4. LEY DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL.

Desarrollamos la unidad de acuerdo con el siguiente hilo conductor:

1. ¿CÓMO HA EVOLUCIONADO LA POSICIÓN DE LA TIERRA EN EL UNIVERSO CONOCIDO A LO LARGO DE LA HISTORIA? DEL MODELO GEOCÉNTRICO AL HELIOCÉNTRICO.

Uno de los fenómenos que más ha interesado a la humanidad desde la más remota antigüedad ha sido el movimiento de los astros (se conocía la existencia de siete astros que parecían moverse entre un fondo fijo de estrellas: el Sol, la Luna, y los planetas Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno).

A.1. ¿Qué utilidad tiene el estudio de las regularidades en el movimiento de los astros?

Figura 1. El universo griego de las dos esferas. Entre la esfera terrestre y la esfera celeste, además de la esfera del Sol, se considera la existencia de una esfera de la Luna y una esfera para cada uno de los cinco planetas entonces conocidos, los cinco planetas visibles a simple vista.

Posicionar la Tierra en el universo conocido dio lugar a dos modelos, el **geocéntrico** (que consideraba a la Tierra el centro del universo) y el **heliocéntrico** (donde el Sol era el centro).

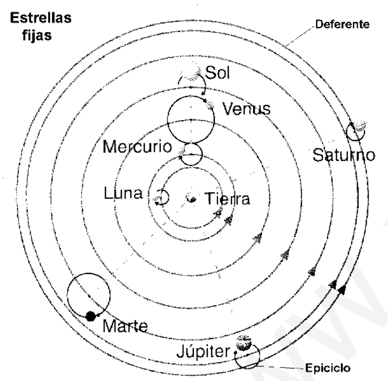


Figura 2. Según el modelo de Tolomeo, los astros describían una órbita circular (epiciclo) cuyo centro describía a su vez una órbita circular mayor (deferente) alrededor de la Tierra. El círculo representaba la figura geométrica perfecta y el movimiento circular el movimiento perfecto, que no requería explicación.

En un principio se impuso el **modelo geocéntrico**, iniciado por Aristóteles en el s. IV a.C. con el "universo de las dos esferas" (*figura 1*), y apoyado en las Sagradas Escrituras y en los escritos de los padres de la Iglesia (la Tierra como el centro de la creación). Este modelo justificaba con bastante exactitud las posiciones de los objetos celestes conocidos hasta el siglo XVI, aunque para ello fuese necesario el complicado modelo matemático de Tolomeo de Alejandría (s. II) (*figura 2*).

El **modelo heliocéntrico**, iniciado por Aristarco de Samos en el siglo III a.C., fue resucitado a mediados del siglo XVI por el astrónomo polaco Nicolas Copérnico (1473-1543), basándose en el mayor tamaño del Sol y en que ilumina al resto de los planetas (*figura 3*). Este modelo justificaba de una forma más sencilla que el modelo geocéntrico los fenómenos de la alternancia de los días y de las noches, las estaciones, las fases de la Luna y el movimiento retrógrado de los planetas (*figura 4*); sin embargo, iba en contra de la concepción de la naturaleza imperante por entonces, basada en el sentido común, y además, no realizaba predicciones tan exactas como las del modelo geocéntrico (sólo cuando Kepler fue capaz de concebir que los astros no tenían porqué moverse en círculos, el modelo heliocéntrico estuvo en condiciones de igualar la capacidad predictiva del modelo geocéntrico).

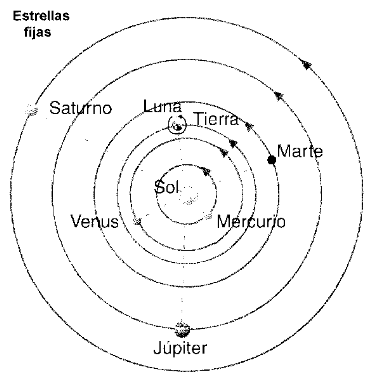
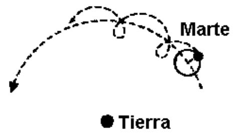
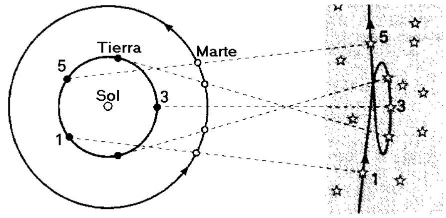


Figura 3. El modelo copernicano sigue considerando las trayectorias de los astros circulares y admite un doble movimiento de la Tierra: la rotación diaria alrededor de su eje y la traslación anual en torno al Sol.



Explicación de la retrogradación en el modelo geocéntrico. La combinación de dos (y a veces más) movimientos circulares genera una trayectoria en forma de bucle.

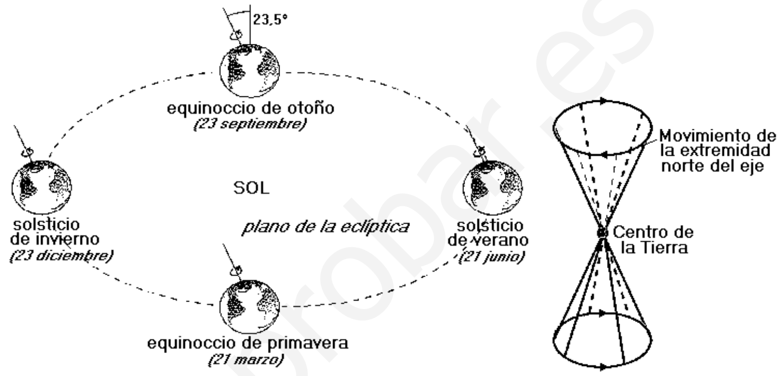


Explicación de la retrigradación en el modelo heliocéntrico. La Tierra adelanta al planeta Marte. Al pasar la Tierra de la posición 1 a la 2, el planeta Marte parece moverse hacia delante; al pasar de la 2 a la 3, Marte parece moverse hacia atrás.

Figura 4

El físico italiano Galileo Galilei (1564-1642), gracias a la construcción y utilización de los primeros telescopios en la observación del firmamento, asentó el modelo heliocéntrico y fue el primero en darse cuenta de la verdadera magnitud del universo, mucho mayor que nuestro sistema solar. Hacia 1610 descubrió cuatro satélites de Júpiter, un sistema que se oponía al modelo geocéntrico de Tolomeo. También descubrió los cráteres de la Luna y las manchas solares, lo cual contradecía la perfección aristotélica del mundo supralunar. Más tarde descubrió las fases de Venus, la lejanía de las estrellas fijas, etc. Este gran genio de la ciencia, obligado por la Inquisición a negar en público que la Tierra se movía, muere el año que nace otro gran genio, Isaac Newton, el encargado de establecer una ley única para la interacción de masas en todo el universo.

Hoy sabemos que el universo está en continua expansión y que el centro del Sol no es realmente el centro en torno al que giran el resto de los planetas del sistema. También sabemos que la Tierra presenta, además del movimiento de rotación diaria en torno a su propio eje y el movimiento de traslación anual en torno al Sol, un movimiento muy lento de cabeceo (precesión) del propio eje de la Tierra sobre una superficie cónica (*figura 5*).



<u>Equinoccios</u>: puntos de la órbita terrestre en los que los rayos solares inciden perpendicularmente sobre el ecuador.
<u>Solsticios</u>: puntos a mitad de camino entre los equinoccios.
Los nombres de los cuatro puntos se corresponden con las estaciones que comienzan en el hemisferio norte por esas fechas.
Los equinoccios no son fijos. Debido al movimiento de precesión, el plano del ecuador gira en relación al plano de la eclíptica; completa un giro cada 25.868 años, por lo que en nuestro corto período de vida este efecto resulta inapreciable.

Figura 5. Los movimientos de la Tierra.

A.2. Resuelve las siguientes actividades, tomando los datos que necesites de la *tabla 1* (*pág. 5*):

A.2.1. Admitiendo que la Tierra gira sobre sí misma, dando una vuelta diaria, ¿qué rapidez posee una persona situada en el ecuador a nivel del mar? ¿Y otra situada en nuestra latitud (38º 13´)?

A.2.2. Admitiendo que la Tierra gira en torno al Sol, dando una vuelta anual, ¿con qué rapidez se mueve la Tierra en torno al Sol?

A.2.3. Los defensores del geocentrismo criticaban el modelo heliocéntrico copernicano argumentando que era imposible que velocidades tan elevadas como las calculadas en las actividades precedentes (A.2.1 y A.2.2) pasaran desapercibidas. Por ejemplo, se preguntaban:
- Si la Tierra gira alrededor de su eje, ¿por qué un objeto que se lanza verticalmente, no queda rezagado y cae desplazado del punto de lanzamiento?
- Si la Tierra gira alrededor del Sol: ¿por qué no pierde su atmósfera?; ¿por qué las estrellas no se desplazan de su lugar?

A la luz de tus conocimientos actuales, sabrías dar réplica a estas críticas.

2. ¿CÓMO SE MUEVEN LOS PLANETAS EN TORNO AL SOL? LEYES DE KEPLER.

Las ideas de Copérnico fueron calando entre los astrónomos de la época. Uno de ellos fue el danés Tycho Brahe (1546-1601), quien realizó multitud de medidas sobre las posiciones de los planetas con una precisión casi increíble, pese a que aún Galileo no había inventado el telescopio.

El astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630), entusiasmado por las ideas de Copérnico y utilizando los precisos datos astronómicos sobre el planeta Marte que le suministró su maestro Brahe, llegó a la conclusión de que las observaciones no se adaptaban a una supuesta órbita circular. Dedujo que los datos encajaban con una <u>elipse</u> (*figura 6*). Establece así lo que se conoce como **primera ley de Kepler** o **ley de las órbitas**:

Los planetas se mueven en órbitas elípticas, con el Sol situado en un foco.

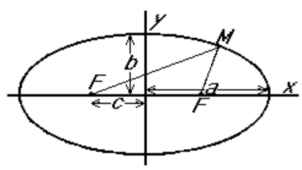


*Figura 6. La elipse es el lugar geométrico de los puntos que cumplen que la suma de sus distancias a los focos **F** es constante. Las distancias **a, b y c** son el semieje mayor, el semieje menor y la mitad de la distancia focal de la elipse. La excentricidad (e) de una elipse es: $e = c/a$. Si los focos coinciden, **a** y **b** son iguales, **c**=0; la excentricidad es nula y la elipse se convierte en un círculo.*

Esta ley rompe con la ciencia antigua, que consideraba al MCU como perfecto. No obstante, en la mayoría de los casos, las órbitas de los planetas tienen excentricidades muy pequeñas (*tabla 1*), por lo que pueden considerarse círculos descentrados (*figura 7*).

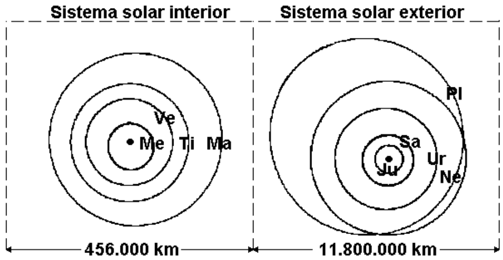


Figura 7. Escala del sistema solar. El sistema solar exterior es unas 26 veces mayor que el interior. Sólo se aprecia cierta excentricidad en la órbita para Mercurio y para Plutón.

Kepler publicó esta ley en 1609 en su libro "*Astronomía Nova*", junto a la **segunda ley** o **ley de las áreas**:

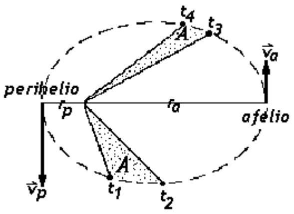


Figura 8

La línea recta imaginaria que une cada planeta con el Sol (radio vector) barre áreas iguales en tiempos iguales.

Es decir, la velocidad areolar (área barrida en la unidad de tiempo por el radio vector) es constante. Esto implica que el movimiento de los planetas no es uniforme: van más rápidos en las proximidades del perihelio (punto más próximo al Sol) y más lentos en las proximidades del afelio (punto más alejado del Sol) (*figura 8*).

La búsqueda de magnitudes que permanecen constantes en el transcurso de los cambios es una de las aficiones favoritas de los físicos y, precisamente, esta segunda ley de Kepler puede ser entendida como consecuencia de la constancia de una magnitud muy utilizada en mecánica: la cantidad de movimiento angular o momento angular (*ver apartado 4 de este tema, página 9*).

Kepler publica en 1616 otro libro titulado "*Sobre la armonía del mundo*" que contenía su **tercera ley** o **ley de los períodos**:

Los cuadrados de los períodos orbitales (T) de los planetas son proporcionales a los cubos de sus distancias medias al Sol (r): $\frac{T^2_{planeta}}{r^3_{Sol-planeta}} = k_S$***, siendo k$_S$ una constante que depende del Sol, o sea,*** $T_p^2 = k_S \cdot r_{S-p}^3$

Esta ley, deducida por Kepler para el sistema solar, es válida para cualquier conjunto de satélites con su astro central. Lógicamente, cada sistema tiene valores distintos de la constante, pues esta depende del astro central.

Esta ley permite conocer la distancia relativa entre los planetas, ya que el tiempo que tarda un planeta en recorrer su órbita se conoce desde la antigüedad. También justifica el que los planetas más alejados del Sol tardan más tiempo en recorrer su órbita que los que están más cerca del mismo.

Las tres leyes deducidas por Kepler constituyen la primera descripción cinemática del movimiento planetario, sin plantear nada sobre la causa que hace que esos movimientos sean así. Hubo que esperar unos sesenta años para que Newton estableciera dicha causa: la gravitación.

Tabla 1. El sistema solar en números.

Cuerpo o astro (satélites)	Masa en relación a la Tierra	Radio medio en relación a la Tierra	Densidad media en relación a la Tierra	Período de rotación ecuatorial (días)	Inclinación del eje de rotación (°)	Velocidad de escape (km/s)	Radio medio orbital (UA*)	Período orbital (años)	Inclinación orbital sobre eclíptica (°)	Excentricidad de la órbita
Sol	333.333,3 ($1{,}99\cdot10^{30}$ kg)	109,3 ($6{,}96\cdot10^{8}$ m)	0,26	24,6	-	-	-	-	-	-
Mercurio	0,055	0,38	0,98	58,65	2	3,6	0,386	0,241	7,00	0,21
Venus	0,815	0,95	0.95	243	183	10,2	0,721	0,615	3,39	0,01
Tierra	1 ($5{,}97\cdot10^{24}$ kg)	1 ($6{,}371\cdot10^{6}$ m)	1 ($5{,}52$ g/cm^3)	1 (23,93 h)	23,5	11,2	1	1 (**365,26 días**)	0	0,02
(Luna)	0,012 ($7{,}35\cdot10^{22}$ kg)	0,27 ($1{,}74\cdot10^{6}$ m)	0,61	27,32	-	2,37	0,003 ($3{,}84\cdot10^{8}$ m)	0,07 (**27,32 días**)		
Marte (Fobos, Deimos)	0,107	0,53	0,72	1,029	24	5,00	1,52	1,88	1,85	0,09
Cinturón de asteroides, como Ceres, Pallas, Vesta, ...							2,70			
Júpiter (Ganimedes, Calisto, Europa, Io y 12 más)	317,8	11,20	0,24	0,410	3	60,3	5,20	11,86	1,31	0,05
Saturno (Titán, Japeto, Tetis, Dione, Rhea, Mimas y 12 más)	95,1	9,42	0,13	0,426	27	36,1	9,54	29,46	2,49	0,06
Urano (Miranda , Óberon, Ariel, Titania, Umbriel y 16 más)	14,5	4,10	0,23	0,681	98	21,7	19,18	84,01	0,77	0,05
Neptuno (Tritón, Nereida y 6 más)	17,2	3,88	0,32	0,761	29	23,3	30,06	164,79	1,77	0,01
Cinturón de Kuiper: Plutón (Caronte) (más de 100 astros) Sedna	0,004	0,18 ≈0,14	0,36	6,3 ≈40	90	1,1	39,42 ≈463	248,59 ≈10.500	17,15	0,25 0,86

****UA = Unidad Astronómica:*** equivale a la distancia entre la Tierra y el Sol, es decir, 150 millones de km ($1{,}5\cdot10^{11}$ m).

A.3. Resuelve las siguientes actividades:

A.3.1. El tiempo transcurrido en describir la Tierra media órbita en torno al Sol, desde el equinoccio de primavera al equinoccio de otoño, es mayor que el que tarda en describir la otra media órbita. ¿Qué consecuencias sacas de esta observación astronómica? ¿Entre que fechas estará más próxima la Tierra al Sol? ¿Cómo justificas el fenómeno de las estaciones?

A.3.2. Comprueba la validez de la ley de los períodos de Kepler, en base a los datos de la *tabla 1*.

A.3.3. Calcula el radio medio de la órbita de Urano sabiendo que su período es 84 veces mayor que el de la Tierra. Dato: $r_{Sol\text{-}Tierra}$ = $1{,}5\cdot10^{11}$ m.

A.3.4. Sabiendo la distancia Tierra-Luna ($r_{T\text{-}L}$) y el período de revolución de la Luna (T_L), ¿cómo podrías determinar el radio de la órbita de un satélite de período conocido?

Determina el radio de la órbita de un satélite artificial geoestacionario, o sea, que siempre se encuentra sobre el mismo punto de la Tierra ($T_{satelite}$=24 horas). Datos: $r_{T\text{-}L}$ = $3{,}84\cdot10^8$ m; T_L=27,3 días.

3. ¿CÓMO LLEGÓ NEWTON A LA LEY DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL?

Confirmado el modelo heliocéntrico, en la segunda mitad del siglo XVII numerosos científicos se preguntaban sobre el tipo de fuerza con la que debe actuar el Sol para que los planetas se muevan según las leyes de Kepler.

