

# INTRODUCCIÓN AL MOVIMIENTO. CINEMATICA

## TEMA 6

1º Bachillerato.  
Física.



Física



## ESQUEMA DE LA UNIDAD.

Física

1. **CARACTERÍSTICAS DEL MOVIMIENTO.**
  - 1.1 SISTEMAS DE REFERENCIA.
  - 1.2 TRAYECTORIA.
  - 1.3 MAGNITUDES ESCALARES Y VECTORIALES.
  - 1.4 POSICIÓN, DESPLAZAMIENTO Y DISTANCIA RECORRIDA SOBRE LA TRAYECTORIA.
2. **LA VELOCIDAD.**
  - 2.1 RAPIDEZ DE UN MOVIMIENTO: VELOCIDAD MEDIA, VELOCIDAD INSTANTÁNEA.
  - 2.2 DIRECCIÓN Y SENTIDO DE LA VELOCIDAD.
3. **EL MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME (M.R.U)**
4. **LA ACELERACIÓN.**
  - 4.1 CAMBIOS EN EL MÓDULO DE LA VELOCIDAD.
  - 4.2 CAMBIOS EN LA DIRECCIÓN DE LA VELOCIDAD.
5. **EL MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO (M.R.U.A)**
6. **EL MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME (M.C.U)**
  - 6.1 VELOCIDAD LINEAL Y ANGULAR.
  - 6.2 ACELERACIÓN CENTRÍPETA.
7. **COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS.**
  - 7.1 LANZAMIENTO HORIZONTAL.
  - 7.2 LANZAMIENTO OBLICUO.

# 1. CARACTERÍSTICAS DEL MOVIMIENTO.

## 1.1 SISTEMAS DE REFERENCIA.

Física

- Antes de empezar el tema debemos reflexionar sobre algunas cuestiones: ¿Está en reposo la pizarra o el aula donde te encuentras? ¿Lo está la Tierra? ¿Captan nuestros sentidos el reposo y el movimiento? Si la Tierra se moviera, ¿lo captaríamos? Cada día el Sol sale por el Este y se mueve hacia el Oeste, pero, ¿es cierto que el Sol se mueve, o es falso?

- **La cinemática estudia el movimiento sin tener en cuenta sus causas.**



¿Qué hay en el universo que esté en reposo con toda seguridad?

- En el **universo**, todo se encuentra en **continuo movimiento**. Desde los electrones de los átomos, las moléculas, los planetas y las estrellas, hasta las galaxias, ni una sola partícula conocida por nosotros está en reposo.
- Esta realidad no es intuitiva. Cuando estamos sentados en el salón de nuestra casa, ¿estamos en reposo, o nos movemos? Si no reflexionamos sobre ello seguramente responderemos que estamos en reposo, ya que, de un modo espontáneo, tomamos como sistema de referencia "fijo" la casa. Nuestra tendencia natural es considerar que casi todo nuestro entorno está formado por cosas en reposo: las casas, las montañas, la calle, etc., y por unas pocas cosas que a veces se mueven: el aire, nosotros, los coches.
- ¿Cómo saber entonces, objetivamente lo que se mueve y lo que está en reposo? Podremos hacerlo si definimos del siguiente modo:

## 1.1 SISTEMAS DE REFERENCIA (II)

Física

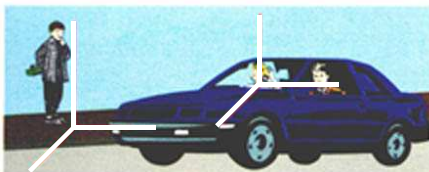
✦ **Movimiento es el cambio de posición de un cuerpo, a lo largo del tiempo, respecto de un sistema de referencia que consideramos fijo.**



El viajero se equivoca al pensar que se mueve el vagón de enfrente.

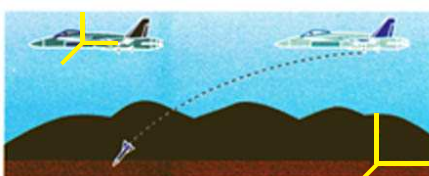
Al mirar al andén, comprueba que es su vagón el que se mueve

- Si dicho punto está en reposo, el movimiento es absoluto



El conductor está en reposo respecto al pasajero que transporta, pero está en movimiento respecto al peatón.

- Si está en movimiento, es relativo



Desde tierra el proyectil cae describiendo una parábola. Desde el avión cae en línea recta

## 1.2 TRAYECTORIA.

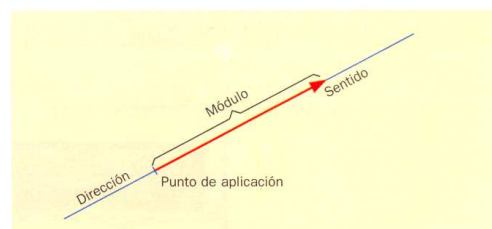
Física

- Se denomina trayectoria a la línea continua que describe un móvil durante su movimiento; está formada por las posiciones sucesivas del móvil a lo largo del tiempo. La estela que deja un avión de reacción en el aire y un barco en el agua, o las huellas de un animal sobre la nieve, permiten visualizar la trayectoria de estos móviles. Pero la trayectoria no tiene existencia real; es una línea imaginaria que ayuda a describir el movimiento.
- **Trayectoria es la línea imaginaria que describe un móvil durante su movimiento.**
- Los movimientos se pueden clasificar según la trayectoria descrita por el móvil:
- **Movimiento rectilíneo:** La trayectoria es una recta. Por ejemplo, la caída libre de una piedra o el movimiento de un tren en un tramo de vía recta.
- **Movimiento curvilíneo:** La trayectoria es una curva. Por ejemplo, el movimiento del extremo de una hélice que gira, el movimiento de la Tierra en torno al Sol o el de un proyectil en el aire.

## 1.3 MAGNITUDES ESCALARES Y VECTORIALES.

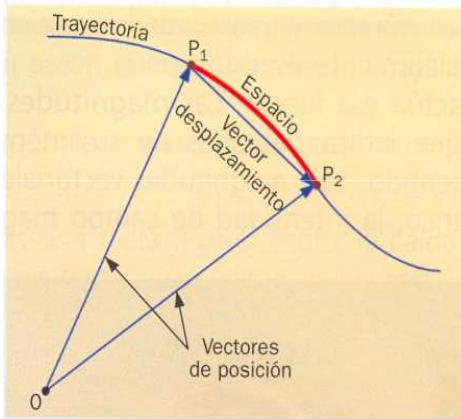
Física

- Las **magnitudes físicas** son aquellas propiedades de los cuerpos o de los fenómenos naturales que son susceptibles de ser medidas.
- Las **magnitudes escalares** son aquellas que quedan perfectamente definidas con un número y una unidad; por ejemplo el tiempo (5 segundos), la temperatura ( $25^{\circ}$ ), la energía (12 julios), etc.
- Las **magnitudes vectoriales**, en cambio, para quedar perfectamente especificadas además del valor numérico han de conocerse también su dirección y su sentido; por ejemplo, una fuerza de 5 N no queda completamente especificada si no se indica en qué dirección y en qué sentido actúa esa fuerza.
- Las magnitudes vectoriales se representan mediante vectores. Un vector es un segmento orientado. Los elementos de un **vector** son:
  1. **Dirección:** Es la recta que contiene al vector.
  2. **Sentido:** Queda especificado por el extremo del vector. En cada dirección hay dos sentidos posibles.
  3. **Punto de aplicación:** Es el origen del vector.
  4. **Módulo:** Es la longitud del vector. Cuando el vector representa una magnitud física, su módulo es proporcional a la intensidad de la magnitud física representada.



