1.- Demuestra que la velocidad orbital de un satélite depende únicamente de la distancia a la que queramos hacerlo orbitar y no de su masa.

(1 punto)

2.- Si la masa de un cuerpo es de 10 000 kg ¿cuánto pesará a 2000 m de altura sobre el nivel del mar. Datos g_0= 9,80 m s^{-2} ; R_T= 6370 km.

(1 punto)

3.- Explica qué se entiende por velocidad de escape y deduce razonadamente su expresión.

(1 punto)

4.- Una carga eléctrica positiva se mueve en un campo eléctrico uniforme. Razone cómo varía su energía potencial electrostática si la carga se mueve:

a) En la misma dirección del campo eléctrico (considera los dos sentidos)

b) En dirección perpendicular al campo eléctrico. ¿Y si la carga describe una circunferencia y vuelve al punto de partida?

(1 punto)

5.- La misión Cassini a Saturno-Titán comenzó en 1997 con el lanzamiento de la nave desde Cabo Cañaveral y culminó el pasado 14 de enero de 2005, al posarse con éxito la cápsula Huygens sobre la superficie de Titán, el mayor satélite de Saturno, más grande que nuestra Luna e incluso más que el planeta Mercurio.

a) Admitiendo que Titán se mueve alrededor de Saturno describiendo una órbita circular de $1{,}2 \cdot 10^9$ m de radio, calcule su velocidad y periodo orbital.

b) ¿Cuál es la relación entre el peso de un objeto en la superficie de Titán y en la superficie de la Tierra?

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; $M_{Saturno} = 5{,}7 \cdot 10^{26}$ kg ; $M_{Titán} = 1{,}3 \cdot 10^{23}$ kg ;

$R_{Titán} = 2{,}6 \cdot 10^6$ m ; g = 10 m s^{-2}

(2 puntos)

6.- Tenemos una esfera de 50,0 cm de radio cargada negativamente, siendo su potencial de -7000 V. Sabiendo que la carga de un electrón es $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C, calcula:

a) La carga y el número de electrones que tiene la esfera cargada.

b) Describe lo que ocurrirá a una segunda esfera metálica cuando la acerquemos a la primera.

c) Suponiendo que esa segunda esfera tiene un radio de 10,0 cm y la ponemos en contacto, mediante un cable, qué carga y potencial tendrá cada una de las esferas cuando se alcance equilibrio electrostático.

Dato: $K=9 \cdot 10^9 Nm^2/C^2$.

(2 puntos)

7.- Dos cargas de 2 nC y -4nC respectivamente, están situadas a una distancia de 2 mm. Imagina un punto P situado de tal modo que formase un triángulo equilátero con las cargas indicadas. Calcula:

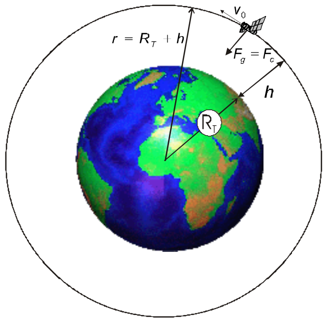
a) El valor del campo ejercido por las cargas en P y en el infinito.

b) El trabajo necesario para transportar una carga de 5 nC desde P al infinito.

Dato: $K = 9 \cdot 10^9$ N·m^2·Kg^{-2}

(2 puntos)

1.- Demuestra que la velocidad orbital de un satélite depende únicamente de la distancia a la que queramos hacerlo orbitar y no de su masa.



Al moverse en órbita, la fuerza responsable del giro (centrípeta), como es evidente, *es la fuerza gravitatoria*. Por ello podemos decir que:

$$F_g = F_c \quad \Rightarrow \quad \text{Por tanto: } m\frac{v_o^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2}$$

de aquí, despejando la velocidad orbital (v_0), tenemos:

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r}}}$$

La expresión obtenida demuestra que la velocidad únicamente dependerá de la altura a la que queramos situar al satélite y de la masa del astro alrededor del cuál girará el satélite pero no de su masa, puesto que no aparece.