Aunque científicos contemporáneos de Newton (Robert Hooke y Edmond Halley, entre otros) ya suponían que la fuerza que determinaba el movimiento de los planetas era atractiva y central o centrípeta y que disminuía conforme al cuadrado de la distancia, fue el genial científico inglés quien tuvo la audacia para suponer que esa fuerza era la misma que hacía caer una piedra al suelo; o sea, tal fuerza existía entre dos cuerpos cualesquiera del universo. Newton suponía que si un cuerpo era lanzado en sentido horizontal con suficiente velocidad, estaría cayendo continuamente sin llegar a tocar tierra y quedaría en órbita (*figura 9*). Con esta atrevida hipótesis, Newton extendió a la mecánica celeste las leyes que regían la mecánica terrestre, algo que chocaba de lleno con la enseñanza aristotélica, de absoluta separación entre lo celeste y lo terrestre.

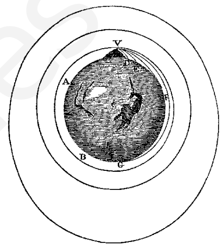


Figura 9

Ahora bien, si la fuerza que ejerce un cuerpo sobre otro es centrípeta, o sea, del tipo: $F_c = \frac{m\mathrm{v}^2}{r} = m\omega^2 r$, ¿cómo es posible que disminuya conforme al cuadrado de la distancia? Newton, basándose en las leyes de Kepler, llegó a deducir matemáticamente esta relación.

Newton consideró puntuales los cuerpos implicados y supuso circulares las órbitas elípticas de muy pequeña excentricidad que describía Kepler en su 1ª ley (con ello el error cometido era despreciable y los cálculos se simplificaban mucho). Al ser la trayectoria circular, la velocidad v de un cuerpo (por ejemplo, un planeta de masa m_p) en órbita a una distancia r alrededor de otro (por ejemplo, el Sol, de masa m_S) es constante en valor (2ª ley de Kepler), pero varía continuamente de dirección, o sea, el planeta está sometido a una aceleración normal o centrípeta producida por una fuerza central, dirigida hacia el Sol y ejercida por éste (*figura 10*), de módulo: $F_{S,p} = \frac{m_p\mathrm{v}^2}{r} = m_p\omega^2 r = m_p\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = m_p\frac{4\pi^2}{T^2}r$, donde T es el período orbital del planeta.

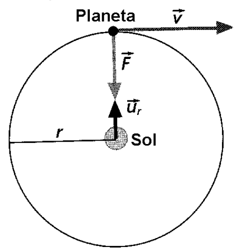


Figura 10

Pero considerando la 3ª ley de Kepler ($T^2 = k_S\cdot r^3$), la fuerza central que actúa sobre el planeta queda así: $F_{S,p} = \frac{4\pi^2}{k_S}\frac{m_p}{r^2}$; muestra que <u>dicha fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al Sol</u>.

Por el principio de acción y reacción, el planeta ejerce sobre el Sol una fuerza de igual módulo aunque se dirige en sentido contrario. Razonando por analogía, podemos escribir: $F_{p,S} = \frac{4\pi^2}{k_p}\frac{m_S}{r^2}$, y dado que $F_{S,p} = F_{p,S}$, nos queda: $\frac{4\pi^2}{k_S}\frac{m_p}{r^2} = \frac{4\pi^2}{k_p}\frac{m_S}{r^2}$, o también: $\frac{4\pi^2}{k_S m_S} = \frac{4\pi^2}{k_p m_p}$, cocientes que Newton asoció a una constante de valor universal, G, pues es válida para la interacción de dos cuerpos cualesquiera. Incluyendo G en cualquiera de las expresiones de las fuerzas centrales se llega a la <u>expresión matemática de la ley de la gravitación universal</u>, recogida en 1687 en su libro "*Principios matemáticos de filosofía natural*": $\boxed{F = F_{S,p} = F_{p,S} = G\frac{m_S m_p}{r^2}}$.

Newton llegó a comprobar la validez de esta ley comparando la aceleración con la que caen los objetos sobre la superficie terrestre, la llamada gravedad ($a_{objeto} = g = \frac{F_{T,objeto}}{m_{objeto}} = G\frac{m_T}{R_T^2}$) con la aceleración centrípeta a que está sometida la Luna en su órbita ($a_{Luna}=\frac{F_{T,L}}{m_L}=G\frac{m_T}{r^2_{T-L}}$); resulta: $\frac{g}{a_{Luna}}=\frac{r^2_{T-L}}{R^2_T}\cong 3600$, lo que concuerda con la realidad: g=9,81 m/s^2;

$a_{Luna}=\frac{v^2}{r_{T-L}}=\frac{4\pi^2}{T^2}r_{T-L}=2{,}72\cdot10^{-3}$ m/s^2); $\frac{g}{a_{Luna}}=\frac{9{,}81}{2{,}72\cdot10^{-3}}=3.607\cong 60^2$.

La ley de la gravitación confirma que la aceleración de la gravedad ($g=G\frac{m_T}{R^2}$) es independiente del valor de la masa sobre la que actúa (de ahí que una piedra de 100 g, en ausencia de rozamientos, cae con la misma aceleración que otra de 10 kg), y se extiende indefinidamente, aunque su intensidad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro del objeto que la origina. Además, da significado físico a la constante introducida por Kepler en su tercera ley ($k_S=\frac{4\pi^2}{Gm_S}$, donde se observa que sólo depende de la masa del Sol, como ya predecía el propio Kepler).

La ley de la gravitación universal resume en una única ecuación la interacción entre dos masas cualesquiera del universo. Expresada en forma vectorial: $\boxed{\vec{F}\ =\ -G\frac{m_S m_p}{r^2}\vec{u}_r}$, donde $\vec{u}_r=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$, es un vector unitario dirigido según la recta que une las masas.

La interacción gravitatoria entre dos masas cualesquiera es atractiva y puede expresarse mediante una fuerza central directamente proporcional al valor de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa sus centros de masas.

Observa que (*figura 11*):

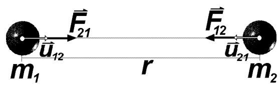


Figura 11

- Aunque la fuerza gravitatoria ha sido enunciada para masas puntuales, se demuestra que la fuerza gravitatoria ejercida entre cuerpos voluminosos es la misma que actuaría si los cuerpos tuvieran toda su masa concentrada en un punto, el centro de masas, y consideramos la distancia existente entre dichos centros.
- La fuerza actúa a distancia, sin influencia ni necesidad de medio material, a lo largo de la línea de acción que une los centros de las masas (dirección del vector unitario), y es siempre atractiva (el vector fuerza y el vector unitario tienen sentidos contrarios).
- La fuerza gravitatoria entre dos masas siempre se manifiesta por parejas, de acuerdo con el principio de acción y reacción. Ambas fuerzas tienen el mismo módulo y dirección, pero sentidos contrarios y puntos de aplicación en cuerpos diferentes (esto hace que sus efectos puedan ser muy distintos).
- El valor de la constante de gravitación *G* es universal (independiente de la composición, forma o de cualquier otra característica de las masas) y muy pequeño: $6{,}67\cdot10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}. *G* representa la fuerza con que se atraerían dos masas de 1 kg cuyos centros de masa estén situados a 1 m de distancia, lo que indica que la fuerza gravitatoria es muy débil (la más débil de las cuatro fuerzas fundamentales conocidas), sólo apreciable si alguna de las masas es gigantesca.

Cuando están presentes más de dos masas, la fuerza entre cualquier par de masas se calcula mediante la ley de la gravitación universal. La fuerza resultante sobre una de ellas es igual al vector suma de las fuerzas debidas a las diversas masas por separado (**principio de superposición**): $\vec{F}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i0}=\sum_{i=1}^{n}G\cdot\frac{M\cdot m_i}{r_{i0}^2}\cdot\vec{u}_{ri0}$ (*figura 12*).

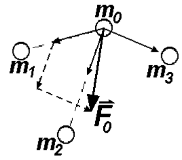
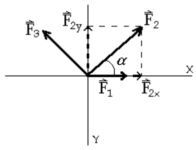


Figura 12

***Nota importante de cara a la resolución de problemas que impliquen magnitudes vectoriales*:**

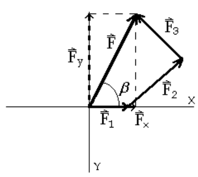
La fuerza resultante (o como veremos más adelante, el campo resultante) debido a varias masas (o cargas eléctricas) se obtiene calculando la fuerza (o el campo) debido a las diversas masas (o cargas) por separado, como si las demás masas (o cargas) no existieran, y sumando vectorialmente las fuerzas (o campos) así obtenidos: Pasos:



1º) Situamos las masas (o cargas) en un sistema de ejes cartesianos.

2º) Calculamos el módulo (valor absoluto) de las fuerzas (o campos) parciales: F_1, F_2 y F_3 en nuestro ejemplo.

3º) Determinamos las fuerzas (o campos) como vectores. Así: $\vec{F}_2=\vec{F}_{2x}+\vec{F}_{2y}=(F_2\cdot\cos\alpha)\cdot\vec{i}+(F_2\cdot sen\alpha)\cdot\vec{j}$.



4º) Se halla la resultante de todas las fuerzas (o campos) situados sobre el mismo eje: $\vec{F}_x=\sum\vec{F}_{ix}$; $\vec{F}_y=\sum\vec{F}_{iy}$.

