

**BOLETÍN DE DERIVADAS Y RECTA TANGENTE**

1. Aplicando la definición, calcula la derivada de  $f(x)=2x^2-3x$  en  $x=1$
2. Pon tres ejemplos de funciones cuya derivada sea  $3x^2$ . ¿Cuántas existen?
3. ¿Existe alguna función que tenga la misma derivada en todos sus puntos? Pon un ejemplo.  
Explica qué característica tiene
4. Encuentra si en la gráfica de la función  $y= 2/x$ , existe algún punto en el que su recta tangente tenga pendiente  $-2$ .
5. Calcula el valor de  $a$  para que la gráfica de la función  $y= \frac{x^3 + a}{x^3 - a}$  cumpla que la recta tangente en el punto de abscisa  $x=1$  es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.
6. Halla las coordenadas de los puntos de la gráfica de la función. Halla también las ecuaciones de dichas rectas.
7. Sean las funciones  $f(x)= x^2 - 6x + 12$  y  $g(x) = -x^2 + 2x + 6$ . Calcula los puntos donde:
  - a) Sus rectas tangentes son paralelas.
  - b) Sus rectas tangentes son perpendiculares.
8. Sea la curva de ecuación  $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$  definida en  $[2, \infty)$ . Halla el punto de corte entre la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa  $x=3$  y la asíntota horizontal de la curva.
9. Halla la ecuación de la recta tangente a la función  $f(x) = x^2 - 2x+1$ , que pasa por el punto  $(5, 0)$
10. Halla los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$  de la función:  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , sabiendo que pasa por  $(0, 5)$  y que tiene un punto de tangente horizontal en  $(2, -3)$ .
11. Se ha trazado una recta tangente a la función  $y = x^3$  cuya pendiente es  $3$  y que pasa por el punto  $(0,2)$ . Halla el punto de tangencia.
12. Dada  $f(x)= x^2-10x+9$ , halla el punto en el que la recta tangente a la gráfica de  $f$  es paralela al eje de abscisas.
13. ¿En qué punto la tangente a la gráfica de la función  $f(x)= x^2-6x+8$  es paralela a la bisectriz del primer cuadrante? ¿Y paralela a la bisectriz del segundo cuadrante?
14. Determina en qué punto de la gráfica de la función  $f(x)= 3\sqrt{6x}$ , la recta tangente forma un ángulo de  $45^\circ$  con la parte positiva del eje de abscisas. Escribe la ecuación de dicha recta tangente.

15. Calcula las coordenadas de los puntos de la gráfica de  $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 2}$ , en los que la recta

tangente a la gráfica de  $f(x)$  es paralela al eje de abscisas.

16. Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $y = x^2 - 4x + 3$  en el punto en que es paralela a  $y = 2x - 5$ .

17. Responde razonadamente a las siguientes cuestiones

- ¿Hay alguna función que tenga la misma pendiente en todos sus puntos? Razona la respuesta.
- Una misma recta ¿puede ser tangente a una función en diferentes puntos?. Explica la respuesta ayudándote de una gráfica
- Verdadero o falso: a) Toda función continua es derivable; b) Toda función derivable es continua; c) Si una función no es derivable entonces no es continua; d) Si una función no es continua entonces no es derivable.
- Calcular, utilizando la definición de derivada,  $f'(2)$  siendo  $f(x) = 1 - x + x^2$ . ¿Qué significado geométrico tiene  $f'(2)$ ?. Calcular el punto de corte de la recta tangente a  $y = f(x)$  en  $x = 2$  con el eje OX.
- Calcular  $b$  para que la tasa de variación media de la función  $y = L(x+b)$  en el intervalo  $[0, 2]$  valga  $L/2$ . Calcular a continuación la tasa de variación instantánea en los extremos del intervalo.
- Sea  $y = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2 - 3}{3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$  ¿existe algún punto en el que la tangente a la gráfica sea paralela al eje OX?
- Explicar porqué la función  $y = |x|$  no es derivable en  $x = 0$ . Calcular las derivadas laterales.
- Estudia la derivabilidad de la función  $y = |x + 1|$  analítica y gráficamente.
- Dadas las funciones  $y = x^2$  e  $y = x^2 + 2$  ¿Cómo son sus pendientes en  $x = 2$ ? ¿Cómo son sus rectas tangentes en dicho punto?
- ¿Puede ser la recta  $y = x$  paralela a la recta tangente a la función  $y = x^3 - 7x + 1$  en algún punto?. ¿Existe algún punto de dicha curva con tangente paralela a la recta  $x = 1$ ?
- Si la tangente a una curva en un punto es horizontal ¿cuánto vale la derivada en dicho punto?. ¿Y si la tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante?
- ¿Puede haber distintas funciones que tengan la misma función derivada? En caso afirmativo cómo serían sus gráficas.
- Hallar los puntos en los que la función  $y = |x^2 - 5x + 6|$  no tiene derivada. Justificar el resultado de forma analítica y gráfica.

18. ¿Es correcto definir la tangente a una curva en un punto  $P$  como aquella recta que tiene en común a la curva exactamente el punto  $P$ ?

19. Utilizando la definición de derivada demuestra que las funciones  $y = f(x)$  e  $y = f(x) + c$  tienen la misma derivada si  $c$  es una constante.

20. Halla la T.V.M. De la función  $f(x) = \frac{3}{x+1}$  en el intervalo  $[1, 1+h]$ . Con el resultado obtenido calcula  $f'(1)$

21. Calcula la recta tangente a las siguientes funciones: a)  $y = \sin x + x$  en  $x = \pi$ ; b)  $y = \frac{x^4 - 3}{x}$  en  $x = -1$ ; c)  $y = L(x^2 + 7)$  en  $x = 0$ ; d)  $y = Lx^2$  en  $x = 2$ ; e)  $y = -2/x$  en  $x = 2$ ; f)  $y = (x+1)e^{-x}$  en el punto de