2.- Si la masa de un cuerpo es de 10 000 kg ¿cuánto pesará a 2000 m de altura sobre el nivel del mar. Datos g_0= 9,80 m s^{-2} ; R_T= 6370 km.

$$\left.\begin{array}{l} m = 10000kg \\ h = 2000m \\ g_0 = 9{,}8\frac{m}{s^2} \\ R_T = 6370km \end{array}\right\}$$

A partir de la expresión de la gravedad en la superficie, obtenemos una relación que nos será útil:

como: $g_0 = G\dfrac{M_T}{R_T^2} \quad \Rightarrow \quad g_0 R_T^2 = G{\cdot}M_T$

Pues bien, el peso de un cuerpo es el producto de su masa por la intensidad del campo:

$$F_p = m{\cdot}g = m{\cdot}G\frac{M_T}{(R_T+h)^2} = m{\cdot}\frac{g_0{\cdot}R_T^2}{(R_T+h)^2} = \underbrace{m{\cdot}g_0}_{\substack{peso\\ en\ la\\ superficie}}{\cdot}\frac{R_T^2}{(R_T+h)^2}$$

Sustituyendo los valores que tenemos: $F_p = 10000kg{\cdot}9{,}80\frac{m}{s^2}{\cdot}\dfrac{(6{,}37{\cdot}10^6\,\cancel{m})^2}{(6{,}372{\cdot}10^6\,\cancel{m})^2} = \underline{97900N}$

Hemos redondeado a tres cifras,
dado que los datos disponen de tres cifras significativas

Obsérvese la pequeña diferencia respecto al peso que tendría el cuerpo en la superficie del planeta ($m{\cdot}g_0$=98 000 N). Eso pone de manifiesto que a pequeñas altitudes podemos suponer, sin cometer errores importantes, que el campo gravitatorio terrestre es uniforme.

3.- Explica qué se entiende por velocidad de escape y deduce razonadamente su expresión.

Denominamos velocidad de escape a la velocidad mínima que ha de tener un cuerpo para escapar de la acción de un campo gravitatorio al que se encuentra ligado.

Puesto que el origen de energías potenciales se toma en el infinito ($E_p(\infty)=0$), se deduce que si un móvil tiene energía CERO tiene la misma energía que tendría si estuviese en el infinito detenido. Por consiguiente podrá escapar y 'llegar al infinito'. Si su energía es E>0, incluso 'llegará al infinito' con cierta velocidad.

En consecuencia, un objeto situado sobre la superficie de un planeta de radio R, podrá escapar de la atracción gravitatoria si:

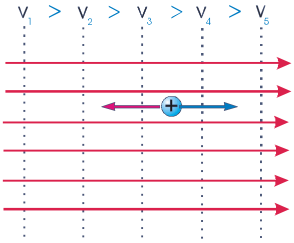
$\dfrac{1}{2}mv_e^2 + (-G\dfrac{M{\cdot}m}{R}) = 0$; donde R es el radio del planeta.

Despejando v_e y operando, tenemos: $v_e = \sqrt{\dfrac{2GM}{R}} = \boxed{\sqrt{2g_0R}}$

4.- Una carga eléctrica positiva se mueve en un campo eléctrico uniforme. Razone cómo varía su energía potencial electrostática si la carga se mueve:

a) En la misma dirección del campo eléctrico (considera los dos sentidos)

b) En dirección perpendicular al campo eléctrico. ¿Y si la carga describe una circunferencia y vuelve al punto de partida?



a) Para responder a estas cuestiones hemos de tener presente que existe una relación entre campo eléctrico y potencial (energía potencial) eléctrico. La expresión:

$$\vec{E} = -\frac{dV}{d\vec{r}}$$

Esto significa que las líneas de campo se dirigen perpendicularmente a las superficies equipotenciales y en sentido de potencial decrecientes.