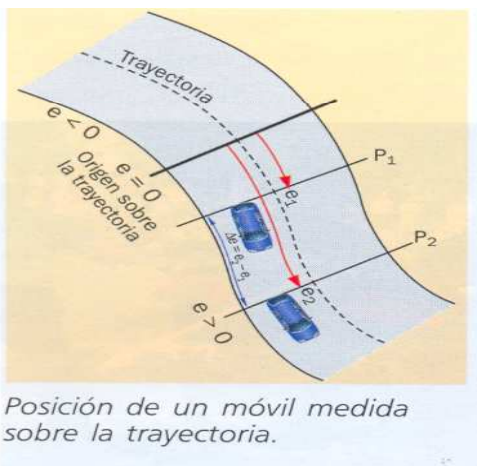
## 1.4 POSICIÓN, DESPLAZAMIENTO Y DISTANCIA RECORRIDA SOBRE LA TRAYECTORIA.

Física



- Cuando queremos estudiar el movimiento de un coche, por ejemplo, un método práctico y sencillo que ya hemos utilizado en cursos anteriores es tomar como sistema de referencia la carretera y, como origen, un punto cualquiera de ella. Entonces, llamaremos **posición al lugar donde el móvil se encuentra respecto al origen**, y de forma escalar la expresaremos por la distancia, medida sobre la carretera, entre ese punto y el origen.

- Cuando hagamos un tratamiento vectorial, utilizaremos el **vector de posición** (origen en el sistema de referencia elegido O y su extremo en la posición P ocupada por el móvil) y los ejes de coordenadas.



- Tanto si la trayectoria es recta como si es curva, o si el móvil, tras recorrer un camino, retrocede y regresa hacia el punto de origen:

La distancia recorrida,  $\Delta s$ , es la longitud de la trayectoria descrita por el móvil. Es una magnitud escalar y su unidad en el S.I es el metro (m).

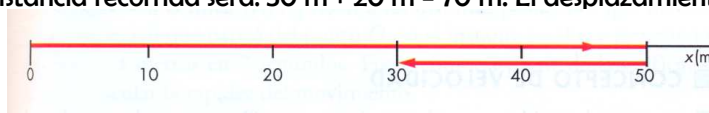
## 1.4 POSICIÓN, DESPLAZAMIENTO Y DISTANCIA RECORRIDA SOBRE LA TRAYECTORIA (II)

Física



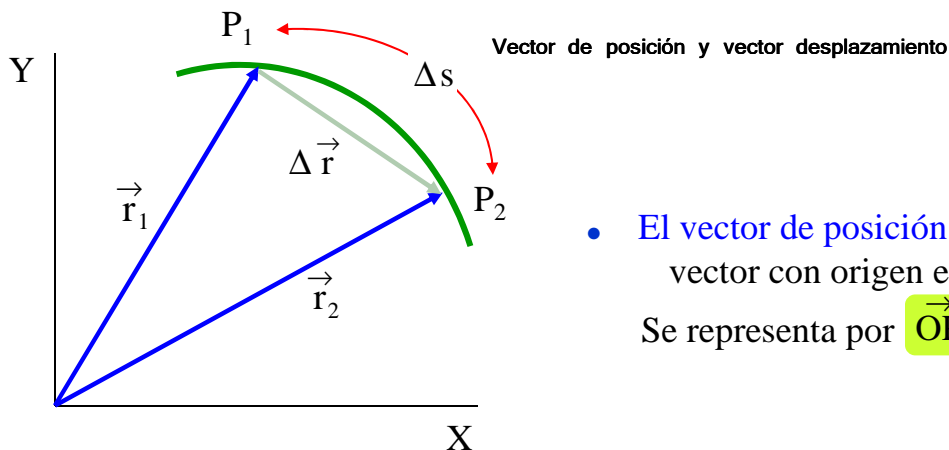
Un fórmula 1 da una vuelta completa al circuito; el módulo del vector desplazamiento es cero; el espacio recorrido ha sido  $2\pi R$ , siendo R el radio del circuito.

- Para estudiar de forma más rigurosa los movimientos, hemos de tener en cuenta la dirección y el sentido en que se producen. Para ello, introducimos el concepto de desplazamiento:
- **El desplazamiento es un vector que une la posición inicial del móvil con la final.**
- Su modulo es:  $\Delta x = x_f - x_o$
- Es importante tener en cuenta que la distancia o espacio recorrido,  $\Delta s$ , no coincide con la longitud del vector desplazamiento,  $\Delta x$ , salvo en el caso de que la trayectoria sea rectilínea y el móvil no retroceda.
- Imagina un corredor que se desplaza 50 m hasta llegar al final de la pista y entonces gira y recorre 20 m más en sentido contrario. La distancia recorrida será: 50 m + 20 m = 70 m. El desplazamiento será: 30 - 0 = 30 m.





## 1.4 POSICIÓN, DESPLAZAMIENTO Y DISTANCIA RECORRIDA SOBRE LA TRAYECTORIA (III)



- El vector de posición  $\vec{r}_1$  de un móvil, es el vector con origen en O y extremo en  $P_1$ . Se representa por  $\vec{OP}_1 = \vec{r}_1$

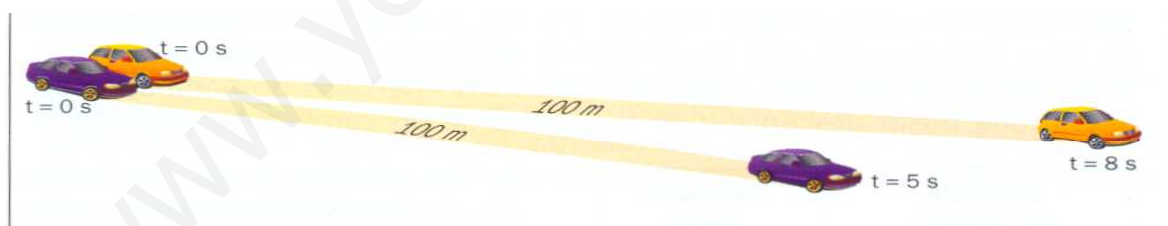
- El vector desplazamiento  $\Delta \vec{r}$  de un móvil entre dos puntos  $P_1$  y  $P_2$  de su trayectoria, es el vector con origen en  $P_1$  y extremo en  $P_2$

Si el movimiento es plano:  $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j}$

En general,  $|\Delta \vec{r}| \neq \Delta s$

## 2 LA VELOCIDAD.

### 2.1 RAPIDEZ DE UN MOVIMIENTO: VELOCIDAD MEDIA, VELOCIDAD INSTANTANEA.

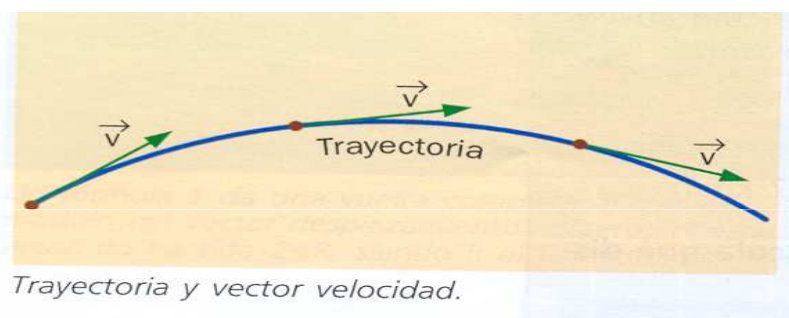


- Los cambios de posición de un móvil pueden ser rápidos o lentos. Por ejemplo, un automóvil que recorre 100 m en 5 s se mueve más rápido que otro que recorre esos 100 m en 8 s.
- Interesa definir una magnitud que mida la rapidez con la que se producen los cambios de posición durante el movimiento.
- La velocidad media de un móvil es el cociente entre la distancia recorrida sobre la trayectoria y el tiempo invertido en recorrerla.**
- Imagina que hacemos un viaje de 50 km y tardamos media hora; la velocidad media del movimiento habrá sido:

$$\text{Velocidad media} = \frac{\text{Distancia total recorrida}}{\text{Tiempo total}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_f - s_0}{t_f - t_0} = \frac{50 \text{ km}}{0,5 \text{ h}} = 100 \text{ km/h}$$

- La unidad de velocidad en el S.I es el metro por segundo (m/s). También se usa mucho en la práctica el kilómetro por hora (km/h).
- Velocidad instantánea es la velocidad media de un móvil durante un intervalo de tiempo muy pequeño.**

