cuáles de las siguientes magnitudes son proporcionales entre sí?:
A) La elongación y la velocidad.
B) La fuerza recuperadora y la velocidad.
C) La aceleración y la elongación.
◄ Laboratorio Examen ▲ Cuestión 2 ►

Solución: C

Por definición, un objeto realiza un movimiento armónico simple cuando la aceleración recuperadora es proporcional a la separación de la posición de equilibrio.

$$a = -\omega^2 \cdot x$$

Esto es equivalente a decir que la ecuación de movimiento es de tipo senoidal o cosenoidal.

$$x = A \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Derivando.

$$\mathrm{v} = \frac{dx}{dt} = \frac{d(A \cdot \mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0))}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

y volviendo a derivar

$$a = \frac{d\,\mathrm{v}}{dt} = \frac{d(A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0))}{dt} = -A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x$$

2. La energía de una onda es proporcional
A) A la frecuencia.
B) A la amplitud.
C) A los cuadrados de la frecuencia y amplitud.
◄ Cuestión 1 Examen ▲

Solución: C

La energía que transporta una onda material armónica unidimensional es la suma de la cinética y de potencial:

$$E = E_C + E_P = ½\ m \cdot v^2 + ½\ k \cdot x^2 = ½\ k \cdot A^2 = ½\ m \cdot v^2_{máxima}$$

La ecuación de la onda armónica unidimensional es $y = A \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x)$
Derivando con respecto al tiempo: $v = dy / dt = -A \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x)$
que es máxima cuando $-\text{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x) = 1$, $v_{máxima} = A \cdot \omega$
Sustituyendo en la ecuación de la energía: $E = ½\ m \cdot v^2_{máxima} = ½\ m \cdot A^2 \cdot \omega^2$
Como la pulsación ω o frecuencia angular es proporcional a la frecuencia f: $\omega = 2\ \pi \cdot f$

$$E = ½\ m \cdot A^2 \cdot \omega^2 = ½\ m \cdot A^2\ (2\ \pi \cdot f)^2 = 2\ \pi^2\ m \cdot A^2 \cdot f^2$$

La energía que transporta una onda es proporcional a los cuadrados de la frecuencia y de la amplitud.