5º) La fuerza (o campo) resultante será: $\vec{F}=\vec{F}_x+\vec{F}_y=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}$, de módulo: $F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}$, y orientación respecto al semieje O*X* positivo: tg β =F_y/F_x ⇒ β= arctg F_y/F_x

A.4. Resuelve las siguientes actividades (*salvo que se señale lo contrario, toma de la tabla 1 -pág. 5- los datos que precises para resolver las actividades numéricas)*:

A.4.1. Representa las fuerzas que resultan de la interacción entre: a) la Luna y la Tierra; b) un satélite en órbita, dentro de la atmósfera terrestre, y la Tierra; c) un proyectil lanzado horizontalmente y la Tierra. ¿Por qué la Luna o el satélite en órbita no caen sobre la Tierra como el proyectil?

A.4.2. Según el principio de acción y reacción, la fuerza que la Tierra ejerce sobre una piedra es la misma que la que la piedra ejerce sobre la Tierra. Entonces, ¿por qué no es la Tierra la que asciende hacia la piedra? Para aclararte, determina: a) La magnitud de la fuerza con que la Tierra atrae a una piedra de 100 g. b) La magnitud de la fuerza con que la piedra anterior atrae a la Tierra. c) El valor de la aceleración que adquiere la piedra sometida a esa fuerza. d) El valor de la aceleración que adquiere la Tierra sometida a esa fuerza. e) La magnitud de la fuerza con que la Tierra atraerá a otra piedra de 10 kg, así como la aceleración que adquiere dicha piedra.

A.4.3. Dos bloques de 5 toneladas de masa distan 5 m, apoyados sobre una superficie horizontal, siendo el coeficiente de rozamiento superficie-bloque de 0,02. Explica razonadamente por qué, existiendo una fuerza de atracción gravitatoria entre los bloques, estos no se aproximan.

A.4.4. Una persona pesa en la superficie terrestre 618 N. Calcula su peso si se traslada: a) a la superficie solar; b) a la superficie lunar; c) a la superficie de un planeta de masa el doble a la de la Tierra y de radio el triple que el de la Tierra.

A.4.5. Compara las fuerzas de atracción gravitatoria existentes entre la Tierra y el Sol, y entre la Tierra y la Luna. Determina la fuerza ejercida sobre la Tierra debida a las masas del Sol y la Luna de manera conjunta cuando se encuentran: a) en línea y en el orden S-T-L; b) en línea y en el orden S-L-T; c) formando un ángulo recto con la Tierra en el vértice.

A.4.6. ¿Cuál es la causa de que la Tierra esté "achatada" por los polos? ¿Y cuál es la causa de las mareas oceánicas?

A.4.7. Considerando circulares, en primera aproximación, las órbitas de los planetas y teniendo en cuenta que la fuerza centrípeta que actúa sobre los mismos sería debida, según Newton, a la atracción gravitacional por parte del Sol, deducir la relación entre el período de un planeta y su distancia al Sol. Compararla con el resultado experimental (tercera ley de Kepler).

Conociendo el radio medio de la órbita de un satélite en torno a un astro y su período de revolución, ¿podremos estimar la masa del astro? Si es posible, determina, tomando los datos precisos, la masa del planeta Tierra y la masa del Sol.

El planeta Venus no tiene satélites naturales a su alrededor. ¿Cómo podemos determinar la masa de Venus?

A.4.8. El cometa Halley tiene un período de 76 años. ¿Cuál es su distancia media al Sol?

A.4.9. La nave espacial Columbia da una vuelta a la Tierra en 90 minutos. ¿A qué altura sobre la superficie terrestre orbita la nave? ¿Cuál es su rapidez en la órbita?

A.4.10. Un satélite gira alrededor de la Tierra con una velocidad de 800 m/s. Calcula su período de rotación y la altura a que se encuentra respecto a la superficie de la Tierra.

A.4.11. El satélite Meteosat envía tres veces al día imágenes de la situación atmosférica sobre Europa para confeccionar los mapas del tiempo. Halla su período de revolución y el radio de la trayectoria que describe.

A.4.12. El satélite mayor de Saturno, Titán, describe una órbita de radio medio $1{,}222 \cdot 10^6$ km en un período de 15,945 días. Determina la masa del planeta Saturno y su densidad. Dato: R_S = 58.545 km.

A.4.13. La Luna dista de la Tierra 384.000 km y su período de revolución alrededor de ésta es 27,32 días. ¿Cuál será su período de revolución si se encontrase a 100.000 km de la Tierra?.

A.4.14. El planeta Marte tiene un radio 0,53 veces el de la Tierra (R_T = 6371 km). Fobos, satélite de Marte, se puede suponer que describe una órbita circular de radio 2,77 veces el de Marte, en 7 horas, 30 minutos y 14 segundos. Determina la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta Marte haciendo uso de estos datos.

A.4.15. La estación espacial internacional (ISS) gira en una órbita situada a una distancia media de 400 km sobre la superficie terrestre. Calcula su velocidad orbital, su aceleración, su período de revolución y el número de vueltas que da a la Tierra por día.

A.4.16. Los planetas, en general, no son visibles, pues no llega hasta nosotros la luz que reflejan. Razona como podemos predecir su existencia sin necesidad de enviar una sonda al espacio.

3.1. CONSECUENCIAS DEL TRABAJO DE NEWTON: DESCUBRIMIENTOS ASTRONÓMICOS.

Hasta la actualidad se han producido una serie de descubrimientos astronómicos relacionados con la ley de la gravitación que han puesto de manifiesto su carácter universal. Así, por ejemplo, el **descubrimiento de nuevos planetas** a partir de las perturbaciones que producen en las órbitas de los planetas ya conocidos: las irregularidades en la órbita de Urano, descubierto en 1781 por Herschel, condujeron al descubrimiento de Neptuno en 1846 por Leverrier y Adams; por las perturbaciones que producía en este último, fue descubierto Plutón en 1930 por Tombaugh.

Hacia 1784 Herschel mostró que las estrellas observables constituían un sistema con forma de lente, es decir, una **galaxia**. El mismo Herschel observó en 1803 que algunas parejas de estrellas próximas giran una alrededor de la otra (estrellas binarias), según la ley de la gravitación. También se observó (Halley en 1714, Messier en 1781) que las estrellas tienden a agruparse por efecto de la gravitación, formando cúmulos globulares y abiertos.

Por último, desde que en 1923, Hubble, del observatorio del Monte Wilson, mostró la existencia de otras galaxias, se ha observado que éstas se agrupan en **cúmulos y supercúmulos galácticos**.

¿Qué ponen de manifiesto estos descubrimientos? Han expandido considerablemente los límites del Universo. En efecto, durante muchos siglos se consideró que su tamaño era el del sistema solar. Con Herschel y otros se amplía al de una galaxia, la Vía Láctea, cuyo diámetro actualmente se estima en 10^5 años-luz (a.l.) y su espesor máximo en 10^4 a.l. Y, por último, en la actualidad, al de una inmensidad de galaxias (la más próxima, Andrómeda, se encuentra a $2{,}5 \cdot 10^6$ a.l. y las más alejadas a 10^{10} a.l.).

Con ello, se ha ampliado la validez de la gravitación universal, que actúa no sólo en el sistema solar y la galaxia, sino a escalas cósmicas, agrupando las galaxias en cúmulos y supercúmulos.

4. ¿CÓMO EXPLICA LA DINÁMICA EL MOVIMIENTO DE TRASLACIÓN Y ROTACIÓN DE LOS PLANETAS?

Los planetas del Sistema Solar realizan dos movimientos fundamentales: la traslación alrededor del Sol (todos en sentido antihorario, vistos desde el polo norte celeste), en órbitas planas, y la rotación en torno a su propio eje (también en sentido antihorario, salvo Venus, Urano y Plutón). Para comprender los movimientos anteriores, antes debemos establecer las magnitudes que los caracterizan.

Las fuerzas pueden causar en los objetos alguno(s) de estos efectos observables:

- Una deformación en el objeto; por ejemplo, cuando estiramos o encogemos un muelle o una goma.
- Un cambio en su estado de reposo o movimiento, lo que puede suponer:
  - que cambie la rapidez o celeridad del movimiento (cuando un coche acelera o frena en una recta), o/y
  - que cambie la dirección del movimiento (cuando el objeto gira o rota en torno a un punto o eje, por ejemplo, al abrir o cerrar una puerta, al girar un volante o en los movimientos de traslación y de rotación planetarios).

La magnitud que caracteriza el estado de movimiento de una partícula respecto del origen de un sistema de referencia es su **cantidad de movimiento o momento lineal**: $\vec{p} = m\vec{v}$ (*figura 13*). Su variación respecto del tiempo constituye la segunda ley de Newton o principio fundamental de la dinámica, que permite calcular la fuerza resultante que actúa sobre una partícula de masa constante: $\vec{F} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \frac{\partial (m \cdot \vec{v})}{\partial t} = \frac{m \partial \vec{v}}{\partial t} = m\,\vec{a}$. La constancia en el momento lineal de una partícula implica la ausencia de fuerza resultante actuando sobre la misma; por tanto, la partícula estará en reposo o se moverá en línea recta y con rapidez constante (MRU).