## 2.2 DIRECCIÓN Y SENTIDO DE LA VELOCIDAD.



- Para una descripción completa del movimiento no basta conocer el valor numérico de la velocidad instantánea; es preciso determinar en cada momento la dirección y el sentido de la velocidad. El vector velocidad tiene:
  1. **Dirección:** Tangente a la trayectoria en cada instante.
  2. **Sentido:** El del movimiento.
  3. **Punto de aplicación:** Posición del móvil.
  4. **Módulo:** Suele denominarse simplemente velocidad, pero es más correcto denominarlo celeridad o rapidez para distinguirlo de la velocidad como vector.
- **La velocidad es una magnitud vectorial. La dirección del vector velocidad es tangente a la trayectoria y su módulo se denomina rapidez.**

## 2.2 DIRECCIÓN Y SENTIDO DE LA VELOCIDAD (II)

Velocidad media



Ambos vehículos salen y llegan a la vez, pero no han viajado juntos. Tienen en común su velocidad media

- Magnitud velocidad media escalar:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

- Vector velocidad media:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

- $\Delta \vec{r} = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j} \Rightarrow$

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j} = v_{xm} \vec{i} + v_{ym} \vec{j}$$

Velocidad instantánea

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad \text{cuando } \Delta t \rightarrow 0$$

En coordenadas cartesianas:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$$

### 3. EL MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME (M.R.U)

Física



- Los movimientos pueden ser uniformes y no uniformes según que el valor del módulo de la velocidad se mantenga constante o no. Un móvil efectúa un **movimiento rectilíneo uniforme (M.R.U)** si su trayectoria es una recta y el módulo de su **velocidad es constante**.
- En el MRU, el móvil recorre espacios iguales en intervalos de tiempos iguales, por lo que su velocidad media es la misma en cualquier intervalo de tiempo que se considere y coincide con la velocidad instantánea. Si en el intervalo de tiempo  $t$  el móvil ha recorrido un espacio  $\Delta x$  sobre la trayectoria, la velocidad media ha sido:

$$v_m = v = \Delta x / \Delta t \quad \text{Por tanto el espacio recorrido es: } \Delta x = v \cdot \Delta t$$

- **En un movimiento rectilíneo uniforme el espacio recorrido sobre la trayectoria es igual al producto de la velocidad por el tiempo empleado.**

$$x_f = x_o + v \cdot (t - t_o)$$

- **Esta es la Ecuación general del M.R.U**, y nos permite calcular la posición del móvil,  $x_f$ , en cualquier instante,  $t$ , conocidos la posición inicial en el momento en que se comienza a contar el tiempo,  $x_o$ , y la velocidad,  $v$ .

## 4. LA ACELERACION.

### 4.1 CAMBIOS EN EL MÓDULO DE LA VELOCIDAD.



- Los movimientos más frecuentes no son los uniformes, sino los acelerados, en los que varía la velocidad (La caída de un objeto, la rotación de la Tierra alrededor del Sol, el arranque o parada de un vehículo, el despegue de una nave espacial). Para medir estos cambios, necesitamos una nueva magnitud: **la aceleración (indica la rapidez con que varía la velocidad con el tiempo)**.
- Como la velocidad es una magnitud vectorial, la aceleración también debe serlo, y debe dar cuenta de los cambios que se produzcan en la velocidad, tanto en su módulo como en su dirección y sentido. Para ello definiremos a continuación la **aceleración tangencial y la aceleración normal**.
- Una de las causas de que se origine un movimiento acelerado es que varíe el módulo de la velocidad, sin que lo hagan ni su dirección ni su sentido; esto implica un movimiento rectilíneo. La magnitud física que da cuenta de los cambios en el módulo de la velocidad es la aceleración tangencial,  $a_t$ :
- **Aceleración tangencial es la variación que experimenta el módulo de la velocidad en el tiempo.**

Su módulo es :

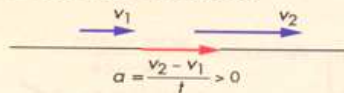
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_o}{t_f - t_o}$$

## 4.1 CAMBIOS EN EL MÓDULO DE LA VELOCIDAD (II)

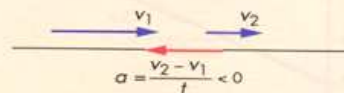
Física

La aceleración es un vector que tiene la misma dirección que la velocidad, aunque su sentido puede ser el mismo o el contrario, según el movimiento sea acelerado o retardado.

Así, en uno acelerado:



Y en uno retardado:



puesto que la variación de la velocidad,  $\Delta v$ , es negativa.

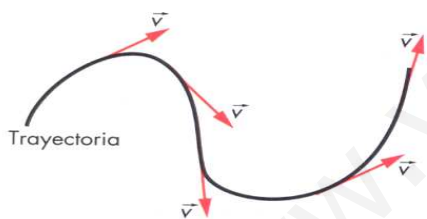


- Observa que la aceleración tangencial no es el cociente entre la velocidad y el tiempo, sino entre lo que varía la velocidad y el tiempo. La **aceleración será tanto mayor cuanto más rápido sea el cambio de la velocidad.**
- Al igual que la velocidad, la aceleración tangencial es un vector tangente a la trayectoria en los movimientos curvilíneos. Si es negativa, el **movimiento es retardado** o decelerado y por tanto la **velocidad disminuye**. En estos apuntes cuando hablemos de aceleración a secas, nos referiremos a la tangencial.
- Por el contrario en el m.r.u la aceleración es cero porque no hay cambio de velocidad.
- Del mismo modo que hicimos con la velocidad, también podemos definir una **aceleración media** y una instantánea. Cuando el incremento del tiempo es infinitamente pequeño, tenemos una **aceleración instantánea**.
- Su unidad en el S.I es el:

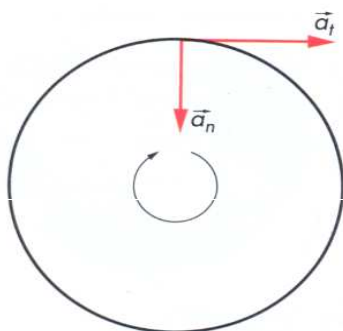
$$a = \Delta v / \Delta t = (m/s) / s = m/s^2$$

## 4.2 CAMBIOS EN LA DIRECCIÓN DE LA VELOCIDAD.

Física



Cuando el movimiento es curvilíneo, la dirección del vector velocidad varía según el móvil avanza por la trayectoria.



Dirección de las aceleraciones tangencial y normal.

Observa que, en un movimiento curvilíneo, pueden existir ambos tipos de aceleración.

- En los movimientos rectilíneos tan solo puede haber aceleración tangencial. Sin embargo, cuando la trayectoria es una curva, puede haber otra, porque el vector velocidad cambia de dirección al seguir la trayectoria del móvil. Recuerda que la velocidad instantánea es siempre tangente a la trayectoria.
- **Definimos la aceleración normal como el cambio que experimenta la dirección de la velocidad en el tiempo.**
- La denominamos normal porque es un vector perpendicular (normal) a la trayectoria, dirigido hacia el centro de curvatura.