Por consiguiente, si la carga se mueve a favor del campo (hacia la derecha en el dibujo), estará moviéndose hacia potenciales decrecientes, con lo que su energía potencial disminuirá. El proceso será espontáneo, ya que el campo estará realizando un trabajo que puede producir, por ejemplo, un aumento en la velocidad de la partícula.

Si la carga se mueve en contra de las líneas de campo su energía potencial aumentará. Este será un proceso no espontáneo, es decir deberá actuar una fuerza externa que aporte energía a la carga.

b) Si la carga se mueve perpendicularmente al campo, estará moviéndose sobre una mismo superficie equipotencial, con lo que su energía potencial se mantendrá constante, no cambiará.

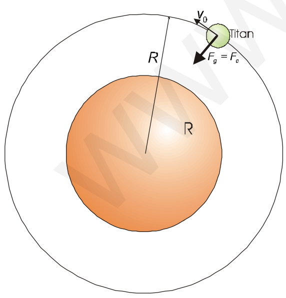
Si gira en círculos, estará realizando un circuito cerrado, sea cual sea la orientación del círculo. Al ser el campo eléctrico conservativo, podemos afirmar que la energía no depende del camino sino únicamente de los puntos inicial y final. Tampoco estará variando su energía.

5.- La misión Cassini a Saturno-Titán comenzó en 1997 con el lanzamiento de la nave desde Cabo Cañaveral y culminó el pasado 14 de enero de 2005, al posarse con éxito la cápsula Huygens sobre la superficie de Titán, el mayor satélite de Saturno, más grande que nuestra Luna e incluso más que el planeta Mercurio.

a) Admitiendo que Titán se mueve alrededor de Saturno describiendo una órbita circular de $1{,}2\cdot10^{9}$ m de radio, calcule su velocidad y periodo orbital.

b) ¿Cuál es la relación entre el peso de un objeto en la superficie de Titán y en la superficie de la Tierra?

Datos: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; $M_{Saturno} = 5{,}7\cdot10^{26}$ kg ; $M_{Titán} = 1{,}3\cdot10^{23}$ kg ; $R_{Titán} = 2{,}6\cdot10^{6}$ m ; $g = 10$ m s^{-2}



Partiendo de la idea de que la fuerza responsable del giro (centrípeta) es la fuerza gravitatoria, llegamos a la expresión de velocidad orbital:

$$F_g = F_c \quad \Rightarrow \quad \text{Por tanto: } m_{Titán}\frac{v_0^2}{R} = G\frac{M_{Sat}m_{Titán}}{R^2}$$

A partir de aquí, despejando v_0 e introduciendo los valores, tenemos:

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_{Sat}}{R}} = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot5{,}7\cdot10^{26}\,kg}{1{,}2\cdot10^{9}\,m}} = 5630\,\frac{m}{s} \simeq \underline{5{,}6\,\frac{km}{s}}$$

Para calcular el período sólo hemos de calcular el tiempo que tarda en recorrer una órbita completa:

$$T = \frac{2\pi R}{v_0} = \frac{2\cdot\pi\cdot1{,}2\cdot10^{9}\,m}{5630\,\frac{m}{s}} = 1{,}34\cdot10^{6}\,s \simeq \underline{370\,h}$$

Ambos resultados han sido redondeados a dos cifras significativas, limitación que nos imponen los datos de partida.

b) El peso de un cuerpo en un astro es proporcional a la gravedad que el mismo ejerce sobre los cuerpos. Por tanto, la relación de pesos es la misma que la relación entre los campos gravitatorios.

Partiendo de las expresiones de campo gravitatorio en la superficie de cada astro, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} g_{Titan} = G\cdot\dfrac{M_{Titán}}{R^2_{Titán}} \\ g_{Tierra} = G\cdot\dfrac{M_T}{R_T^2} = 10\,{}^{m}/_{s^2} \end{array}\right\} \text{dividiendo miembro a miembro ambas expresiones tenemos:} \quad \frac{g_T}{g_{Titán}} = \frac{g_T}{G\cdot\dfrac{M_{Titán}}{R^2_{Titán}}} = \frac{10\,{}^{m}/_{s^2}\cdot(2{,}6\cdot10^6\,m)^2}{6{,}67\cdot10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot1{,}3\cdot10^{23}\,kg} \simeq \boxed{7{,}8}$$

Así pues, un cuerpo pesará casi ocho veces más en la superficie terrestre que en la superficie de Titán.