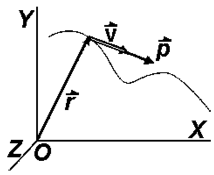


Figura 13

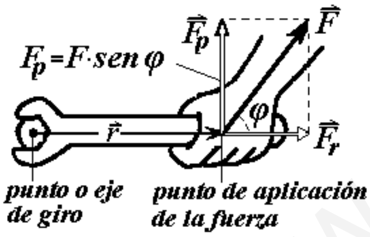


Figura 14

El efecto de giro que provocan las fuerzas sobre las partículas es tanto más acusado cuanto mayor sea la distancia desde el punto de aplicación de la fuerza al punto o eje de giro y cuanto mayor sea la componente de la fuerza ejercida en la dirección perpendicular a la línea que determina la distancia entre el punto de giro y el punto de aplicación de la fuerza. Para caracterizar este efecto giratorio de las fuerzas sobre las partículas se define la magnitud vectorial **momento de una fuerza respecto de un punto**, $\vec{M}$, también conocido como momento de giro o torsión (*figura 14*):

Momento $\vec{M}$ de una fuerza $\vec{F}$ respecto de un punto *O* es igual al producto vectorial: $\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$.

De la definición de producto vectorial se deducen las características del vector $\vec{M}$:

- Su dirección es perpendicular al plano que determinan el vector de posición $\vec{r}$ y el vector fuerza $\vec{F}$. Esta es la dirección del eje de giro del movimiento que produciría la fuerza $\vec{F}$ al actuar sobre una partícula sujeta por el punto O respecto del cual se define el momento.
- Su sentido es el indicado por la regla de Maxwell o regla de la mano derecha, que coincide con el del avance de un tornillo o sacacorchos al voltear $\vec{r}$ (primer vector) sobre $\vec{F}$ (segundo vector) por el camino más corto. Es el sentido en el que avanzaría un tornillo situado en la dirección del eje de giro definido.
- Su módulo es: $M = |\vec{M}| = r \cdot F \cdot |sen\varphi|$ (unidad SI: N·m), donde φ es el ángulo formado por el vector de posición $\vec{r}$ y el vector fuerza $\vec{F}$. Podemos interpretar que r es la distancia entre el punto de giro y el punto de aplicación de la fuerza y el producto $F \cdot |sen\varphi|$ es la componente de la fuerza ejercida en la dirección perpendicular a la línea que determina la distancia entre el punto de giro y el punto de aplicación de la fuerza, o sea, la componente de la fuerza $\vec{F}$ que provoca giro ($\vec{F}_p$) (la componente radial $\vec{F}_r$ no ejerce ningún efecto de giro).

De forma análoga a como hemos definido la magnitud momento de una fuerza, podemos definir una cantidad de movimiento para el giro. Esta nueva magnitud se conoce como **momento angular o cinético**, $\vec{L}$, y es muy útil para describir los movimientos curvilíneos de una partícula. Por definición (*figura 15*):

Momento angular $\vec{L}$ de una partícula de masa *m* respecto de un punto *O* es igual al producto vectorial: $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$

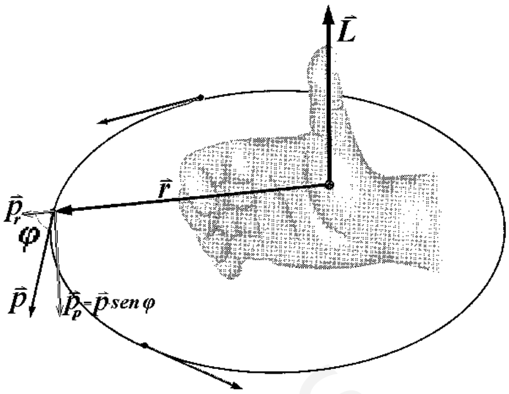


Figura 15

El vector $\vec{L}$ es perpendicular al plano que determinan $\vec{r}$ y $\vec{p}$ o velocidad $\vec{v}$, y su sentido coincide con el del avance de un tornillo al voltear el $\vec{r}$ sobre $\vec{p}$ o $\vec{v}$ por el camino más corto. Su módulo es: $L = |\vec{L}| = r \cdot m \cdot v \cdot |sen\varphi|$ (unidad SI: $kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$), donde φ es el ángulo formado por el vector $\vec{r}$ y el vector $\vec{p}$ o $\vec{v}$; el producto $v \cdot |sen\varphi|$ es la componente de la velocidad orientada en la dirección perpendicular a la línea que une la partícula con el punto de giro, o sea, la componente de la velocidad $\vec{v}$ que contribuye a la cantidad de movimiento de giro ($\vec{v}_p$) (la componente radial $\vec{v}_r$ no contribuye al momento angular).

Las dos nuevas magnitudes momento introducidas están relacionadas entre sí por el llamado **teorema del momento angular** o **ecuación fundamental de la dinámica de rotación**:

El momento angular de una partícula con respecto a un punto varía, en el transcurso del tiempo, cuando actúa sobre ella un momento de fuerza resultante, respecto del mismo punto.

Matemáticamente: $\boxed{\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$. Observa como se llega a esta relación: $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \dfrac{d(\vec{r} \wedge \vec{p})}{dt} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{M}$, donde hemos hecho uso de las igualdades: $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$; $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$; $\vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{M}$, y hemos tenido en cuenta que $\vec{v}$ y $\vec{p}$ son vectores paralelos.

De la misma forma que la fuerza es la magnitud responsable de la variación de la cantidad de movimiento lineal, el momento de giro es la magnitud responsable de la variación de la cantidad de movimiento angular.

La constancia en el momento angular de una partícula implica la ausencia de momento de fuerza resultante actuando sobre la misma. Ello sucede si sobre la partícula no actúa ninguna fuerza o están compensadas las fuerzas que actúan. Pero también puede ocurrir que las fuerzas que actúan sobre la partícula no estén compensadas y el momento de giro resultante sea nulo, conservándose el momento angular. En el estudio de la gravitación hay dos situaciones muy interesantes donde esto sucede:

1ª La fuerza gravitatoria que ejerce el Sol sobre cualquier planeta siempre está dirigida hacia el mismo punto. La fuerza gravitatoria es una fuerza central o centrípeta. Cuando un objeto se mueve bajo la acción de una fuerza central permanece constante su cantidad de movimiento angular respecto del punto que hace de centro de fuerzas. La justificación es trivial: el vector de posición del punto de aplicación de la fuerza, $\vec{r}$, es paralelo a la fuerza $\vec{F}$, de manera que el momento de giro es nulo (*figura 16*).

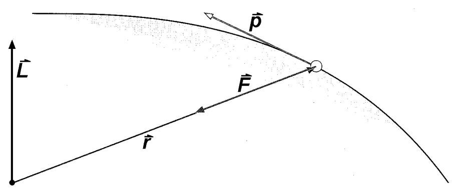


Figura 16

En esta situación, la trayectoria que describe el cuerpo depende de su velocidad $\vec{v}$:

- Si $\vec{v}$ es inicialmente nula o se dirige hacia el punto que hace de centro (misma dirección que el vector $\vec{r}$), la trayectoria del movimiento es recta y el movimiento es variado, siendo $\vec{L} = 0$.

- Si $\vec{v}$ y $\vec{r}$ no coinciden inicialmente en dirección, la trayectoria del movimiento es curva (trayectoria circular, elíptica, parabólica o hiperbólica, dependiendo del ángulo de partida entre los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$ y del valor inicial de la velocidad[1]), siendo $\vec{L} \neq 0$. Cuando el ángulo de partida entre los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$ es de 90º obtenemos el caso particular de una trayectoria circular.

La conservación del momento angular en el movimiento de los planetas en torno al Sol[2], al tratarse de una magnitud vectorial, implica tres consecuencias:

- La conservación de la dirección implica que no se modifica el eje de giro y que, por tanto, el planeta siempre gira en el mismo plano.

[1] Se estudia en detalle cuando se da cada tipo de trayectoria curva al hablar del lanzamiento de satélites artificiales en la unidad siguiente.

[2] Los planetas realmente no orbitan en torno al centro geométrico del Sol. Tanto los planetas como el Sol orbitan en torno a un centro común denominado centro de masas del sistema solar, cuya posición relativa cambia en función de la disposición de los planetas.

- La conservación del sentido obliga a que el planeta siempre gire en la misma dirección.
- La conservación del módulo supone que el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales (algo que ya estableció Kepler en su segunda ley) (*figura 17*).

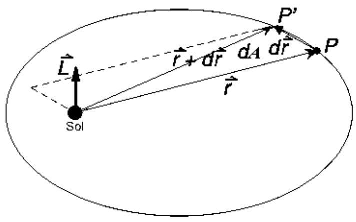


Figura 17

Observa como se puede deducir la segunda ley de Kepler de la constancia del momento angular en los movimientos planetarios.

Un planeta describe una órbita elíptica alrededor del Sol. Cuando el planeta se desplaza $\partial\vec{r}$, el área que barre es aproximadamente la mitad del paralelogramo determinado por los vectores $\vec{r}$ y $\partial\vec{r}$:

$$\partial A = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\wedge\partial\vec{r}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\wedge\vec{v}\partial t\right|$$

Por tanto: $$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\wedge\vec{v}\right| = \frac{1}{2m}\left|\vec{r}\wedge m\vec{v}\right| = \frac{\left|\vec{L}\right|}{2m} = \frac{L}{2m} = cte.$$

2ª La fuerza gravitatoria que ejerce el Sol sobre cualquier planeta no modifica el momento angular que el planeta posee respecto a su centro de masas como consecuencia de su rotación (*figura 18*). Por eso el eje de rotación del planeta no cambia su orientación y el planeta da vueltas sobre sí mismo igual de deprisa (período de rotación constante).