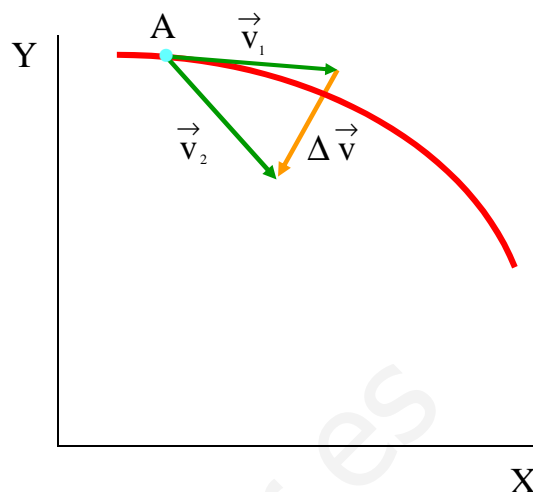
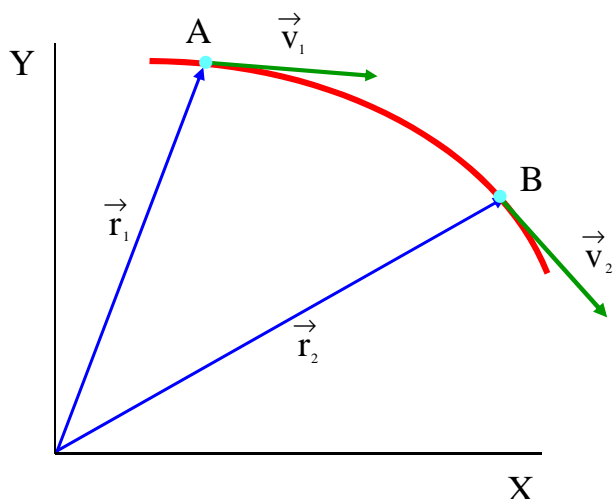
Su módulo es : 
$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

- Donde  $v$  es el módulo de la velocidad y  $r$  es el radio de giro de la trayectoria.



## 4.2 CAMBIOS EN LA DIRECCIÓN DE LA VELOCIDAD.

Física



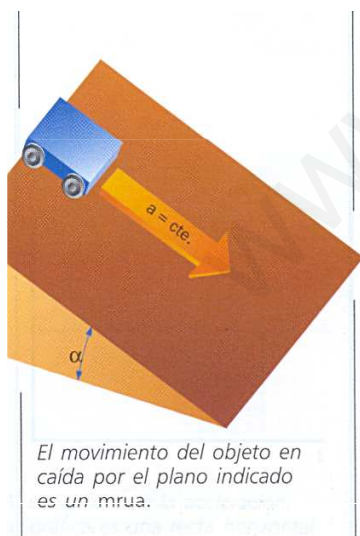
La variación de la velocidad se obtiene gráficamente trasladando el origen de  $\vec{v}_2$  al de  $\vec{v}_1$ , construyendo así  $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$

La aceleración instantánea  $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$  cuando  $\Delta t \rightarrow 0$

La aceleración media  $\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$

## 5. EL MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO (M.R.U.A)

Física



- Se denomina movimiento uniformemente acelerado al que tiene **aceleración constante**, es decir, al que experimenta la misma variación de velocidad en cada unidad de tiempo. Si además la **trayectoria es rectilínea**, el movimiento resultante es un **movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (m.r.u.a)**.
- En un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado la aceleración media es igual que la aceleración instantánea al ser constante. Por tanto de la propia definición de aceleración podemos deducir la **ecuación de la velocidad**:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_0}{t_f - t_0}$$

$$v_f = v_0 + a \cdot (t - t_0)$$

- Esta ecuación nos ofrece el valor de la velocidad del móvil,  $v_f$ , en función del tiempo transcurrido,  $t$ , desde que se inició el movimiento, conocidos la velocidad inicial,  $v_0$ , y la aceleración del movimiento,  $a$ .

## 5. EL MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO (M.R.U.A) (II)

Física

- Vamos a deducir la **ecuación de la posición**, que es aquella que nos ofrece la **posición del móvil en función del tiempo**. En primer lugar de la expresión de la velocidad media despejamos  $x_f$ :

$$v_m = (x_f - x_0) / t \rightarrow x_f = x_0 + v_m \cdot t$$

- Pero no conocemos la velocidad media,  $v_m$ , de modo que tendremos que idear el modo de sustituirla por otros valores. En el m.r.u.a, la velocidad varía uniformemente y, por tanto, podemos calcular también  $v_m$  como la media aritmética de los valores inicial y final. Teniendo además en cuenta que, como hemos visto antes,  $v_f = v_0 + a \cdot t$ , si sustituimos en la expresión de la velocidad media, resulta:

$$v_m = (v_0 + v_f) / 2 \rightarrow v_m = (v_0 + v_0 + a \cdot t) / 2 = v_0 + 1/2 \cdot a \cdot t$$

- Ahora ya podemos sustituir el valor de la  $v_m$  en la ecuación de la posición:

$$x_f = x_0 + v_m \cdot t = x_0 + (v_0 + 1/2 \cdot a \cdot t) \cdot t$$

$$x_f = x_0 + v_0 \cdot t + 1/2 \cdot a \cdot t^2$$

## 5. EL MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO (M.R.U.A) (III)

Física

- En resumen las ecuaciones que rigen el m.r.u.a son dos: la ecuación de la velocidad y la de la posición.

$$v_f = v_0 + a \cdot t$$

$$x_f = x_0 + v_0 \cdot t + 1/2 \cdot a \cdot t^2$$

- Estas dos ecuaciones nos proporcionan la velocidad y la posición en función del tiempo. Pero podemos obtener una ecuación auxiliar muy utilizada en la práctica que relaciona la posición y la velocidad.
- Si se despeja el tiempo en la ecuación de la velocidad y se sustituye en la ecuación de la posición, resulta:

$$v_f = v_0 + a \cdot t \rightarrow t = (v_f - v_0) / a$$

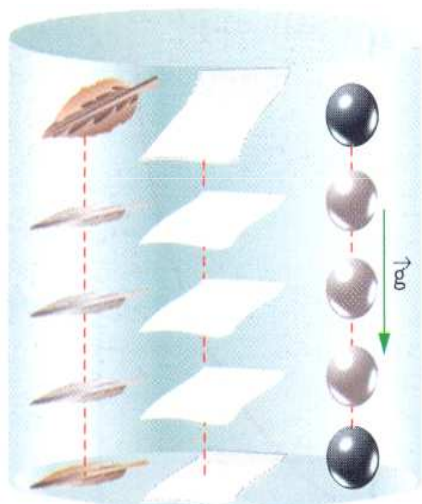
$$x_f = x_0 + v_0 \cdot t + 1/2 \cdot a \cdot t^2 =$$

$$= x_0 + v_0 \cdot (v_f - v_0) / a + 1/2 \cdot a \cdot t \cdot (v_f - v_0) / a$$

- De donde:

$$v_f^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot (x_f - x_0)$$

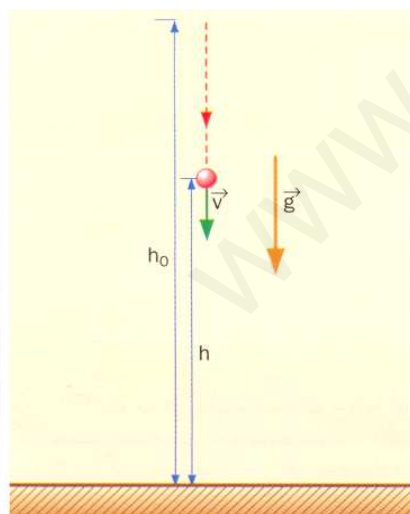
## 5.2 LA CAÍDA LIBRE Y EL LANZAMIENTO VERTICAL.



En el vacío, una pluma, un papel y una bola de acero caen con la misma aceleración.

- Cualquier cuerpo soltado desde cierta altura cae hacia el suelo siguiendo una trayectoria recta. Este movimiento se denomina **caída libre**.
- A principios del siglo XVII el físico italiano **Galileo Galilei** demostró que el movimiento de caída de los cuerpos es un **movimiento uniformemente acelerado** y que el valor de la aceleración es el mismo para todos los cuerpos independientemente de su masa, forma o tamaño.
- Como la resistencia ofrecida por el aire puede causar que los cuerpos caigan más o menos deprisa, es más riguroso decir que los cuerpos caen en el vacío con la misma aceleración.
- **Todos los cuerpos caen en el vacío con la misma aceleración, llamada aceleración de la gravedad (g).**
- A nivel del mar, el valor de la aceleración de la gravedad es  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

## 5.2 LA CAÍDA LIBRE Y EL LANZAMIENTO VERTICAL (II)



Caída libre.