- corte de la función con el eje OX; g)  $y=Lx$  en  $x=1$ , calcula también la normal en el mismo punto.
22. Determina la ecuación de la recta tangente a la curva  $y=\sqrt{x}$  en el punto en el que sea paralela a la recta  $y=1/2x$
23. Dada la función  $y=-7x+6x^2-x^4$  determina los puntos cuya recta tangente tiene pendiente 1
24. Hallar para qué valor de  $x$  la recta tangente a la curva  $y=L(x^2+1)$  es paralela a la recta  $y=x$
25. Determina la ecuación de la recta tangente a la parábola  $y=x^2-7x+3$  en el punto en que dicha tangente sea paralela a i) el eje OX, ii) a la bisectriz del primer cuadrante, iii) a la recta  $y=-5x+5$
26. Halla la ecuación de la recta tangente y la normal a las funciones a)  $y=xe^{\sqrt{x}}$  en  $x=4$ ; b)  $y=\arcsen\sqrt{x}$  en  $x=1/2$
27. En qué punto la recta tangente a la función  $y=x^2$  forma un ángulo de  $30^\circ$  con el eje OX
28. Halla los valores de  $a, b, c, d$  sabiendo que: 1) la tangente a la gráfica de la función  $y=ax^3+bx^2+cx+d$  en el punto  $(0, -4)$  es paralela a la recta  $y=-x+5$ . 2) la recta tangente a dicha función en el punto de abscisa  $x=1$  es  $12x-y-12=0$
29. Derivar las siguientes funciones:  $y=(\arcsen x)^{\arcsen x}$ ;  $y=\sqrt{(\arcsen x)^{\cos x}}$ ;  $y=[(x^2+x+1)]^{\arcsen x}$
30. Determinar  $y'$  en la siguiente función implícita:  $L(x)y-\text{sen}y=5$ .
31. Hallar las rectas tangente y normal de las siguientes curvas: a)  $y=(\arcsen x)^{\cos x}$  en  $x=\pi/2$  b)  $y=\arcsen x$  en  $x=1$ ; c)  $y=\arcsen(x)$  en  $x=0$
32. Halla el área del triángulo determinado por los ejes coordenados y la tangente a la curva  $xy=1$  en el punto  $x=1$
33. a) Definición de función continua en un punto.
- b) Estudia la continuidad de la función  $f(x)=\begin{cases} 2^x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } 0 < x < 3 \\ 2x-3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ , indicando qué tipos de discontinuidades presenta.
- c) ¿Es derivable en  $x=0$ ? ¿Y en  $x=3$ ? Razona tu respuesta.
34. Indica los puntos en los que la siguiente función es derivable:  $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x > 0 \\ x+1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$
35. Dada la función  $f(x)=\begin{cases} x^2+bx & \text{si } x \leq 1 \\ 2x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$  calcula el valor de  $b$  para que  $f$  sea derivable en  $x=1$ .
36. Calcula las derivadas laterales y comprueba que  $g(x)=|x+4|$  no es derivable en  $x=-4$
37. Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones en los puntos conflictivos utilizando la definición de derivada: a)  $y=\begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ ; b)  $y=\begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ ; c)  $y=\begin{cases} 2x-3 & \text{si } x < 1 \\ -x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$
38. Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones:
- a)  $y=\begin{cases} e^{x-1} & \text{si } x \leq 1 \\ Lx & \text{si } x > 1 \end{cases}$ ; b)  $y=\begin{cases} \cos x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2x}{\pi} & \text{si } 0 < x \leq \pi/2 \\ \arcsen x & \text{si } x > \pi/2 \end{cases}$ ; c)  $y=\begin{cases} \frac{x}{Lx} & \text{si } x > e \\ e & \text{si } x \leq e \end{cases}$ ;
- d)  $y=\begin{cases} x^2-x+1 & \text{si } x \leq 1 \\ Lx+x & \text{si } 1 < x < e \\ x+1 & \text{si } x \geq e \end{cases}$ ; e)  $y=\begin{cases} 2^x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2+1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ Lx+e^{x-1}+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ ; f)  $y=\begin{cases} \arcsen x & \text{si } x \leq 0 \\ L(\cos x)+x & \text{si } 0 < x < \pi/2 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 \text{g) } y &= \begin{cases} e^{x^2} & \text{si } x \leq 0 \\ x+1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ Lx+2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases} ; \text{ h) } y = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \operatorname{cosec} x & \text{si } \pi/2 < x < 2\pi \end{cases} ; \text{ i) } y = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ \operatorname{sen} x & \text{si } \pi < x < 2\pi \end{cases} \\
 \text{j) } y &= \begin{cases} x^3 - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{3}{x-2} & \text{si } 0 < x < 3 \\ x^2 - 6x + 12 & \text{si } x \geq 3 \end{cases} ; \text{ k) } y = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x}{1-x} & \text{si } x < 0 \end{cases} ; \text{ l) } y = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \cos x & \text{si } 0 < x < \pi/2 \\ L(\operatorname{sen} x) & \text{si } \pi/2 \leq x < \pi \end{cases} \\
 \text{m) } y &= \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ \frac{x^2-3}{2} & \text{si } -1 < x \leq 0 \end{cases} ; \text{ n) } y = \begin{cases} \cos x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2x}{\pi} + 1 & \text{si } 0 < x < \pi/2 \\ \operatorname{sen} x + 1 & \text{si } x \geq \pi/2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

39. Determinar el valor de los parámetros a,b, c y d de modo que las siguientes funciones sean

derivables en todo R: a)  $y = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{si } x \geq 0 \\ ax + b & \text{si } x < 0 \end{cases}$  ; b)  $y = \begin{cases} a \operatorname{sen} x & \text{si } x < 0 \\ bx & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ Lx + c & \text{si } x > 1 \end{cases}$

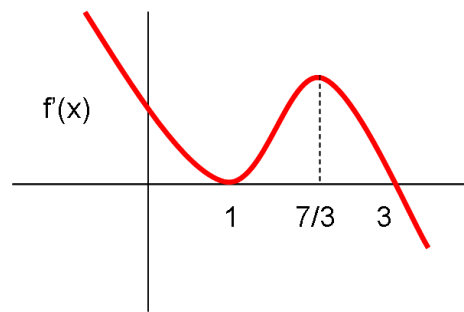
c)  $y = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ ax^3 + bx^2 + cx + d & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ \cos(x-2) & \text{si } x > 2 \end{cases}$  d)  $y = \begin{cases} L(e + \operatorname{sen} x) & \text{si } x < 0 \\ x^3 + ax + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$  e)  $y = \begin{cases} ax & \text{si } x < 1 \\ \frac{x^2 - b}{2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

f)  $y = \begin{cases} -x^2 + ax & \text{si } -1 \leq x < 3 \\ bx + 3 & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$  g)  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$  h)  $y = \begin{cases} x^3 - x & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

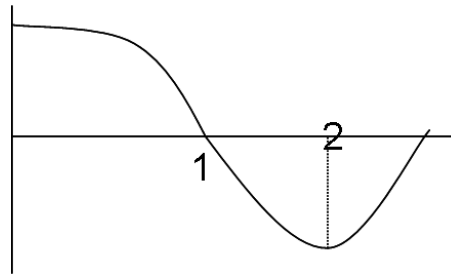
i)  $y = \begin{cases} 3 - ax^2 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{ax} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$  j)  $y = \begin{cases} bx^2 + ax & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{a}{x} & \text{si } -1 < x < 1 \\ x^2 + ax + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$  ; k)  $y = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{ax + b} & \text{si } 0 < x < 2 \\ \frac{-x}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

40. Si la función  $y=f(x)$  es creciente y derivable en todo R ¿puede ser  $f'(x)=0$  en algún punto? ¿Puede ser  $f'(x)<0$  en algún punto? Razona las respuestas.
41. Dar un ejemplo de una función que tenga infinitos máximos y mínimos relativos
42. ¿Qué diferencia existe entre los conceptos de extremo relativo y absoluto?. Pon un ejemplo gráfico que aclare la contestación
43. Verdadero o falso: Sea  $f$  una función continua en  $[a,b]$  y sea  $c$  perteneciente a  $(a,b)$  tal que  $f'(c)=0$ , entonces  $c$  es un máximo o un mínimo relativo de la función.
44. Verdadero o falso: a) Si una función es creciente en un punto, entonces su derivada es positiva en dicho punto; b) Si una función tiene derivada positiva en un punto, entonces es creciente en ese punto.
45. a) Una función  $f$  es tal que  $f'(a)=0$  ¿qué puede afirmarse del comportamiento de la función en ese punto? b) Si la derivada de una función es negativa en el punto  $x=2$  ¿Cuál es el signo de  $f(2+h)-f(2)$  según los valores de  $h$  cuando  $h$  tiende a cero?
46. Si la función  $y=f(x)$  tiene derivadas primera y segunda en un punto  $x=a$  y son ambas igual a cero ¿puede presentar en dicho punto un extremo relativo? ¿Y un punto de inflexión?. En caso negativo razona la respuesta, en caso afirmativo pon un ejemplo.