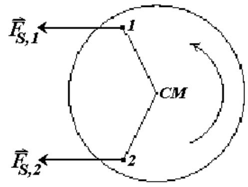


Figura 18

El planeta gira en torno a su centro en sentido antihorario. Consideramos dos regiones idénticas, 1 y 2, situadas a la misma distancia del centro. La fuerza gravitatoria que ejerce el Sol sobre la región 1, $\vec{F}_{S,1}$, origina un momento a favor del movimiento de rotación que es exactamente compensado por el momento en contra producido por la fuerza gravitatoria que ejerce el Sol sobre la región 2, $\vec{F}_{S,2}$.

A.5. Resuelve las siguientes actividades (*salvo que se señale lo contrario, toma de la tabla 1 -pág. 5- los datos que precises para resolver las actividades numéricas)*:

A.5.1. Una partícula de 4 kg posee una velocidad $\vec{v} = 5\vec{j}$ m/s en el punto (2, -1, 0) y actúa sobre ella una fuerza $\vec{F} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ *N.* Determina el momento de la fuerza que actúa sobre la partícula y su momento angular, ambos respecto: a) del origen de coordenadas; b) del punto (1, 1, 1). Deduce alguna conclusión.

A.5.2. Una partícula de 2 kg se mueve con una velocidad constante $\vec{v} = 3\vec{j}$ m/s. Determina su momento angular con respecto al origen de coordenadas cuando la partícula está en los puntos A (2, 0), B (2, 1) y C (2, 2). Deduce alguna conclusión.

A.5.3. Si el movimiento que efectúa un cuerpo es circular uniforme, determina el vector $\vec{L}$ de dicho cuerpo respecto al centro de la circunferencia, expresado en magnitudes lineales y angulares.

¿Qué cambia en $\vec{L}$ cuando el cuerpo describe un movimiento curvilíneo cualquiera que se repite de forma periódica?

A.5.4. Explica, en términos de momento angular, los siguientes hechos:

A) Los patinadores sobre hielo pliegan los brazos hacia su cuerpo para aumentar su velocidad de giro.
B) Los saltadores de trampolín adoptan la postura oval para ejecutar triples saltos mortales.
C) Los gatos, aunque se les tire de espaldas, caen de patas.

A.5.5. Deduce cuál es la relación entre las velocidades de un planeta en el afelio (punto más lejano) y en el perihelio (punto más cercano) en función de las distancias desde esos puntos al Sol. ¿Avalan estos resultados las observaciones de Kepler?

Aplicación: Si en el afelio la velocidad de la Tierra es 30 km/s y la distancia Sol-Tierra es $152 \cdot 10^6$ km, calcula la velocidad de la Tierra en el perihelio sabiendo que en este punto la distancia Sol-Tierra es $147 \cdot 10^6$ km.

A.5.6. Un satélite en órbita elíptica alrededor de la Tierra tiene su perihelio a 800 km de la superficie terrestre y su afelio a 3.200 km de dicha superficie. La velocidad en el perihelio es de 36.000 km/h. Calcula: a) la velocidad areolar; b) la velocidad lineal del satélite en el afelio.

A.5.7. Si se elevara la temperatura de modo que se fundieran los hielos polares y el agua se distribuyera por los océanos, ¿aumentaría o disminuiría la duración de los días en la Tierra?

A.5.8. ¿Por qué los satélites artificiales no tienen formas aerodinámicas? Si colocamos el satélite en una capa atmosférica donde la fricción con el aire sea significativa, ¿cómo se modifica la trayectoria del satélite?, ¿se conserva su momento angular?

A. Final. Realiza un resumen de las ideas más importantes aprendidas en esta unidad, así como un cuadro con las ecuaciones y fórmulas que has manejado a lo largo de la misma.

APÉNDICES.

A.1. ANÁLISIS DE LOS FACTORES DE LA LEY DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL.

La constante de gravitación universal (*G*).

El valor de *G* parece fácil de determinar a partir de la expresión: $G = g\frac{R_T^2}{m_T}$, pero en la época de Newton no se conocía el valor de la masa de la Tierra.

Numerosos intentos para determinar el valor de *G* midiendo la fuerza con que se atraían dos masas conocidas separadas una distancia también conocida, fracasaron sencillamente porque la fuerza gravitatoria que la Tierra ejercía sobre las masas era inmensamente mayor que la que éstas ejercían entre sí, con lo que quedaba enmascarada.

Henry Cavendish (1731-1810), haciendo uso de una balanza de torsión (*figura A.1*), determinó por primera vez el valor de *G* ($6{,}6 \cdot 10^{-11}$ Nm^2kg^{-2}), en 1798. Después, Philipp von Jolly desarrolló un método más sencillo y preciso (*figura A.2*), obteniendo el valor actual ($6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2kg^{-2}).

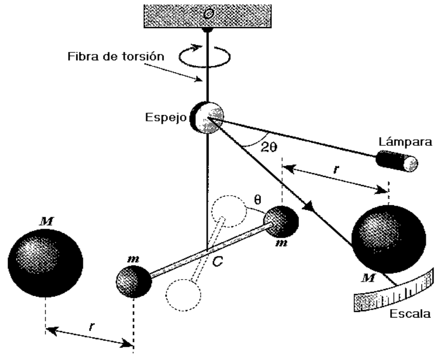
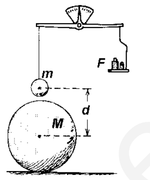


Figura A.1. Balanza de torsión de Cavendish

Conforme las esferas pequeñas, en suspensión, son atraídas por las esferas grandes, fijas, la barra entre las esferas pequeñas gira un ángulo θ (medido con precisión por el rayo reflejado en un espejo acoplado al hilo en rotación). Conocido el ángulo de giro y el módulo de torsión del hilo (una propiedad característica del mismo), se calcula la fuerza de torsión, fuerza causada por la interacción gravitatoria entre las masas. Conocida la fuerza gravitatoria ya podemos determinar el valor de la constante de gravitación universal G.

Conocido el valor de *G*, se calculó con facilidad la masa de la Tierra ($5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg), en una época en que los exploradores todavía cartografiaban su superficie y nada se conocía de su interior.



Las esferas de masas M y m se atraen entre sí con una fuerza gravitatoria F que es igual a la fuerza peso necesaria para restaurar el equilibrio de partida.

Figura A.2. Método de von Jolly

Masa inercial y masa gravitatoria.

Del principio fundamental de la dinámica se deduce el concepto de masa inercial (*m=F/a*), como propiedad de la materia que mide su resistencia al cambio en la velocidad. Por otro lado, la ley de la gravitación universal implica el concepto de masa gravitatoria (*m=P/g*), como propiedad de la materia responsable de la fuerza gravitatoria de atracción entre dos cuerpos. Un-merosos experimentos muestran que estos conceptos, en principio distintos, son equivalentes; es decir, se pueden considerar la misma magnitud física.

3. La ley del inverso del cuadrado de la distancia.

La intensidad de la fuerza gravitatoria (también ocurre con la intensidad de la fuerza electrostática o con la intensidad de una onda esférica) varía conforme al inverso del cuadrado de la distancia (*figura A.3*). ¿Por qué? Imagina la "influencia gravitatoria" de un cuerpo surgiendo de su centro (como si de un foco puntual de masa *m* se tratase), y distribuyéndose por igual en todas direcciones (repara en el hecho de que la caída de los cuerpos a tierra acontece del mismo modo en todos los puntos de la superficie terrestre). Conforme aumenta la distancia al foco gravitacional, la "cantidad de influencia o intensidad gravitacional" se hace menor pues tiene que repartirse sobre una superficie esférica mayor. O sea, fuerza y área esférica son inversamente proporcionales, con lo que: $\frac{F_1}{F_2} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{4\pi R_2^2}{4\pi R_1^2}$, o sea, $\frac{F_1}{F_2} = \frac{R_2^2}{R_1^2}$, donde queda demostrada la ley del inverso del cuadrado de la distancia.

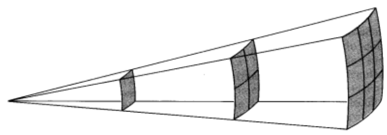


Figura A.3. La intensidad gravitacional disminuye de la misma manera que aumenta el área sobre la que se distribuye. Doble distancia supone cuatro veces más área y triple distancia nueve veces más área.

A.2. LAS MAREAS OCEÁNICAS: EL PODEROSO INFLUJO DE LA LUNA.

En el sistema Tierra-Luna tienen lugar fenómenos que sólo pueden entenderse cuando consideramos que los cuerpos que se atraen tienen dimensiones no despreciables. Tal es el caso de las mareas.

Se denomina ***marea*** al ascenso y descenso periódicos de las aguas oceánicas, incluyendo las del mar abierto, los golfos y las bahías, resultado, como ya explicó Newton, de la atracción gravitatoria de la Luna, fundamentalmente, y del Sol, sobre el agua y la propia Tierra.