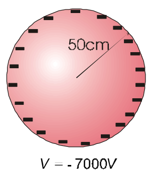
6.- Tenemos una esfera de 50 cm de radio cargada negativamente, siendo su potencial de -7000 V. Sabiendo que la carga de un electrón es 1,602 · 10^{-19} C, calcula:

a) La carga y el número de electrones que tiene la esfera cargada.

b) Describe lo que ocurrirá a una segunda esfera metálica cuando la acerquemos a la primera.

c) Suponiendo que esa segunda esfera tiene un radio de 10 cm y la ponemos en contacto, mediante un cable, qué carga y potencial tendrá cada una de las esferas cuando se alcance equilibrio electrostático.

Dato: K=9·10^9Nm^2/C^2.



a) Dado que una esfera metálica cargada se comporta como si toda la carga estuviese en el centro de la misma, a partir de la expresión del potencial creado por una carga puntual podemos obtener la carga que posee:

$$como: \quad V = K\frac{Q}{r} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{V\cdot r}{K} = \frac{-7000\,\overset{\frac{Nm}{\cancel{C}}}{V}\cdot0{,}5\,\cancel{m}}{9\cdot10^9\,\frac{\cancel{Nm}\,^{\cancel{2}}}{C^{\cancel{2}}}} = \boxed{3{,}89\cdot10^{-7}\,C}$$

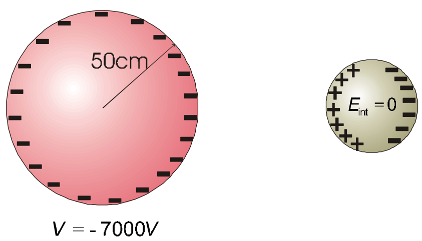
Y conocida la carga del electrón, podemos calcular cuántos electrones son:

$$electrones = \frac{3{,}89\cdot10^{-7}\,\cancel{C}}{1{,}602\cdot10^{-19}\,\frac{\cancel{C}}{electrón}} = \boxed{2{,}43\cdot10^{12}\,electrones}$$

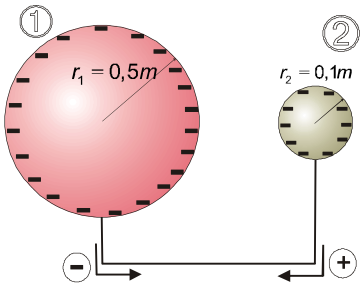
La esfera contiene un exceso de casi dos billones y medio de electrones.

b) Si colocamos una segunda esfera metálica próxima a la primera, se producirá un movimiento de cargas (al tratarse de un conductor existe movilidad absoluta) en la segunda esfera, de tal modo que se concentrarán las cargas positivas en el extremo próximo a la esfera cargada negativamente y las negativas en la cara contraria.

Todo esto tiene como resultado que en el interior de la esfera se produzca un campo eléctrico resultante nulo. El campo inducido por el movimiento de cargas se opone al campo externo, como se observa en el dibujo.



El resultado también puede razonarse pensando que las cargas negativas de la 2ª esfera (neutra) serán repelidas hacia la cara exterior mientras que la cara próxima a la esfera cargada negativamente quedará con déficit de electrones, es decir con carga positiva.



Al conectar las esferas fluirán cargas negativas desde la esfera cargada a la esfera neutra. La situación de equilibrio se producirá cuando los potenciales de ambas esferas se igualen. En ese momento los potenciales serán: $V_1' = V_2'$. Las dos esferas, al final, tendrán carga negativa y potenciales negativos.