47. La gráfica de la figura corresponde a la primera derivada de una función  $f(x)$ , ¿qué puede decirse sobre los posibles máximos y mínimos relativos de la función? ¿y de los puntos de inflexión? Razonar la respuesta



48. Explica la razón por la que la gráfica de una función polinómica de segundo grado es siempre cóncava o convexa. ¿cómo se caracteriza en cada uno de los dos casos?
49. ¿Por qué toda función polinómica de tercer grado tiene siempre un punto de inflexión? ¿Podríamos garantizar lo mismo para todas las funciones de cuarto grado?. Razona las respuestas.
50. En la figura se representa la gráfica  $f'$  de la derivada de una función  $f$ . A partir de ella determinar si  $f$  posee extremos relativos o puntos de inflexión en los puntos  $x=1$  y  $x=2$



51. Da un ejemplo de una función que tenga infinitos puntos de inflexión
52. Se considera la función  $y=ax^2+bx+c$ . Determinar las constantes  $a, b$  y  $c$  para que: Pase por el punto  $(0,-3)$ ; la tangente a la gráfica en  $x=0$  sea paralela a la recta  $y=2x$ ; alcance un mínimo en  $x=-1$ . Para esos valores de las constantes representa la gráfica de  $g(x)=|f(x)|$
53. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva  $y=x^3-6x^2+16x-11$  en su punto de inflexión
54. Sea  $f(x)=x^3+ax^2+bx+7$ . Hallar  $a$  y  $b$  de forma que la curva tenga en  $x=1$  un punto de inflexión con recta tangente horizontal.

## SOLUCIONES BOLETÍN DE DERIVAS Y RECTA TANGENTE.

$$1. f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(1+h)^2 - 3(1+h) - (-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(1+2h+h^2) - 3(1+h) + 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2+4h+2h^2-3-3h+1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h+2h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+2) = 2$$

2.  $y=x^3$ ,  $y=x^3+6$ ;  $y=x^3-3$ . Existen infinitas, todas las del tipo  $y=x^3+K$  siendo  $K$  un número real

3. Si, las funciones polinómicas de grado 1 cuyas gráficas son rectas. Ejemplo  $y=3x+5$

4. Esto es equivalente a preguntar si en la función  $y=2/x$  existe algún punto cuya derivada valga  $-2$ .  $Y' = \frac{-2}{x^2} = -2$ ; resolviendo la ecuación  $x = \pm 1$  y por tanto los puntos serían  $P_1=(1,2)$  y  $P_2=(-1,-2)$

5. Que la recta tangente en  $x=1$  sea paralela a la bisectriz del primer cuadrante,  $y=x$ , es equivalente a decir que la derivada en  $x=1$  debe valer 1 ( $f'(1)=1$ ).

$$\text{Derivamos la función } y' = \frac{3x^2(x^3-a) - (x^3+a)3x^2}{(x^3+a)^2} = \frac{3x^5 - 3ax^2 - 3x^5 - 3ax^2}{(x^3+a)^2} = \frac{-6ax^2}{(x^3+a)^2} Y'; f'(1) = \frac{-6a}{(1+a)^2} = 1.$$

Resolviendo la ecuación obtenemos:  $a = -2 \pm \sqrt{3}$

6. La recta  $13x-y-1=0$  puede escribirse en forma explícita:  $y=13x-1$  y su derivada será  $y'=13$

Buscar los puntos de la función  $f(x)=x^3+x$  cuyas tangentes sean paralelas a la recta es equivalente a buscar los puntos cuya derivada valga 13.  $f'(x)=3x^2+1=13$ : resolviendo  $x = \pm 2$

$P_1=(2, 10)$ , recta tangente:  $y = 13x - 16$ ;  $P_2=(-2, -10)$ , recta tangente:  $y = 13x + 16$

7. a) Que sus rectas tangentes sean paralelas en un punto es equivalente a decir que las derivadas en ese punto son iguales.  $f'(x)=2x-6$ ,  $g'(x)=-2x+2$ . Por tanto  $2x-6=-2x+2 \Rightarrow x=2$   
Punto de  $f(x) = (2, 4)$  y punto de  $g(x) = (2,6)$ .

b) que sus tangentes sean perpendiculares es equivalente a decir que  $f'(x) = -1/g'(x)$  entonces

$$2x-6 = -\frac{1}{-2x+2} \text{ resolviendo } x=2 \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$8. f(x) = \frac{2x+1}{x-2} \quad y' = \frac{2(x-2) - (2x+1)}{(x-2)^2} = \frac{-5}{(x-2)^2}; f(3)=7, f'(3)=-5. \text{ Recta tangente en } x=3 \quad -5(x-3)=y-7$$

La asíntota horizontal a la función es  $y=2$  por tanto debemos resolver el sistema formado por esas dos rectas y obtenemos como solución  $x=4$  e  $y=2$  es decir  $P(4,2)$

9. Las rectas tangentes a la función  $f(x) = x^2 - 2x + 1$  en un punto cualquiera  $x=a$  tendrán la siguiente forma:  $f(a)=a^2-2a+1$ ,  $f'(x)=2x-2 \Rightarrow f'(a)=2a-2$ , por tanto la recta tangente será

$(2a-2)(x-a)=y-(a^2-2a+1)$ . Dado que sabemos que dicha tangente pasa por el punto  $(5,0)$  podemos sustituir en esa recta  $x$  e  $y$  por 5 y 0 respectivamente obteniendo  $(2a-2)(5-a) = -(a^2-2a+1)$ . Resolviendo esa ecuación obtenemos que  $a=1$  o  $a=9$  para  $a=1$  la recta tg es  $y=0$  y para  $a=9$  la recta tg es

$$16(x-9)=y-64$$

10. Pasa por  $(0,5) \Rightarrow f(0) = 5$ . En el punto  $(2,-3)$  tiene tangente horizontal  $\Rightarrow \begin{cases} f(2) = -3 \\ f'(2) = 0 \end{cases}$  resolviendo

el sistema que se obtiene al plantear esas 3 ecuaciones se obtiene:  $a=2$ ,  $b=-8$  y  $c=5$

11. Nos dicen que la recta tangente tiene de pendiente 3, esto significa que en ese punto la derivada vale 3.  $y' = 3x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm 1$  Hallamos las rectas tangentes en  $x=1$  y  $x=-1$  y comprobamos cual de ellas pasa por el punto  $(0,2)$  obteniéndose que la válida es la tangente en  $x=1$

12.  $f'(x) = 2x - 10 = 0 \Rightarrow x = 5$

13.  $y' = 2x - 6$ . a) paralela a la bisectriz del primer cuadrante:  $2x - 6 = 1 \Rightarrow x = 7/2$ ; b) paralela a la bisectriz del segundo cuadrante:  $2x - 6 = -1 \Rightarrow x = 5/2$ .