El fenómeno de las mareas se repite dos veces a lo largo de un día lunar, cuya duración es algo mayor que la del día solar, 24 horas y 51 minutos, aproximadamente. Esta regularidad demuestra que la atracción gravitatoria de la Luna produce las mareas, aunque también interviene la atracción gravitatoria solar.

Pero, ¿cómo se producen? Todos y cada uno de los puntos de la Tierra no son igualmente atraídos por la Luna: los puntos más próximos a la Luna son atraídos con mayor intensidad que los puntos más alejados. A pesar de esta atracción diferenciada, si la Tierra fuese un sólido rígido, todos y cada uno de los puntos de la Tierra se moverían solidariamente y no apreciaríamos el fenómeno de las mareas. Pero la Tierra está cubierta en un 70% de agua y el agua carece de rigidez. Si suponemos que las aguas cubren de modo uniforme toda la superficie terrestre (para explicarlo de modo más sencillo), las aguas superficiales situadas en la cara de la Tierra orientada a la Luna se acercan hacia el satélite, por lo que se encuentran en pleamar (marea alta); a su vez, las aguas superficiales de la cara opuesta son las menos atraídas y se quedan "rezagadas" con respecto al conjunto terrestre, por lo que también se encuentran en pleamar (*figura A.4*). Si la Tierra estuviera totalmente cubierta de agua se deformaría hasta tener la forma de un elipsoide alineado con el sistema Tierra-Luna.

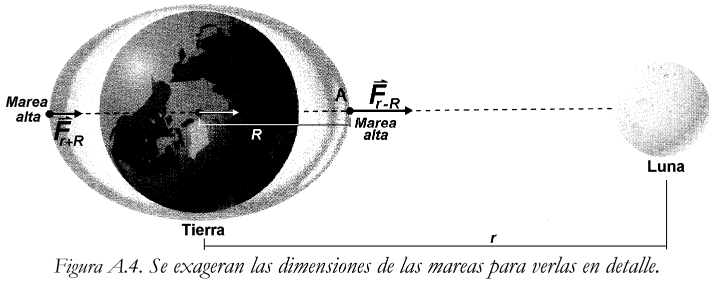


Figura A.4. Se exageran las dimensiones de las mareas para verlas en detalle.

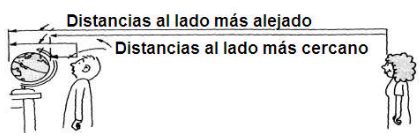


Figura A.5. Si te colocas cerca del globo, como la Luna en relación con la Tierra, la parte más cercana de éste está notablemente más próxima a ti que la parte más alejada. Si te colocas más lejos, como el Sol respecto a la Tierra, esta misma diferencia de distancias es menos significativa.

El Sol también interviene de manera directa en el fenómeno de las mareas, pero su influencia sobre las aguas es un 45% menor que el efecto debido a la Luna. Esta menor contribución del Sol al efecto de las mareas se debe a que la diferencia entre las intensidades de las fuerzas con que actúa la Luna sobre las aguas terrestres superficiales más próximas y más alejadas es mucho mayor que la correspondiente diferencia para el caso del Sol (*figura A.5*).

No obstante, la magnitud de la marea es el resultado de la combinación de los elipsoides de deformación generados por la Luna y el Sol, por lo que depende de las posiciones relativas del Sol y la Luna respecto a la Tierra en un instante dado (*figura A.6*). Durante los períodos de luna nueva y luna llena, el Sol, la Tierra y la Luna están alineados, los dos efectos se suman y se tienen las mareas vivas (las mareas altas ascienden más y las bajas descienden más de lo habitual). Cuando la Luna está en fase de cuarto menguante o de cuarto creciente, el Sol, la Tierra y la Luna forman un ángulo recto y se tienen las mareas muertas (las mareas altas son más bajas y las bajas más altas de lo normal).

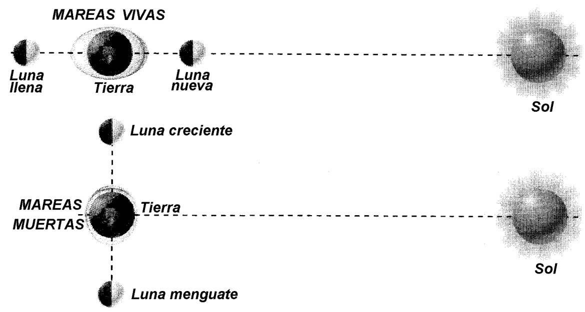


Figura A.6.

Comprendido el fenómeno, conviene aclarar que es más complejo de lo aquí expuesto, sencillamente porque no toda la superficie terrestre es acuosa y porque la Tierra gira sobre su eje. La ola de marea a través de los océanos (a medida que la Tierra gira) encuentra en su camino las sinuosas líneas litorales y las diferencias de profundidad del fondo marino; debido a ello, dicho avance experimenta notables rozamientos que lo frenan y hacen que la máxima elevación de las aguas no coincida exactamente con la dirección del sistema Tierra-Luna (*figura A.7*).

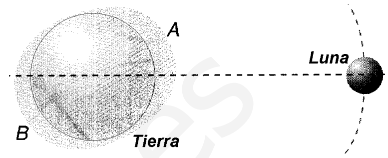


Figura A.7

¡APROVECHA LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS!

Aprovecha los recursos informáticos recogidos en soporte digital, en la Web del Departamento y en la Web personal de los autores. Te facilitarán el estudio y la comprensión de los conocimientos tratados en esta unidad.

SOLUCIONES A LAS ACTIVIDADES PLANTEADAS EN LA UNIDAD.

A.1. La regularidad de los movimientos celestes permitió a la humanidad controlar el tiempo (elaborar calendarios y realizar predicciones de ciertos acontecimientos de importancia en agricultura y pesca,...) y, además, orientarse sobre la Tierra (grandes caravanas que recorrían continentes) y en el mar (navegación). Las gentes creían que los cuerpos celestes influían en los grandes acontecimientos de este mundo, lo que aumentaba el poder de influencia de los sacerdotes, que eran los encargados de realizar las observaciones y registrar los datos astronómicos.

A.2.1. $v_{r\_e}=\frac{2\pi R_T}{T}=463{,}31m/s$; $v_{r\_nuestra}=\frac{2\pi R_T\cos\alpha}{T}=364{,}01m/s$

A.2.2. $v_o=\frac{2\pi d_{S-T}}{T}=29.885{,}8m/s\cong 29{,}9km/s$

A.2.3. Un objeto no queda rezagado porque gira con la Tierra a la misma velocidad. La atmósfera no se pierde porque es atraída por la Tierra y gira con ella en Torno al Sol. Las estrellas se mantienen aparentemente fijas por su lejanía.

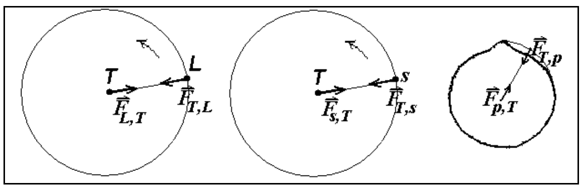
A.3.1. La Tierra se mueve más lentamente mientras describe la media órbita del equinoccio de primavera al equinoccio de otoño, luego la Tierra está más lejos del Sol durante ese trayecto. Más concretamente, en el solsticio de verano la Tierra está más alejada del Sol, luego la idea de que es verano o invierno por la cercanía o lejanía del Sol a la Tierra es totalmente falsa. Las estaciones se justifican por la inclinación del eje de rotación terrestre respecto al plano de la eclíptica, que hace los rayos solares penetren en la atmósfera terrestre más o menos inclinados.

A.3.2. Resultados obtenidos para k_S (en $x\cdot10^{-19}$ s^2 m^{-3}): teórico (aplicando la ley de la gravitación universal de Newton: $k_S=4\pi^2/(Gm_S)$) y para Marte (2,97); para Mercurio, Venus y Plutón (2,98, y para Tierra, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno (2,95).

A.3.3. Aplicando la tercera ley de Kepler: $\frac{T_T^2}{r_{S-T}^3}=\frac{T_U^2}{r_{S-U}^3}$; $r_{S-U}=\sqrt[3]{\frac{T_U^2}{T_T^2}}\cdot r_{S-T}=2{,}88\cdot10^{12}\,m=19{,}18UA$

A.3.4. Aplicando la tercera ley de Kepler: $\frac{T_L^2}{r_{T-L}^3}=\frac{T_s^2}{r_{T-s}^3}$; $r_{T-s}=\sqrt[3]{\frac{T_s^2}{T_L^2}}\cdot r_{T-L}$. Aplicación: $r_{T-s}=\sqrt[3]{\frac{T_s^2}{T_L^2}}\cdot r_{T-L}=4{,}24\cdot10^7\,m$

A.4.1. Los tamaños de los cuerpos, las distancias y las magnitudes de las fuerzas no están dibujadas en proporción. La Luna o el satélite llevan la velocidad transversal (perpendicular a la línea de acción de las fuerzas) apropiada para poder mantenerse en órbita.