- **Ecuaciones del movimiento de la caída libre.**
- La posición del móvil o altura ( $h$ ) se suele medir a partir del nivel del suelo. La aceleración es el valor de la aceleración de la gravedad ( $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ). Por tanto, las ecuaciones del m.r.u.a se pueden escribir como:

$$v_f = v_0 + a \cdot t$$

$$h_f = h_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

- Siendo  **$h_0$  la altura inicial del cuerpo** y  **$h_f$  la altura final**. Se establece por convenio que las **velocidades con sentido hacia arriba son positivas**, (caso de un lanzamiento vertical), y con **sentido hacia abajo, negativas**, (caso de caída libre). La **aceleración de la gravedad** siempre está dirigida hacia abajo ( **$-9,8 \text{ m/s}^2$** ).
- Cuando se lanza una piedra verticalmente hacia arriba, seguirá un movimiento similar al de la caída pero invertido (**lanzamiento vertical**); por lo que llevara una velocidad inicial elevada que irá disminuyendo hasta detenerse en el punto más alto ( $v_f = 0$ ) y caer de nuevo convirtiéndose en una caída libre.

## 5.2 LA CAÍDA LIBRE Y EL LANZAMIENTO VERTICAL (III)

Física

Problema de aplicación al cálculo del espacio en caída libre

Una tubería de una fábrica tiene un escape por el que salen 100 gotas cada 2 minutos. Si la tubería se encuentra a 30 m sobre el suelo y ya ha llegado alguna al suelo, dibujar la posición de todas las gotas que se encuentran en el aire en el momento en que comienza a caer una concreta

- Una gota tarda en caer:  $y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$   
 $0 = 30 + 0 + \frac{1}{2} (-9,8) t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot 30}{9,8}} = 2,47 \text{ s}$
- Las gotas caen cada,  $\frac{2 \text{ min}}{2} = 1 \text{ min}$   
 $\frac{100 \text{ gotas}}{1 \text{ min}} \rightarrow 120 \text{ s} \Rightarrow x = 1,2 \text{ s.}$   
 luego cuando una gota sale, hay en el aire  $2,47/1,2 \rightarrow 2 \text{ gotas}$
- La primera ha descendido  $s_1 = 30 + 0,5 \cdot (-9,8) \cdot 1,2^2 = 22,95 \Rightarrow s_1 = 22,95 \text{ m}$
- La segunda ha descendido  $s_2 = 30 + 0,5 \cdot (-9,8) \cdot 2,4^2 = 1,8 \Rightarrow s_2 = 1,8 \text{ m}$

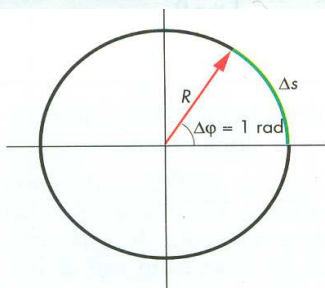
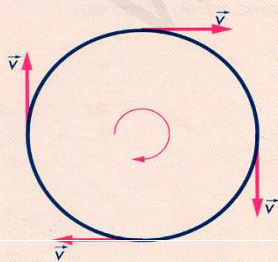
## 6. EL MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME (M.C.U)

Física

En el movimiento rectilíneo y uniforme, m.r.u., el vector velocidad se mantiene constante:



En el movimiento circular uniforme, m.c.u., solo se mantiene constante la rapidez (el módulo de la velocidad), pero varían su dirección y su sentido:



- Como ya hemos indicado, los movimientos de trayectoria curvilínea son mucho más abundantes que los rectilíneos. En este curso abordaremos el caso más sencillo que puede presentarse: el circular uniforme.
- Movimiento circular uniforme (M.C.U) es el de un móvil que recorre una trayectoria circular con rapidez constante.**
- El **movimiento circular**, la **trayectoria** seguida por el móvil es siempre una **circunferencia**, o un arco de ella y, por tanto, las distancias recorridas son las longitudes de estos arcos.
- Existe una relación matemática sencilla entre los arcos y los ángulos que sustentan: **ángulo es la relación entre el arco y el radio con que ha sido trazado**. Si llamamos  $\Delta s$  al arco recorrido, e  $\Delta \phi$  al ángulo barrido por el radio:

$$\text{Ángulo} = \frac{\text{Arco}}{\text{Radio}} = \frac{\Delta s}{R} = \Delta \Phi$$

La unidad de ángulos es el **radián (rad)**, que es el ángulo cuya longitud del arco es igual al radio.

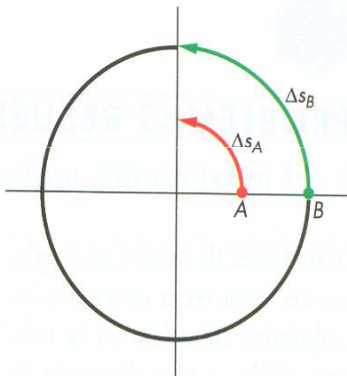
Una circunferencia completa tendrá:  $360^\circ = 2 \cdot \pi \text{ rad}$

$$\text{Ángulo} = \frac{\text{Arco}}{\text{Radio}} = \frac{\Delta s}{R} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{R} = 2 \cdot \pi \text{ radianes}$$



## 6.1 VELOCIDAD LINEAL Y ANGULAR.

Física



- Imagina un disco que hacemos girar con una cierta rapidez y en el que hemos marcado dos puntos A y B. Cuando el disco haya efectuado un cuarto de giro, el punto A habrá recorrido un arco  $\Delta s_A$ , menor que el punto B, que habrá recorrido  $\Delta s_B$ . Sus velocidades lineales serán distintas, puesto que, en el mismo tiempo, el punto B ha recorrido mayor distancia. Y así ocurre con cada uno de los puntos de un cuerpo que gira. ¿Cómo podríamos entonces expresar la velocidad con que gira el disco?
- Observa que, al girar ambos barren el mismo ángulo en el mismo tiempo. En este caso,  $\pi/2$  radianes ( $90^\circ$ ). Esto equivale a decir que todos los puntos del disco giran ángulos iguales en tiempos iguales. Debemos entonces definir la velocidad del disco en términos angulares y no lineales.
- **Velocidad angular es el ángulo barrido en la unidad de tiempo.**

- La ecuación del movimiento es:

$$\Delta\phi = \omega \Delta t \Rightarrow \phi = \phi_0 + \omega(t - t_0)$$

- Donde  $\omega$  es la velocidad angular,  $\Delta\phi$ , el ángulo barrido expresado en radianes, e  $\Delta t$ , el tiempo transcurrido. Su unidad en el **S.I. es el rad/s.**

## 6.1 VELOCIDAD LINEAL Y ANGULAR (II)

Física

- En la industria y en el comercio suele utilizarse como unidad las **r.p.m (revoluciones por minuto)**. La **equivalencia** entre una y otra unidad es sencilla; pasemos 45 r.p.m a rad/s:

$$45 \frac{\text{vueltas}}{\text{min}} \cdot \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{\text{vuelta}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 4,7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

- Habíamos establecido que la relación entre arcos y ángulos es:

$$\Delta s = \Delta\phi \cdot R$$

- Si dividimos los dos miembros de esta expresión por el tiempo empleado:

$$\Delta s / \Delta t = (\Delta\phi \cdot R) / \Delta t \rightarrow v = \omega \cdot R$$

- Lo que establece la **relación entre la velocidad angular y la velocidad lineal**; observa que esta última es directamente proporcional al radio de giro.

En el movimiento circular se utilizan también los conceptos de período y frecuencia que se aplican especialmente a los movimientos ondulatorios.

**Período** es el tiempo ( $T$ ) que emplea el móvil en dar una vuelta completa. Se expresa en segundos.

**Frecuencia** ( $f$ ) es el número de vueltas que gira el móvil en un segundo. Se expresa en vueltas/s, unidad a la que se llama **hercio** (hertz). Su símbolo es Hz.