14. Si la recta tangente forma  $45^\circ$  con la parte positiva del eje de abscisas  $y' = \text{tg}45^\circ = 1$ .

$$y' = \frac{18}{2\sqrt{6x}} = 1 \Rightarrow x = 27/2$$

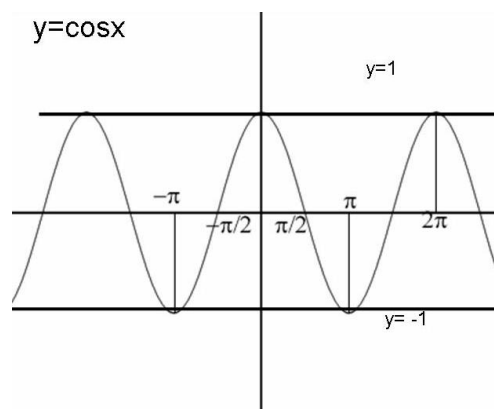
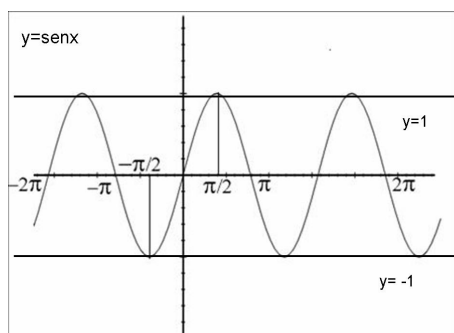
15.  $y' = \frac{3(x^2+2) - 3x \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{-3x^2+6}{(x^2+2)^2} = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2}$

16. Para que la recta tg sea paralela a la recta  $y=2x-5$  la derivada debe ser igual a 2.

$$y' = 2x - 4 = 2 \Rightarrow x = 3 \quad \text{Recta tg en } x=3: 2(x-3)=y$$

17. A) Si la función es una recta, su recta tangente coincide en todos sus puntos con ella misma y por tanto tiene en todos sus puntos la misma pendiente. Es decir, si la función es del tipo  $y=ax+b$   $a, b \in \mathbb{R}$ , su recta tangente en cualquier punto  $x=x_0$  coincide con la propia recta  $y=ax+b$  por tanto su pendiente es  $m=a \forall x_0 \in \mathbb{R}$ .

B) Si, la misma recta puede ser tangente a una función en diferentes puntos. Si observamos por ejemplo la función  $y=\text{sen}x$ , vemos que las rectas  $y=1$  e  $y=-1$  son tangentes a la función en infinitos puntos. Lo mismo ocurre con la función  $y=\text{cos}x$



C) a) falso ej  $y=|x|$  es continua en  $x=0$  y no es derivable. b) verdadero, c) falso, nos sirve el mismo ejemplo que en el apartado a; d) verdadero

$$D) f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - (2+h) + (2+h)^2 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 2 - h + (4 + 4h + h^2) - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 3h}{h} =$$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+3) = 2$ . Su significado geométrico es la pendiente de la recta tangente en  $x=2$ . La recta tg en  $x=2$  es:  $2(x-2)=y-3$ , su punto de corte con el eje OX es el punto  $P(1/2,0)$

$$E) TVM = \frac{f(2) - f(0)}{2-0} = \frac{L(2+b) - Lb}{2} = \frac{L(\frac{2+b}{b})}{2} = L2 \Rightarrow L(\frac{2+b}{b}) = L2^2 \Rightarrow \frac{2+b}{b} = 4 \Rightarrow b = 2/3$$

$$F) y' = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ 2x/3 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{no existe } f'(0) \text{ por ser diferentes las derivadas laterales en ese punto.}$$

Nos preguntan si existe algún punto con recta tangente horizontal, o lo que es lo mismo en el que la derivada valga cero, analizando la derivada vemos que no se anula en ningún punto por tanto no existe ningún punto con recta tangente horizontal.

G) Si analizamos su gráfica vemos que el límite de las secantes por la izd y por la derecha de  $x=0$  no coinciden, por la tanto no existe la recta tangente en ese punto, por tanto no es

derivable en  $x=0$ . Hallamos la función derivada  $y' = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_-(-1) = -1 \\ f'_+(-1) = 1 \end{cases}$

H) Estudio analítico:  $y = |x+1| = \begin{cases} -x-1 & \text{si } x < -1 \\ x+1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$  La función es continua y derivable en  $\mathbb{R} - \{-1\}$

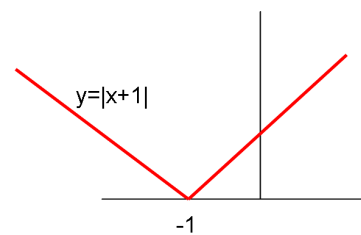
por estar constituida por funciones polinómicas. Estudiamos la continuidad en  $x=-1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) \text{ por tanto es continua en } \mathbb{R}. Y' = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } x > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_-(-1) = -1 \\ f'_+(-1) = 1 \end{cases}$$

por tanto no es derivable en  $x=-1$ .

Para el estudio gráfico dibujamos la función y

comprobamos que el límite de las rectas secantes a la izd y a la derecha de  $x=-1$  no coincide.



I)  $y = x^2 \Rightarrow y' = 2x$ ,  $f'(2) = 4$ ;  $y = x^2 + 2 \Rightarrow y' = 2x$ ,  $f'(2) = 4$ . Sus

pendientes en  $x=2$  son iguales, las rectas tangentes en dicho punto son paralelas.

J) La derivada de  $y=x$  es  $y'=1$  para que dicha recta sea paralela en algún punto a la recta

tangente a  $y=x^3-7x+1$  las derivadas deben ser iguales, es decir:  $1=3x^2-7 \Rightarrow 3x^2=8 \Rightarrow x = \pm \sqrt{8/3}$

No existe ningún punto con tangente paralela a  $x=1$  ya que ello implicaría que la recta

tangente fuese vertical y para ello la función no podría ser derivable en ese punto, dado que la

función es polinómica y por tanto derivable en todos sus puntos no tiene ninguna recta

tangente vertical.

K) a)  $y'=0$ ; b)  $y'=1$



L) Si siempre que se diferencien en una constante. Por ejemplo  $y=x^2$  e  $y=x^2+6$ . Todas sus gráficas se obtienen a partir de una de ellas trasladandola verticalmente.

M) Estudio analítico:  $x^2-5x+6=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$  La función  $y=|x^2-5x+6| = \begin{cases} x^2-5x+6 & \text{si } x < 2 \\ -x^2+5x-6 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ x^2-5x+6 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

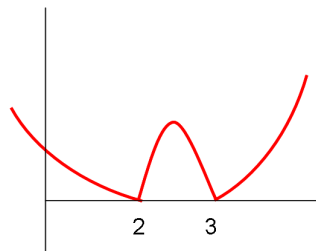
Al estar constituida por funciones polinómicas la función es continua y derivable en  $\mathbb{R}-\{2,3\}$ , estudiamos la continuidad en esos puntos:  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = 0$ ;

$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) = 0$ ; Por tanto  $f$  es continua en  $x=2$  y  $x=3$ . Estudiamos ahora la

derivabilidad en esos puntos  $y' = \begin{cases} 2x-5 & \text{si } x < 2 \\ -2x+5 & \text{si } 2 < x < 3 \\ 2x-5 & \text{si } x > 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_-(2) = -1 \\ f'_+(2) = 1 \\ f'_-(3) = -1 \\ f'_+(3) = 1 \end{cases}$  por tanto no es

derivable en  $x=2$  ni en  $x=3$  al no coincidir las derivadas laterales.

Para el estudio gráfico dibujamos la función y comprobamos que el límite de las rectas secantes a la izquierda y a la derecha de  $x=2$  y de  $x=3$  no coincide.