Si llamamos q_1 a la carga que tenía, inicialmente la esfera cargada y q_1' y q_2' a las cargas que tendrán las esferas cuando se alcance el equilibrio electrostático, tenemos:

1º) Como debe conservarse la carga, debe cumplirse que: $q_1' + q_2' = q_1$

2º) Al final los potenciales se igualarán, esto es: $K \cdot \frac{q_1'}{r_1} = K \cdot \frac{q_2'}{r_2}$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos la carga que queda finalmente sobre cada esfera:

$$\left.\begin{array}{l} \cancel{K} \cdot \frac{q_1'}{r_1} = \cancel{K} \cdot \frac{q_2'}{r_2} \quad \Rightarrow q_1' = q_2' \cdot \frac{r_1}{r_2} \\ q_1' + q_2' = q_1 \quad \Rightarrow \quad q_2' = q_1 - q_1' \end{array}\right\}$$

Sustituyendo el valor despejado de q_2' *en la primera expresión:*

$$q_1' = (q_1 - q_1') \cdot \frac{r_1}{r_2}$$

Sustituyendo los valores conocidos: $q_1' = (3{,}89 \cdot 10^{-7} C - q_1') \cdot \frac{0{,}5 \cancel{m}}{0{,}1 \cancel{m}}$

$$q_1' = (-3{,}89 \cdot 10^{-7} C - q_1') \cdot 5 \Rightarrow \quad q_1' = -1{,}945 \cdot 10^{-6} C - 5 q_1' \Rightarrow 6\ q_1' = -1{,}945 \cdot 10^{-6} C$$

Finalmente: $q_1' = \underline{-3{,}24 \cdot 10^{-7} C|}$ *y, por consiguiente:*

$$q_2' = q_1 - q_1' = -3{,}89 \cdot 10^{-7} C - (3{,}24 \cdot 10^{-7} C) = \underline{6{,}5 \cdot 10^{-8} C|}$$

Con lo que cada esfera queda con una carga diferente, como era de esperar. La esfera pequeña puede soportar menor carga que la grande en el equilibrio. Eso es lógico ya la esfera mayor cuenta con mayor superficie para albergar la carga con mayor 'comodidad'.

El potencial de ambas esferas, en el equilibrio final, será el mismo y vale:

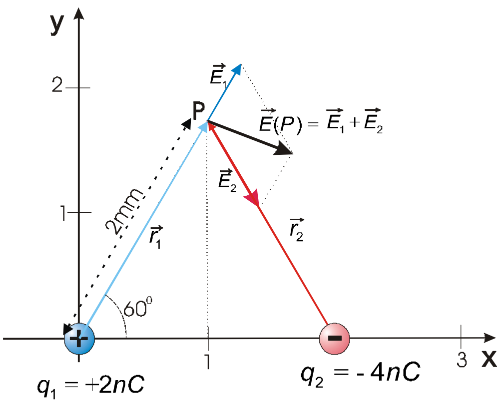
$$V_1' = V_2' = K \frac{q_1'}{r_1} = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^{\cancel{2}}}{C^{\cancel{2}}} \cdot \frac{(-3{,}24 \cdot 10^{-7} \cancel{C})}{0{,}5 \cancel{m}} \simeq \underline{5830V|}$$

7.- Dos cargas de 2 nC y -4nC respectivamente, están situadas a una distancia de 2 mm. Imagina un punto P situado de tal modo que formase un triángulo equilátero con las cargas indicadas. Calcula:

a) El valor del campo ejercido por las cargas en P y en el infinito.

b) El trabajo necesario para transportar una carga de 5 nC desde P al infinito.

Dato: K = $9\cdot10^9$ N·m²·Kg⁻²



a) Primero hacemos un esquemita en el que dibujamos los campos y la resultante en el punto P solicitado.