La frecuencia y el período son dos magnitudes inversas:

$$f = \frac{1}{T}$$

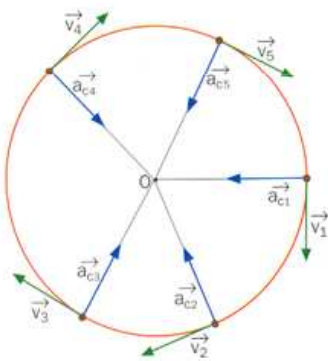
¿Cuál será el período de un disco que da 4 vueltas por segundo? ¿Y su frecuencia expresada en hercios?

## 6.2 ACELERACIÓN CENTRÍPETA.

Física



- Todos los movimientos circulares, desde un punto de vista vectorial, son acelerados, puesto que la **dirección del vector velocidad varía** constantemente al recorrer el móvil su trayectoria.
- Al no cambiar el módulo, se trata solo de una **aceleración normal**,  $a_n$  (perpendicular a la trayectoria), a la que se denomina **aceleración centrípeta**, puesto que es un vector dirigido siempre al centro de la circunferencia.
- Su **módulo**, en función de la velocidad lineal y en función de la velocidad angular, es:



$$a_n = v^2 / R$$

$$a_n = (\omega \cdot R)^2 / R = \omega^2 \cdot R$$

## 6.3 CLASIFICACIÓN DE MOVIMIENTOS

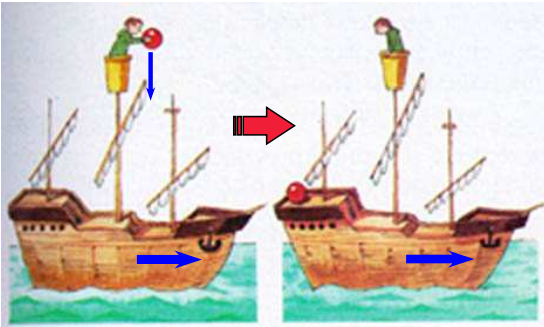
Física

Movimientos rectilíneos $a_n = 0$	Movimientos circulares $a_n \neq 0$ y $R = \text{cte}$
Movimiento rectilíneo uniforme $a_t = 0$	Movimiento circular uniforme $a_t = 0$
Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado $a_t = \text{cte}$	Movimiento circular uniformemente acelerado $a_t = \text{cte}$
Movimiento rectilíneo acelerado $a_t \neq \text{cte}$	Movimiento circular acelerado $a_t \neq \text{cte}$

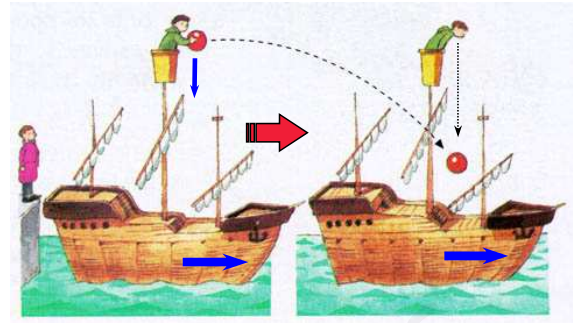
## 7. COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS

Física

Galileo: Principio de independencia



Pensaban que el objeto que caía desde el mástil de un barco en movimiento, impactaría hacia popa.



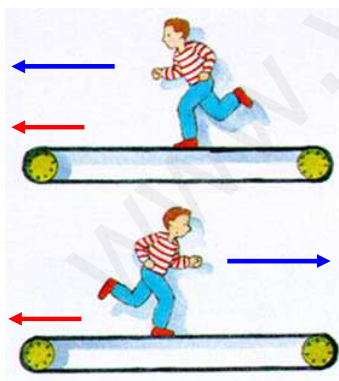
Para el observador fijo en tierra el objeto describe al caer, una trayectoria parabólica, suma de 2 movimientos

Si un móvil está sometido a dos movimientos, su cambio de posición es independiente de que la actuación de éstos, sea de forma simultánea o sucesiva

## 7. COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS (II)

Física

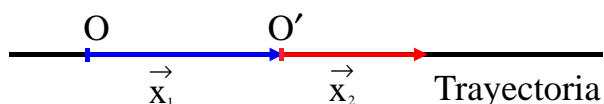
Composición de MRU en la misma dirección



- La velocidad del niño al correr sobre la cinta, crece o decrece según el sentido elegido
- El principio de superposición dice que si un objeto está sometido a la vez a dos o más movimientos, se cumple que:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \dots + \vec{r}_i \\ \vec{v} &= \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \dots + \vec{v}_i \\ \vec{a} &= \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \dots + \vec{a}_i\end{aligned}$$

- En este caso, su composición será:



$$x_1 = x_{01} + v_{1x} t$$

$$x_2 = x_{02} + v_{2x} t$$

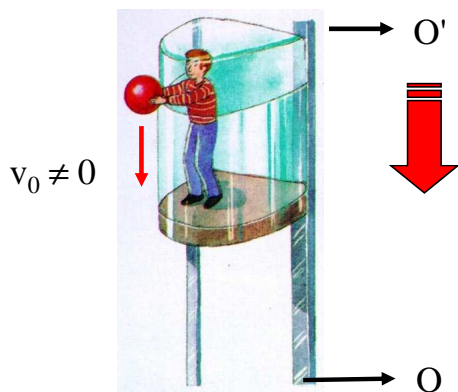
$$x_1 + x_2 = (x_{01} + x_{02}) + (v_{1x} + v_{2x}) t$$

La suma es un MRU en la misma dirección

## 7. COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS (III)

Física

### Estudio del lanzamiento vertical



- El ascensor desciende con MRU, y a su vez el niño lanza la pelota hacia abajo

- $O'$  efectúa un MRU respecto al sistema  $O$

$$y_1 = y_{01} + v_1 t$$

- La pelota efectúa un MRUA respecto a  $O'$

$$y_2 = y_{02} + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

- Su suma es:

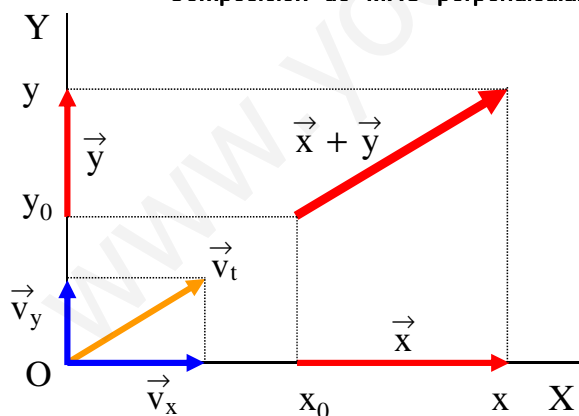
$$y_1 + y_2 = (y_{01} + y_{02}) + (v_1 + v_0)t + \frac{1}{2} a t^2$$

- La suma de un MRU y otro MRUA, ambos en la misma dirección, origina otro MRUA en la misma dirección

## 7. COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS (IV)

Física

### Composición de MRU perpendiculares



- Sean dos movimientos rectilíneos uniformes en las direcciones de los ejes  $X$  e  $Y$  con velocidades respectivas  $\vec{v}_x$  y  $\vec{v}_y$

- Si un móvil experimenta solo el primer movimiento:  $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}_x t$

- Si un móvil experimenta solo el segundo movimiento:  $\vec{y} = \vec{y}_0 + \vec{v}_y t$

- Cuando experimenta la superposición de ambos:  $\vec{x} + \vec{y} = (\vec{x}_0 + \vec{y}_0) + (\vec{v}_x + \vec{v}_y)t$

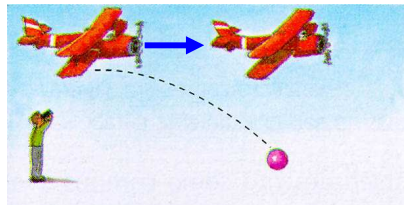
- El resultado es un MRU en la dirección determinada por:  $\vec{v}_t = \vec{v}_x + \vec{v}_y$