A.4.2. $F_{T,p}=F_{p,T}=G\frac{M_T m_p}{R_T^2}$, aunque $\vec{F}_{T,p}=-\vec{F}_{p,T}$, resulta: a) $F_{T,p}$ = 0,981 N; b) $F_{p,T}$ = 0,981 N ; c) $a_p=G\frac{M_T}{R_T^2}$ = 9,81 m/s^2; d) $a_T=G\frac{m_p}{R_T^2}$ = 1,64·10^{-25} m/s^2; la piedra se mueve hacia Tierra, y no al contrario, porque la aceleración de la piedra es unas 6·10^{25} veces mayor. e) $F_{T,p}$ = 98,1 N; $a_p=G\frac{M_T}{R_T^2}$ = 9,81 m/s^2; la misma que antes, pues no depende de la masa del cuerpo sino de la masa del planeta que provoca la atracción.

A.4.3. Porque la magnitud de la fuerza gravitatoria entre los bloques (6,67·10^{-5} N) es compensada fácilmente por las fuerzas de rozamiento entre los bloques y el suelo (la fuerza de rozamiento puede llegar a tener un valor máximo de 981,3 N).

A.4.4. $m_p=\frac{P_T}{g_T}=63kg$; a) $P_S=F_{S,p}=G\frac{M_S m_p}{R_S^2}=17.262{,}4N$; b) $P_L=F_{L,p}=G\frac{M_L m_p}{R_L^2}=102{,}0N$; c) $P_P=F_{P,p}=G\frac{M_P m_p}{R_P^2}=\frac{2}{9}P_T=137{,}3N$

A.4.5. Dado que: $F = G\dfrac{Mm}{r^2}$, obtenemos: $F_{S,T}$ = 3,52·10^{22} N; $F_{T,L}$ = 1,98·10^{20} N; $F_{S,T}$ = 177,4·$F_{T,L}$. a) $F_T = F_{S,T} - F_{L,T}$ = 3,50·10^{22} N; $\vec{F}_T = \vec{F}_{S,T} + \vec{F}_{L,T}$ = -3,50·10^{22} $\vec{i}$ N; b) $F_T = F_{L,T} + F_{S,T}$ = 3,54·10^{22} N; $\vec{F}_T = \vec{F}_{S,T} + \vec{F}_{L,T}$ = - 3,54·10^{22} $\vec{i}$ N; c) $F_T = \sqrt{F_{S,T}^2 + F_{L,T}^2}$ = 3,52·10^{22} N, formando un ángulo de 89,7º con la línea de unión Luna-Tierra; $\vec{F}_T = \vec{F}_{S,T} + \vec{F}_{L,T}$ = 3,52·10^{22} $\vec{j}$ + 1,98·10^{20} $\vec{i}$ N.

A.4.6. La Tierra en su totalidad (cada una de las partículas que la constituyen) es atraída por el Sol y por la Luna. Pero no todas las partículas son atraídas con la misma intensidad: las más cercanas son atraídas con más fuerza que las más lejanas. Esto provoca un abombamiento de la Tierra en la zona ecuatorial (un achatamiento por la zonas polares) que se pone de manifiesto en las partes fluidas del planeta, por ejemplo, en las mareas oceánicas (ver explicación detallada de las mareas oceánicas en el apéndice 2 de la unidad).

A.4.7. Dado que $\vec{F}_g = \vec{F}_c$, se llega a: $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{G.M_S} r^3$, 3ª ley de Kepler si hacemos $k_S = \dfrac{4\pi^2}{G \cdot M_S}$. Sí es posible; se deduce que: $M_S = \dfrac{4\pi^2}{G \cdot T_T^2} r_{S-T}^3 = 2 \cdot 10^{30}\ kg$; $M_T = \dfrac{4\pi^2}{G \cdot T_L^2} r_{T-L}^3 = 6 \cdot 10^{24}\ kg$. Para determinar la masa de astros sin satélites naturales a su alrededor, ponemos en órbita en torno a ellos satélites artificiales.

A.4.8. $r_{S,c}$ = 17,9 UA.

A.4.9. h = 279,3 km; v = 7,7 km/s.

A.4.10. a) $T_{satélite}$=56,6 días; b) h=6,16·10^8 m.

A.4.11. T = 8 h. $r_{T,s}$ = 20.300,6 km.

A.4.12. M_S = 5,69·10^{26} kg; ρ= 628,5 kg/m^3; la menor de todos los cuerpos del sistema solar.

A.4.13. T'= 3,63 días.

A.4.14. g_{oM} =3,9 m/s^2.

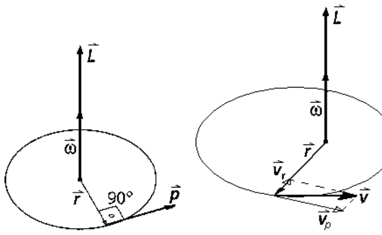
A.4.15. v= 7,7 kms^{-1}; a_c= 8,69 ms^{-2};T= 1,54 h; rpd=15,6 vueltas/día.

A.4.16. La existencia de los planetas puede predecirse a partir de su interacción gravitatoria con otros cuerpos celestes conocidos.

A.5.1. a) $\vec{M} = -2\vec{k}$ N·m; $\vec{L} = 40\vec{k}$ kg·m^2/s; a) $\vec{M} = (-3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k})$ N·m; $\vec{L} = (20\vec{i} + 20\vec{k})$ kg·m^2/s. Conclusión: las magnitudes momento definidas dependen, para una partícula dada, del origen de referencia que se escoja.

A.5.2. $\vec{L} = 12\vec{k}$ kg·m^2/s. $\vec{L}$ es constante para un cuerpo que se mueve con MRU e independiente del punto donde se encuentre el cuerpo en su recta directriz.

A.5.3. En el MCU: $\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$. En módulo: L=r·m·v·$sen\ 90º$ = r·m·v = r^2·m·ω (dado que $\vec{r}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares). Como los vectores $\vec{L}$ y $\vec{\omega}$ coinciden en dirección y sentido, se puede escribir: $\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = I\vec{\omega}$, donde I= r^2·m suele llamarse momento de inercia. Aunque $\vec{r}$ y $\vec{v}$ varían en dirección, son constantes en módulo; además, $\vec{\omega} = cte.$ (en módulo, dirección y sentido); luego $\vec{L} = cte.$



En el movimiento elíptico periódico, entre $\vec{r}$ y $\vec{v}$ existen ángulos cualesquiera. Podemos considerar $\vec{v} = \vec{v}_p + \vec{v}_r$, siendo $\vec{v}_p$ la componente de $\vec{v}$ en la dirección perpendicular al vector de posición $\vec{r}$ y $\vec{v}_r$ la componente en la dirección de dicho vector $\vec{r}$. En este caso: $\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = \vec{r} \wedge m \cdot \vec{v}_p + \vec{r} \wedge m \cdot \vec{v}_r = \vec{r} \wedge m \cdot \vec{v}_p$, ya que $\vec{r} \wedge m \cdot \vec{v}_r = 0$. En módulo: L=r·m·v$_p$·$sen\ 90º$ = r·m·v$_p$ = r^2·m·ω = I·ω, siendo el vector $\vec{\omega} = cte.$; luego $\vec{L} = cte.$ Por tanto, se obtiene una expresión similar al caso del MCU, $\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = I\vec{\omega}$ =cte., aunque aquí $\vec{r}$ y $\vec{v}_p$ varían en dirección y en módulo (cuando aumenta el módulo de uno, el módulo del otro disminuye en la proporción requerida para que el valor de $\vec{L}$ no se altere.

A.5.4. Todos los casos planteados se explican porque $\vec{L} = cte.$, al no actuar sobre los cuerpos ningún $\vec{M}$ externo; debe cumplirse: $\vec{L}_{antes} = \vec{L}_{después}$. A) y B) Los patinadores o los saltadores de trampolín, al disminuir la distancia de las partículas de su cuerpo al eje de giro aumentan su velocidad de giro. C) Los gatos, al iniciar la caída, giran la cola con rapidez en una dirección, con lo que el resto del cuerpo, para conservar $\vec{L}$, debe girar en sentido contrario.

A.5.5. Basándonos en $\vec{L} = cte.$ se llega a: v$_a$/v$_p$ = r$_p$/r$_a$, lo que avala los resultados de Kepler. Aplicación: 31,02 km/s.

A.5.6. a) Como $v_{a\_p} = \dfrac{\partial A}{\partial t} = \dfrac{L}{2m} = \dfrac{r_p \cdot v_p}{2} = 3{,}6 \cdot 10^{10}\ m^2/s$. b) Como $v_{a\_p} = v_{a\_a} \Rightarrow$ r$_a$·v$_a$= r$_p$·v$_p$ $\Rightarrow$ v$_a$= 26.972 km/h.

A.5.7. $\vec{L}$ cte. $\Rightarrow$ L=r·m·v·$sen\ 90º$ = r·m·v = r^2·m·ω =cte. $\Rightarrow$ Si aumenta r (al distribuirse las aguas por todo el globo), debe disminuir ω=$2\pi/T$, o sea, debe aumentar ligeramente la duración de los días.

A.5.8. No necesitan formas aerodinámicas al no existir rozamientos en las capas altas de la atmósfera. De ser la fricción con el aire apreciable, la órbita del satélite sería la de una espiral que se arrolla alrededor de la Tierra, cayendo sobre ella paulatinamente; $\vec{L}$ disminuye pues, conforme se acerca a la Tierra, aunque la velocidad de giro aumenta, no lo hace en la proporción suficiente (por la fricción).

A. Final. Trabajo personal.