18. No es correcto. La recta tangente a una función en un punto P se define como el límite de las rectas secantes PQ cuando el punto Q tiende al punto P

19. sea  $g(x) = f(x) + c$ ,  $g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + c - (f(x) + c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$

20.  $TVM = \frac{f(1+h) - f(1)}{1+h-1} = \frac{\frac{3}{2+h} - \frac{3}{2}}{h} = \frac{\frac{6-3h}{2(2+h)}}{h} = \frac{-3h}{2h(2+h)} = \frac{-3}{2(2+h)}$  Para calcular  $f'(1)$  debemos

calcular la TVI que será el límite de la TVM cuando  $h$  tiende a Cero.  $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3}{2(2+h)} = -\frac{3}{4}$

21. A)  $y = \pi$ , b)  $2(x+1) = y - 6$ , c)  $y = 17$ , d)  $x - 2 = y - 4$ , e)  $1/2(x-2) = y + 1$ , f)  $x + 1 = y$ ,

g) Recta tangente:  $x - 1 = y$ , recta normal:  $-(x - 1) = y$

22.  $Y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 1$  Recta tg en  $x=1$ :  $1/2(x-1) = y - 1$

23.  $y' = -7 + 12x - 4x^3 = 1$ , resolviendo  $x=1$ ,  $x=-2$

24.  $y' = \frac{2x}{x^2+1} = 1 \Rightarrow x = 1$

25.  $y' = 2x - 7$ ; i)  $2x - 7 = 0$ ,  $x = 7/2$ , recta tangente:  $y + 37/4 = 0$ ; ii)  $2x - 7 = 1$ ,  $x = 4$  recta tg  $x - 4 = y + 9$ ,

iii)  $2x - 7 = -5$ ,  $x = 1$  recta tg:  $-5(x - 1) = y + 3$

26. A) tg:  $2e^2(x - 4) = y - 4e^2$ , normal:  $-1/2e^2(x - 4) = y - 4e^2$  b) tg:  $(x - 1/2) = y - \pi/4$ , normal:

$$-(x-1/2)=y-\pi/4$$

$$27. \operatorname{tg} 30^\circ = 1/\sqrt{3} \Rightarrow y' = 2x = 1/\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$28. \text{ la tg en } (0, -4) \text{ paralela a } y = -x + 5 \Rightarrow \begin{cases} f(0) = -4 \\ f'(0) = -1 \end{cases} \text{ la tg en } x=1 \text{ es } 12x - y - 12 = 0 \text{ o lo que es lo}$$

mismo  $y = 12x - 12 \Rightarrow f'(1) = 12$  Planteando esas 3 ecuaciones para la función que tenemos y resolviendo el sistema obtenemos que:  $d = -4$ ,  $c = -1$ ,  $a = 3$ ,  $b = 2$

29. a)  $y = (\arcsen x)^{\arctg x}$ ; Aplicamos la derivación logarítmica:

$$L y = \arctg x \cdot L(\arcsen x); \frac{y'}{y} = \frac{1}{1+x^2} \cdot L(\arcsen x) + \arctg x \cdot \frac{1}{\arcsen x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ despejando}$$

$$y = \left( \frac{1}{1+x^2} \cdot L(\arcsen x) + \arctg x \cdot \frac{1}{\arcsen x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) \cdot (\arcsen x)^{\arctg x};$$

$$b) y = \sqrt{(\sen x)^{\cos x}} \quad B) y = (\sen x)^{\cos x/2}$$

$$L y = \frac{\cos x}{2} L(\sen x); \text{ derivando } \frac{y'}{y} = \frac{-\sen x}{2} L(\sen x) + \frac{\cos x}{2} \frac{1}{\sen x} \cos x \quad \text{Despejamos } y':$$

$$y' = \left( \frac{-\sen x}{2} L(\sen x) + \frac{\cos x}{2} \frac{1}{\sen x} \cos x \right) \cdot Y' = \sqrt{(\sen x)^{\cos x}}$$

$$c) y = [(x^2 + x + 1)]^{\arctg x}$$

$$L y = \arctg x \cdot L(x^2 + x + 1); \frac{y'}{y} = \frac{1}{1+x^2} L(x^2 + x + 1) + \arctg x \cdot \frac{2x+1}{x^2+x+1};$$

$$y' = \left( \frac{1}{1+x^2} L(x^2 + x + 1) + \arctg x \cdot \frac{2x+1}{x^2+x+1} \right) \cdot [(x^2 + x + 1)]^{\arctg x}$$

$$30. L(x)y - \sen y = 5. \text{ En primer lugar derivamos la función: } \frac{1}{x} \cdot y + L(x)y' - \cos y \cdot y' = 0$$

$$\text{En 2º lugar despejamos } y', y'(Lx - \cos y) = -\frac{y}{x} \Rightarrow y' = \frac{-y}{x(Lx - \cos y)}$$

31. a)  $y = (\sen x)^{\cos x}$  en  $x = \pi/2$  En primer lugar vamos a derivar la función. Aplicamos logaritmos:

$$L y = \cos x \cdot L(\sen x); \frac{y'}{y} = -\sen x \cdot L(\sen x) + \frac{\cos x \cdot \cos x}{\sen x} \Rightarrow y' = (-\sen x L(\sen x) + \frac{\cos^2 x}{\sen x}) \cdot \sen x^{\cos x}$$

$$\text{Recta tangente: } x_0 = \pi/2; y_0 = f(\pi/2) = (\sen(\pi/2))^{\cos(\pi/2)} = 1^0 = 1; m = f'(\pi/2) = 0$$

Recta tangente:  $y = 1$ ; al ser la recta tangente horizontal, la normal es la recta vertical que pasa por ese punto, es decir  $x = \pi/2$

$$b) y = \arctg x \text{ en } x = 1; y' = \frac{1}{1+x^2} \text{ Recta tangente: } x_0 = 1; y_0 = \arctg 1 = \pi/4 \quad m = f'(1) = 1/2$$

Recta  $1/2(x-1) = y - \pi/4$ . La pendiente de la normal es  $m' = -1/m$ , en nuestro caso  $m' = -2$ . Por lo tanto la recta normal será  $-2(x-1) = y - \pi/4$

$$c) \arcsen(x) \text{ en } x = 0.5 \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ Recta tangente: } x_0 = 0.5; y_0 = \arcsen(0.5) = \pi/6$$

$$m = f'(0.5) = \frac{1}{\sqrt{1-0.25}} = \frac{1}{\sqrt{0.75}} \text{ Recta: } \frac{1}{\sqrt{0.75}}(x-0.5) = y - \pi/6 \text{ La pendiente de la normal es}$$

$$m' = -\sqrt{0.75}, \text{ En consecuencia la recta normal es: } -\sqrt{0.75}(x-0.5) = y - \pi/6$$

32. En primer lugar hallamos la tangente a la curva  $x \cdot y = 1$  en  $x = 1$ . La curva en ecuación

explícita viene dada por  $y = 1/x$ . Y su derivada será  $y' = -1/x^2$ .  $X = 1$ ,  $f(1) = 1$ ;  $f'(1) = -1$ , luego la recta tangente será  $-1(x-1) = y - 1$  o lo que es lo mismo:  $x + y - 2 = 0$ . Intersecamos esa recta

$$\text{con los ejes coordenados: Eje OX} \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2$$

$$\text{Eje OY:} \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 2 \text{ Por lo tanto el triángulo rectángulo formado por la recta}$$

tangente y los dos ejes coordenados tiene de base 2 unidades y de altura también 2

$$\text{unidades por lo que su área será } S = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$$

33. A) una función es continua en un punto  $x=a$  de su dominio si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$$B) f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } 0 < x < 3 \\ 2x-3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \quad \text{La función es continua en } (-\infty, 0) \text{ por serlo la función exponencial,}$$

es continua en  $(0,3)$  ya que  $y = \sqrt{x+1}$  es continua si  $x \geq -1$ , y es continua en  $(3, \infty)$  por ser en ese intervalo una función polinómica. Debemos estudiar la continuidad en  $x=0$  y  $x=3$

Continuidad en  $x=0$ :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2^x = 2^0 = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x+1} = 1$ ,  $f(0)$  no existe por tanto hay una discontinuidad evitable en  $x=0$