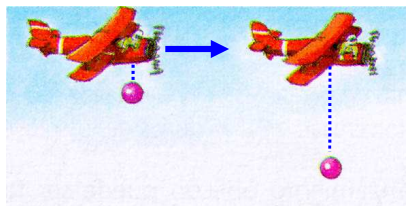
## 7.1 LANZAMIENTO HORIZONTAL

Física

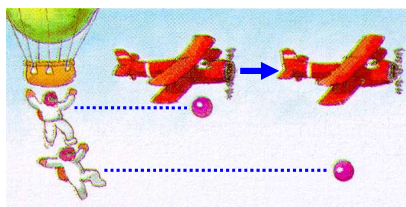
Trayectorias descritas por la pelota según el sistema de referencia



Para un observador en tierra, la trayectoria es parabólica



Para un pasajero del avión, el movimiento es vertical y en caída libre



Para el observador en caída libre, el móvil posee un MRU horizontal

## 7.1 LANZAMIENTO HORIZONTAL (II)

Física

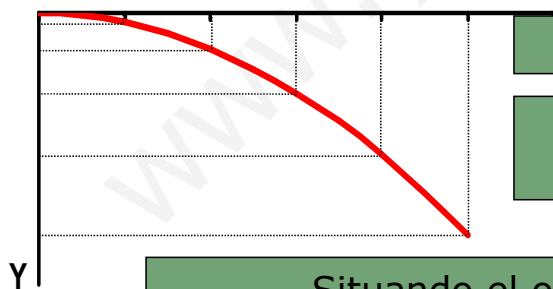
Características del movimiento

- Las proyecciones del móvil sobre los ejes son cada segundo
- Es un movimiento compuesto por:

x

MRU Eje x  $\rightarrow x = x_0 + v_{0x}t$  ;  $v_x = cte$

MRUA Eje y  $\rightarrow y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}at^2$  ;  
 $v_y = v_{y0} + at$



Situando el origen en tierra y considerando.

$$X_0 = 0; y_0 = h_0; y = h_f$$

$$v_{0x} = v_0 = cte ; v_{0y} = 0$$

$$a = -9,8$$

Ecuaciones del movimiento

Eje x  $\rightarrow x = v_x t$  ;  $v_x = v_0 = cte$

Eje y  $\rightarrow h_f = h_0 + \frac{1}{2}at^2$  ;  $v_y = a \cdot t$

Mezclando x e y  $\rightarrow$  Ecuación de la trayectoria  $y = h + (a/2v_0^2) \cdot x^2$

## 7.1 LANZAMIENTO HORIZONTAL (III)

Física

Problema de aplicación de tiro horizontal

Un avión vuela a 5000 m de altura con una velocidad horizontal de 200 m/s desea bombardear un objetivo. Calcular: a) El tiempo que tardará la bomba en llegar al suelo b) La distancia sobre la vertical del objetivo a la que debe soltar la bomba

### a) Tiempo que tarda la bomba en caer

Solo depende de la altura del avión

$$h_f = h_0 + v_{0y}t + 1/2 at^2 \Rightarrow 0 = 5000 + 0 - 4,9 t^2 \Rightarrow t = 31,945 \text{ s}$$

### b) Distancia a la que debe soltar la bomba

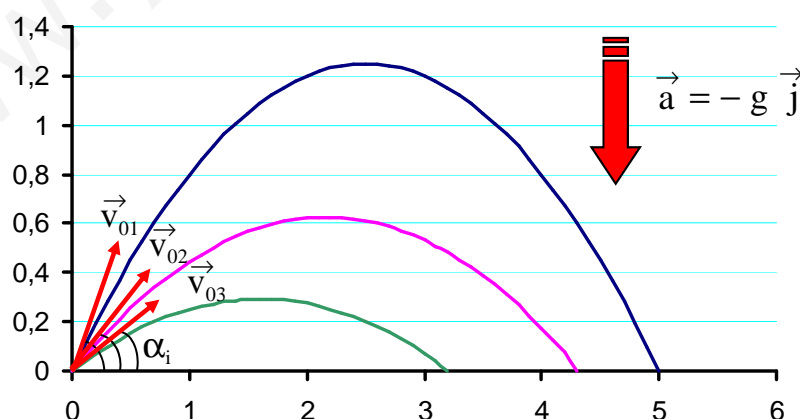
Cuando la bomba llegue el objetivo, el avión se encontrará sobre él

Como ha recorrido  $x = v_x \cdot t = 200 \cdot 31,94 = 6388 \text{ m}$ , el avión soltará la bomba a esa misma distancia antes de la vertical.

## 7.2 LANZAMIENTO OBLICUO

Física

Unas trayectorias muy comunes



- Son las descritas, por ejemplo, por el lanzamiento de distintos proyectiles disparados desde el suelo.
- Dependen de la velocidad inicial de salida  $\vec{v}_{0i}$  y del ángulo de lanzamiento  $\alpha_i$

## 7.2 LANZAMIENTO OBLICUO (II)

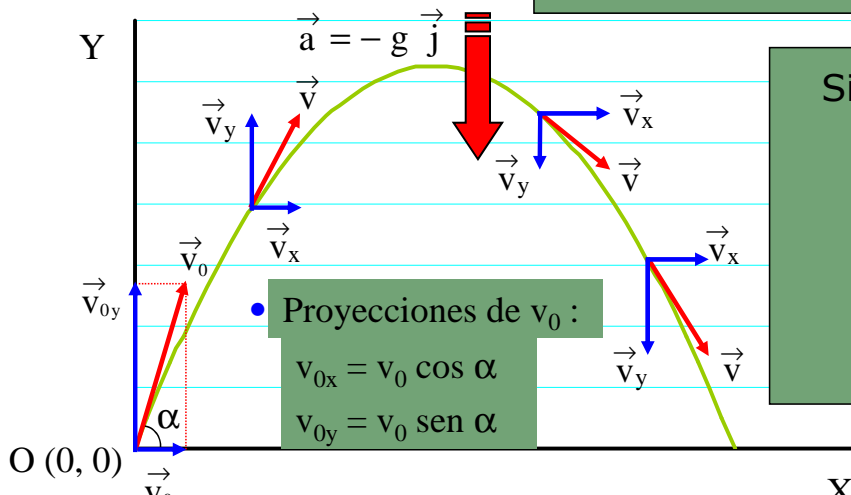
Física

- Es el resultado de la composición de un MRU horizontal y un MRUA en dirección vertical.

### Características del movimiento

$$\text{MRU Eje } x \rightarrow x = x_0 + v_{0x}t ; v_x = \text{cte}$$

$$\text{MRUA Eje } y \rightarrow y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2} a t^2 ; \\ v_y = v_{y0} + at$$



Situando el origen en tierra y considerando.

$$X_0 = 0; y_0 = 0; y = h_f$$

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos \alpha = \text{cte}$$

$$v_{0y} = v_0 \cdot \sin \alpha$$

$$a = -9,8$$

### Ecuaciones del movimiento

$$\text{Eje } x \rightarrow x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t ; \quad v_x = v_0 \cdot \cos \alpha = \text{cte}$$

$$\text{Eje } y \rightarrow h_f = v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t + \frac{1}{2} a t^2 ; \quad v_y = v_0 \cdot \sin \alpha + a t$$