Ahora localizamos el punto P. Según el enunciado:

$$\begin{cases} x_p = 1mm = 10^{-3}\,m \\ y_p = r_1\,sen60º = 2\cdot10^{-3}\,m\dfrac{\sqrt{3}}{2} \simeq 1{,}73\cdot10^{-3}\,m \end{cases}$$

Una vez localizado el punto problema, podemos escribir los campos creados por ambas cargas. El campo total será la suma vectorial de ambos:

$$\begin{cases} \vec{E}_1(P) = 9\cdot10^9\,\frac{N\,\cancel{m^2}}{C\cancel{^2}}\cdot\dfrac{2\cdot10^{-9}\,\cancel{C}}{(2\cdot10^{-3}\,\cancel{m})^3}\cdot\overbrace{(10^{-3}\,\vec{i}+1{,}73\cdot10^{-3}\,\vec{j})}^{\vec{r}_1}\,\cancel{m} = 2{,}25\cdot10^{-6}\,\vec{i}+3{,}89\cdot10^{6}\,\vec{j}\,\left(\dfrac{N}{C}\right) \\ \vec{E}_2(P) = 9\cdot10^9\,\frac{N\,\cancel{m^2}}{C\cancel{^2}}\cdot\dfrac{-4\cdot10^{-9}\,\cancel{C}}{(2\cdot10^{-3}\,\cancel{m})^3}\cdot\underbrace{(-10^{-3}\,\vec{i}+1{,}73\cdot10^{-3}\,\vec{j})}_{\vec{r}_2}\,\cancel{m} = 5{,}50\cdot10^{-6}\,\vec{i}-7{,}78\cdot10^{6}\,\vec{j}\,\left(\dfrac{N}{C}\right) \end{cases}$$

El campo total en P, será:

$$\vec{E}(P)=\vec{E}_1(P)+\vec{E}_2(P)=(2{,}25\cdot10^{-6}+5{,}50\cdot10^{-6})\vec{i}+(3{,}89\cdot10^{6}-7{,}78\cdot10^{6})\vec{j}=$$

$$=\underline{7{,}75\cdot10^{6}\,\vec{i}-3{,}89\cdot10^{6}\,\vec{j}\,\left(\dfrac{N}{C}\right)}$$

El módulo es:

$$\left|\vec{E}(P)\right|=\sqrt{\left(7{,}75\cdot10^{6}\right)^2-\left(3{,}89\cdot10^{6}\right)^2}=\underline{8{,}67\cdot10^{6}\left(\dfrac{N}{C}\right)}$$

Nota: Por supuesto, el vector campo obtenido dependerá del sistema de ejes que elijamos, aunque cualquier sistema puede ser bueno. Eso si, el valor del módulo siempre sería el mismo.

Por otro lado, el valor del campo en el infinito será, obviamente, CERO. El campo eléctrico es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, y para distancias muy grandes desaparece.

b) El potencial en el punto P valdrá la suma, escalar, de los potenciales creados por cada carga. Por tanto:

$$V(P)=V_1+V_2=K\left(\frac{q_1}{r_1}+\frac{q_2}{r_2}\right)=\underbrace{K\frac{q_1+q_2}{r_1}}_{dado\ que\ r_1=r_2}=9\cdot10^9\,\frac{Nm\cancel{^2}}{C\cancel{^2}}\cdot\frac{-2\cdot10^{-9}\,\cancel{C}}{2\cdot10^{-3}\,\cancel{m}}=\underline{-9000\ V}$$

Teniendo en cuenta que para mover la carga, sin acelerarla, hemos de ejercer una fuerza igual y opuesta a la fuerza eléctrica, el trabajo en el desplazamiento solicitado será la variación de energía potencial experimentada por la carga. Considerando que V(∞)=0, tenemos:

$$W_{P\to\infty}=q\cdot\Delta V=5\cdot10^{-9}\,C\cdot(0+9000\,\tfrac{J}{C})=\underline{4{,}5\cdot10^{-5}\,J}$$

Con lo que el proceso no será espontáneo, ya que hemos de realizar un trabajo para que se produzca el desplazamiento indicado.