Continuidad en  $x=3$ :  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{x+1} = 2$ ;  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 2x-3 = 3$   $f(3)=3$  por tanto en  $x=3$  hay una discontinuidad de salto finito

C)  $f$  no puede ser derivable en  $x=0$  ni en  $x=3$  al no ser continua en dichos puntos

$$34. f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x > 0 \\ x+1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{La función es continua y derivable en } \mathbb{R} - \{0\} \text{ al estar constituida por}$$

dos funciones polinómicas. Estudiamos la continuidad en  $x=0$   $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x+1 = 1$ ,

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2+1=1$ ;  $f(0)=1$  por tanto es continua. Estudiamos la derivabilidad  $y' =$

$$\begin{cases} 2x & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_-(0) = 1 \\ f'_+(0) = 0 \end{cases} \quad \text{luego no es derivable en } x=0.$$

$$35. f(x) = \begin{cases} x^2+bx & \text{si } x \leq 1 \\ 2x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2+bx = 1+b; \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x-1 = 1 \Rightarrow 1+b = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow b = 0$ . Para  $b=0$  es continua pero debemos comprobar si es o no derivable:

$$y' = \begin{cases} 2x+b & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{para } b=0 \text{ coinciden las derivadas por la izd y por la dcha en } x=1 \text{ y por}$$

tanto para ese valor es derivable en  $x=1$

$$36. y = |x+4| = \begin{cases} -x-4 & \text{si } x < -4 \\ x+4 & \text{si } x \geq -4 \end{cases} \quad \text{La función es continua y derivable en } \mathbb{R} - \{-4\} \text{ por estar}$$

constituida por funciones polinómicas. Estudiamos la continuidad en  $x=-4$

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = f(-4) \text{ por tanto es continua en } \mathbb{R}. y' = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -4 \\ 1 & \text{si } x > -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_-(-4) = -1 \\ f'_+(-4) = 1 \end{cases} \text{ por}$$

tanto no es derivable en  $x=-4$ .

$$37. A) y = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1; f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h = 0$$

Por tanto no es derivable en  $x=0$

$$B) y = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} = -\infty; f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1 \text{ Por tanto no es}$$

derivable en  $x=0$

$$c) y = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x < 1 \\ -x & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad f'_{-}(1) = \lim_{h \rightarrow 0^{-}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^{-}} \frac{2(1+h)-3+1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^{-}} \frac{2+2h-2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^{-}} \frac{2h}{h} = 2$$

$$f'_{+}(1) = \lim_{h \rightarrow 0^{+}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^{+}} \frac{-(1+h)+1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^{+}} \frac{-h}{h} = -1 \text{ Por tanto no es derivable en } x=1$$

38. A)  $\begin{cases} e^{x-1} & \text{si } x \leq 1 \\ Lx & \text{si } x > 1 \end{cases}$  ; La función es continua y derivable en  $(-\infty, 1)$  por ser una función

exponencial y también en  $(1, \infty)$  ya que  $y=Lx$  es continua y derivable si  $x > 0$ . Estudiamos la continuidad en  $x=1$   $\lim_{x \rightarrow 1^{-}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^{-}} e^{x-1} = e^0 = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1^{+}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^{+}} Lx = L1 = 0$  no es continua en  $x=1$  y por tanto no es derivable.

$$b) y = \begin{cases} \cos x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2x}{\pi} & \text{si } 0 < x \leq \pi/2 \\ \text{sen } x & \text{si } x > \pi/2 \end{cases} \quad \text{La función es continua y derivable en } (-\infty, \infty) - \{0, \pi/2\} \text{ por serlo las}$$

funciones que la forman. Continuidad en  $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^{-}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^{-}} \cos x - 1 = 0; \lim_{x \rightarrow 0^{+}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^{+}} 2x/\pi = 0, f(0)=0 \text{ es continua en } x=0$$

Continuidad en  $x=\pi/2$ .  $\lim_{x \rightarrow \pi/2^{-}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi/2^{-}} 2x/\pi = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow \pi/2^{+}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi/2^{+}} \text{sen } x = 1, f(\pi/2)=1$  es

continua en  $x=\pi/2$  Estudio de la derivabilidad:  $y' = \begin{cases} -\text{sen } x & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{\pi} & \text{si } 0 < x < \pi/2 \\ \cos x & \text{si } x > \pi/2 \end{cases} ; \begin{cases} f'_{-}(0) = 0 \\ f'_{+}(0) = 2/\pi \end{cases} ;$

$\begin{cases} f'_{-}(\pi/2) = 2/\pi \\ f'_{+}(\pi/2) = 0 \end{cases}$  No es derivable en  $x=0$  ni en  $x=\pi/2$

$$c) y = \begin{cases} \frac{x}{Lx} & \text{si } x > e \\ e & \text{si } x \leq e \end{cases} \quad \text{La función } y=x/Lx \text{ es continua y derivable en } (0, \infty) - \{1\} \text{ y por tanto lo es en}$$

$(e, \infty)$ , la función  $y=e$  es continua y derivable por ser una función constante, en consecuencia nuestra función es continua y derivable en  $\mathbb{R} - \{e\}$ , debemos estudiarla en este punto.

Continuidad en  $x=e$   $\lim_{x \rightarrow e^{-}} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^{-}} x/Lx = e$ ;  $\lim_{x \rightarrow e^{+}} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^{+}} e = e, f(e)=e$  es continua en  $x=e$

$$y' = \begin{cases} \frac{Lx-1}{(Lx)^2} & \text{si } x > e \\ 0 & \text{si } x < e \end{cases} \quad \begin{cases} f'_{-}(e) = 0 \\ f'_{+}(e) = 0 \end{cases} \text{ es derivable en } x=e$$

$$d) y = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ Lx + x & \text{si } 1 < x < e \\ x + 1 & \text{si } x \geq e \end{cases} ; y' = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 1 \\ 1/x + 1 & \text{si } 1 < x < e \\ 1 & \text{si } x > e \end{cases}$$

$y=Lx$  es continua y derivable en  $(1, e)$  por serlo en  $(0, \infty)$ , el resto de las funciones que componen  $f$  son derivables en todo  $\mathbb{R}$  por ser polinómicas. Por lo tanto los únicos problemas de derivabilidad pueden estar en  $x=1$  y  $x=e$

Derivabilidad en  $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^{-}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^{-}} x^2 - x + 1 = 1; \lim_{x \rightarrow 1^{+}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^{+}} Lx + x = 1; f(1) = 1 \Rightarrow f \text{ es continua en } x=1$$

$$f'_{-}(1) = 1; f'_{+}(1) = 2 \Rightarrow f \text{ no es derivable en } x=1$$

Derivabilidad en  $x=e$

$\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^-} (Lx + x) = 1 + e$ ;  $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^+} (x + 1) = e + 1$ ;  $f(e) = e + 1 \Rightarrow f$  es continua en  $x=e$   
 $f'_-(e) = 1/e + 1$ ;  $f'_+(e) = 1 \Rightarrow f$  no es derivable en  $x=e$   
 Por lo tanto  $f$  es derivable en todo  $\mathbb{R} - \{1, e\}$

$$e) y = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ Lx + e^{x-1} + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}; y' = \begin{cases} 2^x L2 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1/x + e^{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$y=Lx$  es continua y derivable en  $(1, \infty)$ , el resto de las funciones que componen  $f$  son derivables en todo  $\mathbb{R}$ , por lo tanto los únicos problemas de derivabilidad pueden estar en  $x=0$  y  $x=1$