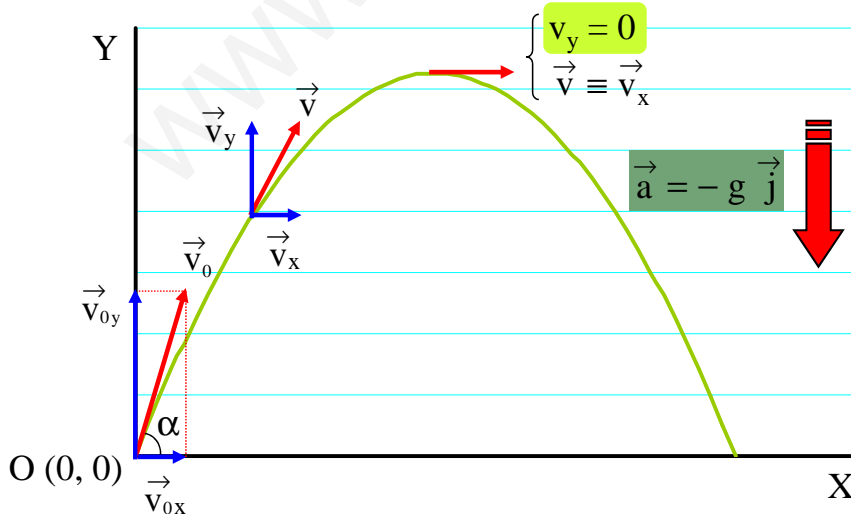
$$\text{Mezclando } x \text{ e } y \rightarrow \text{Ec. de la trayectoria } y = \tan \alpha \cdot x + \left(\frac{a}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}\right) \cdot x^2$$

## 7.2 LANZAMIENTO OBLICUO (III)

Física

### Aplicaciones de este movimiento

- Tiempo empleado en lograr la altura máxima



$$v_y = v_0 \cdot \sin \alpha + a t$$

$$v_y = 0 \Rightarrow 0 = v_0 \sin \alpha - g t$$

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

El tiempo que tarda en caer desde el instante en que fue lanzado, será el doble

- Cálculo del punto de altura máxima:

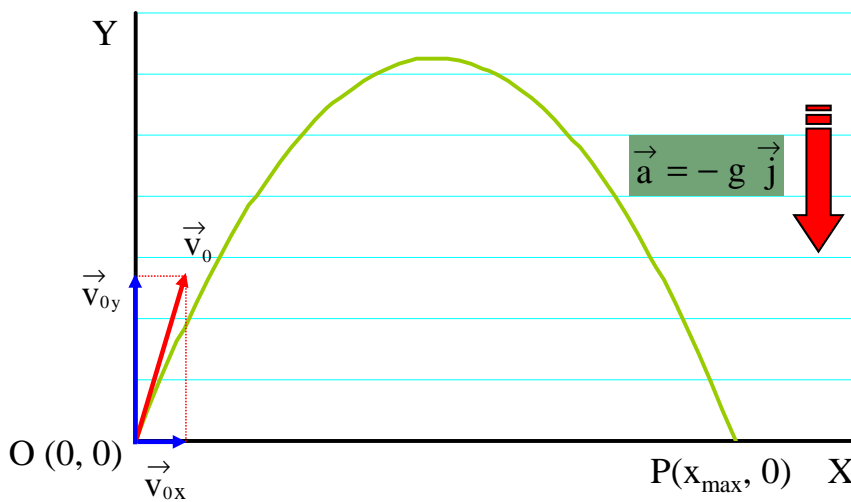
$$y_{\text{max}} = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

## 7.2 LANZAMIENTO OBLICUO (IV)

Física

### Aplicaciones de este movimiento

#### • Cálculo del alcance del tiro



$$h_f = v_0 \cdot \text{sen } \alpha \cdot t + \frac{1}{2} a t^2$$

- La caída se produce en  $P(x_{\text{max}}, 0) \Rightarrow y = 0$

$$v_0 t \text{ sen } \alpha - \frac{1}{2} g t^2 = 0$$

$$t = \frac{2 v_0 \text{ sen } \alpha}{g}$$

$$x_{\text{max}} = v_0 \text{ cos } \alpha t$$

$$x_{\text{max}} = \frac{v_0^2 \text{ sen } 2\alpha}{g}$$

Si  $v_0 = \text{cte}$ , el alcance es máximo cuando  $\alpha = 45^\circ$

Si  $v_0 = \text{cte}$ , como  $\text{sen } 2\alpha = \text{sen } (180^\circ - 2\alpha)$  el alcance será el mismo si los ángulos son complementarios ( $\alpha$  y  $90 - \alpha$ )

## 7.2 LANZAMIENTO OBLICUO (V)

Física

### Problema de aplicación de tiro oblicuo ( I )

Un futbolista realiza un lanzamiento de balón con una velocidad inicial de 20 m/s y que forma un ángulo con el suelo de  $30^\circ$ . Calcular: a) Su vector de posición cuando  $t = 2$  s después del lanzamiento b) Su vector velocidad y su módulo en  $t = 2$  s c) La altura máxima del lanzamiento d) El alcance máximo

a)  $x = x_0 + v_{0x}t = (v_0 \text{ cos } \alpha) t = (20 \text{ cos } 30^\circ) 2 = 34,64 \text{ m}$

$$h = h_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2} a t^2 = (v_0 \text{ sen } \alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 = (20 \text{ sen } 30^\circ) 2 - 4,9 \cdot 2^2 = 0,4 \text{ m}$$

$$\vec{r}_{t=2} = x \vec{i} + y \vec{j} \Rightarrow \vec{r}_{t=2} = 34,64 \vec{i} + 0,4 \vec{j}$$

b)  $v_x = v_{0x} = (v_0 \text{ cos } \alpha) = (20 \text{ cos } 30^\circ) = 17,32 \text{ m/s}$

$$v_y = v_{0y} + at = (v_0 \text{ sen } \alpha) - g t = (20 \text{ sen } 30^\circ) - 9,8 \cdot 2 = -9,6 \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_{t=2} = 17,32 \vec{i} - 9,6 \vec{j}$$

$$|\vec{v}| = 19,8 \text{ m/s}$$

c)  $y_{\text{max}} = \frac{v_0^2 \text{ sen}^2 \alpha}{2g} = \frac{20^2 \text{ sen}^2 30^\circ}{2 \cdot 9,8} = 5,1 \text{ m}$

$$\Rightarrow y_{\text{max}} = 5,1 \text{ m}$$

d)  $x_{\text{max}} = \frac{v_0^2 \text{ sen } 2\alpha}{g} = \frac{20^2 \text{ sen } 60^\circ}{9,8} = 35,34 \text{ m}$

$$\Rightarrow x_{\text{max}} = 35,34 \text{ m}$$

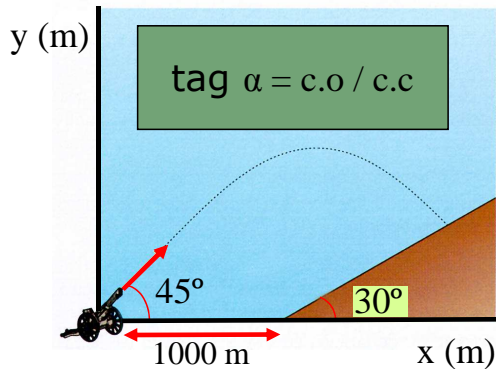


## 7.2 LANZAMIENTO OBLICUO (VI)

Problema de aplicación de tiro oblicuo ( II )

Física

El gráfico representa un disparo y su impacto sobre una ladera inclinada. Si la velocidad inicial del proyectil es de 200 m/s y su inclinación con el suelo es de  $45^\circ$ , hallar: a) La posición del impacto b) La velocidad de la bala en ese momento c) Indicar si podría impactar más alto en la ladera



a) La ecuación de la trayectoria es:

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 \Rightarrow y = x - 0,000245 x^2$$

La ecuación de la recta representante de la ladera es:

$$y = \operatorname{tg} 30^\circ \cdot (x - 1000) \Rightarrow y = 0,57 (x - 1000)$$

En el punto de impacto se cumple:

$$-0,000245 x^2 + x = 0,57 x - 570 \Rightarrow \begin{cases} x = 2637,2 \text{ m} \\ y = 933,24 \text{ m} \end{cases}$$

b) Tiempo transcurrido hasta el impacto:  $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} = \frac{2637,2}{200 \cos 45} = 18,64 \text{ s}$

Velocidad en ese instante:  $\vec{v} = (v_0 \cos \alpha) \vec{i} + (v_0 \operatorname{sen} \alpha - g t) \vec{j} = 141,42 \vec{i} - 41,25 \vec{j}$

c) Sí. Para  $\alpha = 60^\circ$  el punto de impacto es  $P' (2785, 1017)$