Derivabilidad en  $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2^x = 1; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1; f(0) = 1 \Rightarrow f \text{ es continua en } x=0$$

$$f'_-(0) = 2^0 L2 = L2; f'_+(0) = 0 \Rightarrow f \text{ no es derivable en } x=0$$

Derivabilidad en  $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 1) = 2; \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (Lx + e^{x-1} + 1) = 2; f(1) = 2 \Rightarrow f \text{ es continua en } x=1$$

$$f'_-(1) = 2; f'_+(1) = 2 \Rightarrow f \text{ es derivable en } x=1. \text{ Por tanto } f \text{ es derivable en } \mathbb{R} - \{0\}$$

$$f) y = \begin{cases} \text{sen } x & \text{si } x \leq 0 \\ L(\cos x) + x & \text{si } 0 < x < \pi/2 \end{cases}; y' = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ \frac{-\text{sen } x}{\cos x} + 1 & \text{si } 0 < x < \pi/2 \end{cases}$$

En el intervalo  $(0, \pi/2)$  la función coseno es mayor que cero y por lo tanto  $y=L(\cos x)$  es continua y derivable en ese intervalo. El resto de las funciones que componen  $f$  son continuas y derivables en todo  $\mathbb{R}$ . Por lo tanto el único punto que puede tener problemas es  $x=0$

Derivabilidad en  $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \text{sen } x = 0; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} L(\cos x + x) = L1 = 0; f(0) = 0 \Rightarrow f \text{ es continua en } x=0$$

$$f'_-(0) = \cos 0 = 1; f'_+(0) = \frac{-\text{sen } 0}{\cos 0} + 1 = 1 \Rightarrow f \text{ es derivable en } x=0$$

$f$  es derivable en  $(-\infty, \pi/2)$

$$g) y = \begin{cases} e^{x^2} & \text{si } x \leq 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ Lx + 2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}; y' = \begin{cases} e^{x^2} \cdot 2x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1/x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La función  $y=Lx$  es derivable en  $(0, \infty)$  y por lo tanto lo es en el intervalo en que está definida, el resto de las funciones que componen  $f$  son derivables en todo  $\mathbb{R}$ . Por lo tanto los únicos puntos problemáticos son  $x=0$  y  $x=1$

Derivabilidad en  $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{x^2} = 1; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 1; f(0) = 1 \Rightarrow f \text{ es continua en } x=0$$

$$f'_-(0) = 0; f'_+(0) = 1 \Rightarrow f \text{ no es derivable en } x=0$$

Derivabilidad en  $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) = 2; \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (Lx + 2x) = 2; f(1) = 2 \Rightarrow f \text{ es continua en } x=1$$

$$f'_-(1) = 1; f'_+(1) = 3 \Rightarrow f \text{ no es derivable en } x=1$$

Luego  $f$  es derivable en  $\mathbb{R} - \{0, 1\}$

$$h) y = \begin{cases} \text{sen } x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \cos \text{ec } x & \text{si } \pi/2 < x < 2\pi \end{cases}; y' = \begin{cases} \cos x & \text{si } 0 < x < \pi/2 \\ -\cos \text{ec } x \cdot \text{ctg } x & \text{si } \pi/2 < x < 2\pi \end{cases}$$

La función  $\text{sen } x$  es derivable en  $\mathbb{R}$ . La función  $y=\text{cosec } x = \frac{1}{\text{sen } x}$  es continua y derivable en todos los puntos en los que  $\text{sen } x \neq 0$ . En el intervalo  $(\pi/2, 2\pi)$  esta función tiene un punto

de discontinuidad en  $x=\pi$  y por lo tanto en ese punto  $f$  no es continua y, en consecuencia, no es derivable. Hay además otro punto que puede ser problemático,  $x=\pi/2$ , al haber un cambio de función. Estudiamos la derivabilidad en ese punto.

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \operatorname{sen} x = 1; \lim_{x \rightarrow \pi/2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \operatorname{cosec} x = 1; f(\pi/2) = 1 \Rightarrow f \text{ es continua en } x=\pi/2$$

$$f'_-(\pi/2) = \cos \pi/2 = 0; f'_+(\pi/2) = -\operatorname{cosec} \pi/2 \cdot \operatorname{ctg} \pi/2 = 0 \Rightarrow f \text{ es derivable en } x=\pi/2$$

Por lo tanto  $f$  es derivable en  $(0, 2\pi) - \{\pi\}$

$$i) y = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ \operatorname{sen} x & \text{si } \pi < x < 2\pi \end{cases} \quad y' = \begin{cases} \sec^2 x & \text{si } 0 < x < \pi \\ \cos x & \text{si } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

La función  $y=\operatorname{tg} x$  tiene en el intervalo  $(0, \pi)$  un punto de discontinuidad en  $x=\pi/2$ , por lo tanto en ese punto  $f$  no es continua ni derivable. El otro punto en el que puede haber problema es  $x=\pi$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \operatorname{tg} x = 0; \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \operatorname{sen} x = 0; f(\pi) = 0 \Rightarrow f \text{ es continua en } x=\pi$$

$$f'_-(\pi) = \sec^2 \pi = 1; f'_+(\pi) = \cos \pi = -1 \Rightarrow f \text{ no es derivable en } x=\pi$$

$f$  es derivable en  $(0, 2\pi) - \{\pi/2, \pi\}$

$$j) y = \begin{cases} x^3 - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{3}{x-2} & \text{si } 0 < x < 3 \\ x^2 - 6x + 12 & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \quad ; y' = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x < 0 \\ \frac{-3}{(x-2)^2} & \text{si } 0 < x < 3 \\ 2x - 6 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

La función  $y=\frac{3}{x-2}$  es continua en  $\mathbb{R}-\{2\}$ , como en ese punto coincide con la fórmula de nuestra función,  $f$  no es continua ni derivable en  $x=2$ . El resto de las funciones que componen  $f$  son derivables en todo  $\mathbb{R}$ , debemos estudiar por lo tanto la derivabilidad en los puntos  $x=0$  y  $x=3$  en los que hay cambio de función

Derivabilidad en  $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^3 - 1) = -1; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{x-2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow f \text{ no es continua en } x=0 \text{ y por lo tanto no es derivable en ese punto.}$$

Derivabilidad en  $x=3$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3}{x-2} = 3; \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 6x + 12) = 3; f(3) = 3 \Rightarrow f \text{ es continua en } x=3$$

$$f'_-(3) = -3; f'_+(3) = 0 \Rightarrow f \text{ no es derivable en } x=3$$

$f$  es derivable en  $\mathbb{R}-\{0, 2, 3\}$

$$k) y = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x}{1-x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad y' = \begin{cases} 2x & \text{si } x > 0 \\ \frac{1-x+x}{(1-x)^2} & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La función  $y=\frac{x}{1-x}$  es derivable en todo  $\mathbb{R}-\{1\}$  y por lo tanto lo es en el intervalo en que está definida. La función  $y=x^2$  es derivable en  $\mathbb{R}$ . Por lo tanto el único punto problemático es  $x=0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1-x} = 0; f(0) = 0 \Rightarrow f \text{ es continua en } x=0$$

$$f'_-(0) = 0; f'_+(0) = 1 \Rightarrow f \text{ no es derivable en } x=0. \text{ Por tanto } f \text{ es derivable en } \mathbb{R}-\{0\}$$

$$l) \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \cos x & \text{si } 0 < x < \pi/2 \\ L(\operatorname{sen} x) & \text{si } \pi/2 \leq x < \pi \end{cases} \quad y' = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ -\operatorname{sen} x & \text{si } 0 < x < \pi/2 \\ \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} & \text{si } \pi/2 < x < \pi \end{cases}$$

La función  $y=L(\text{sen}x)$  es derivable en  $(\pi/2, \pi)$  al ser el  $\text{sen}x$  positivo en dicho intervalo. El resto de las funciones que componen  $f$  son derivables en todo  $\mathbb{R}$ . Por lo tanto los únicos puntos que pueden tener problemas son  $x=0$  y  $x=\pi/2$

Derivabilidad en  $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1; f(0) = 1 \Rightarrow f \text{ es continua en } x=0$$

$$f'_-(0) = e^0 = 1; f'_+(0) = -\text{sen}0 = 0 \Rightarrow f \text{ no es derivable en } x=0$$

Derivabilidad en  $x=\pi/2$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \cos x = 0; \lim_{x \rightarrow \pi/2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi/2^+} L(\text{sen}x) = L1 = 0; f(\pi/2) = 0 \Rightarrow f \text{ es continua en } x=0$$

$$f'_-(\pi/2) = -\text{sen}\pi/2 = -1; f'_+(\pi/2) = 0 \Rightarrow f \text{ no es derivable en } x=\pi/2$$

$f$  es derivable en  $(-\infty, \pi) - \{0, \pi/2\}$

$$M) y = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ \frac{x^2-3}{2} & \text{si } -1 < x \leq 0 \end{cases} \quad \text{La función } y=1/x \text{ es derivable en } \mathbb{R} - \{0\} \text{ y por tanto lo es en el}$$

intervalo en que está definida, La función  $y=\frac{x^2-3}{2}$  es derivable en  $\mathbb{R}$  y por lo tanto lo es en  $(-1, 0)$ . En consecuencia el único punto que puede tener problema es  $x=-1$

Derivabilidad en  $x=-1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} 1/x = -1; \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2-3}{2} = -1; f(-1) = -1 \Rightarrow f \text{ es continua en } x=-1$$

$$Y' = \begin{cases} -1/x^2 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases} \quad f'_-(-1) = -1; f'_+(-1) = -1 \Rightarrow f \text{ es derivable en } x=-1 \text{ Por tanto } f \text{ es}$$

derivable en  $(-\infty, 0)$

39. Determinar el valor de los parámetros  $a, b, c$  y  $d$  de modo que las siguientes funciones sean derivables en todo  $\mathbb{R}$ :

$$a) y = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{si } x \geq 0 \\ ax + b & \text{si } x < 0 \end{cases}; y' = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x > 0 \\ a & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Dado que las funciones que componen  $f$  son derivables en todo  $\mathbb{R}$  necesitamos únicamente garantizar la derivabilidad en  $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 + 1 = 1; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ax + b = b; f(0) = 1 \Rightarrow f \text{ es continua en } x=0 \text{ si } b=1$$

$$f'_-(0) = 0; f'_+(0) = a \Rightarrow a=0$$

$F$  es derivable en  $\mathbb{R}$  si  $a=0$  y  $b=1$

$$b) y = \begin{cases} a \text{sen}x & \text{si } x < 0 \\ bx & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ Lx + c & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad y' = \begin{cases} a \cos x & \text{si } x < 0 \\ b & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1/x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$y=Lx$  es derivable si  $x>0$ , las restantes funciones que componen  $f$  son derivables en todo  $\mathbb{R}$ .

Entonces  $f$  será derivable en  $\mathbb{R}$  si lo es en  $x=0$  y en  $x=1$

Derivabilidad en  $x=0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} a \text{sen}x = 0; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} bx = 0; f(0) = 0 \Rightarrow f \text{ es continua en } x=0 \forall a \text{ y } b \in \mathbb{R}$$

$$f'_-(0) = a \cdot \cos 0 = a; f'_+(0) = b \Rightarrow a = b \text{ para que } f \text{ sea derivable en } x=0$$

Derivabilidad en  $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} bx = b; \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} Lx + c = c; f(1) = b \Rightarrow f \text{ es continua en } x=1 \text{ si } b=c$$

$$f'_-(1) = b; f'_+(1) = 1 \Rightarrow b=1$$

$$\text{Reuniendo todas las condiciones tenemos } \begin{cases} a = b \\ b = c \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{si } a=b=c=1 \text{ } f \text{ es derivable en todo } \mathbb{R}$$

$$c) \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ ax^3 + bx^2 + cx + d & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ \cos(x-2) & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad y' = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 3ax^2 + 2bx + c & \text{si } 0 < x < 2 \\ -\text{sen}(x-2) & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Dado que todas las funciones que intervienen son derivables en  $\mathbb{R}$ , f lo será si es derivable en  $x=0$  y  $x=2$

Derivabilidad en  $x=0$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ax^3 + bx^2 + cx + d = d$ ;  $f(0) = d \Rightarrow d=1$  para que f sea continua en  $x=0$ ;  $f'_-(0) = e^0 = 1$ ;  $f'_+(0) = c \Rightarrow c=1$  para que sea derivable

Derivabilidad en  $x=2$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax^3 + bx^2 + cx + d) = 8a + 4b + 2c + d = f(2)$ ;  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \cos(x-2) = 1$ ;  $\Rightarrow 8a + 4b + 2c + d = 1$  para que f sea continua en  $x=2$   $f'_-(2) = 12a + 4b + c$ ;  $f'_+(2) = -\text{sen}0 = 0 \Rightarrow$

$$12a + 4b + c = 0. \text{ Reuniendo todas las condiciones tenemos: } \begin{cases} d = 1 \\ c = 1 \\ 8a + 4b + 2c + d = 1 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \quad y$$

resolviendo:  $a=1/4$ ,  $b=-1$ ,  $c=1$ ,  $d=1$  para que f sea derivable en  $\mathbb{R}$

$$d) y = \begin{cases} L(e + \text{sen}x) & \text{si } x < 0 \\ x^3 + ax + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad y' = \begin{cases} \frac{\cos x}{(e + \text{sen}x)} & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 + a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Dado que  $e + \text{sen}x$  es siempre positivo, por estar  $\text{sen}x$  comprendido entre -1 y 1, la función  $y=L(e + \text{sen}x)$  es derivable para todo  $x < 0$ ; la otra función que compone f es un polinomio y, por lo tanto, derivable para todo  $x > 0$ . Así pues el único punto en el que f puede no ser derivable es en  $x=0$ . Estudiamos la derivabilidad en ese punto:

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} L(e + \text{sen}x) = Le = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 + ax + b) = b = f(0) \Rightarrow b=1$   
 $f'_-(0) = 1/e$ ;  $f'_+(0) = a \Rightarrow a = 1/e$ ; f es derivable en  $\mathbb{R}$  si  $b=1$  y  $a=1/e$

$$E) y = \begin{cases} ax & \text{si } x < 1 \\ \frac{x^2 - b}{2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad y' = \begin{cases} a & \text{si } x < 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{Dado que las funciones que componen f son}$$

derivables en todo  $\mathbb{R}$  el único punto problemático es  $x=1$ , estudiamos la derivabilidad en ese punto:  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} ax = a$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - b}{2} = \frac{1-b}{2} = f(1) \Rightarrow a = \frac{1-b}{2}$

$f'_-(1) = a$ ;  $f'_+(1) = 1 \Rightarrow a = 1$ ; y despejando  $b=-1$  f es derivable en  $\mathbb{R}$  si  $b=-1$  y  $a=1$

$$F) y = \begin{cases} -x^2 + ax & \text{si } -1 \leq x < 3 \\ bx + 3 & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \end{cases} \quad y' = \begin{cases} -2x + a & \text{si } -1 < x < 3 \\ b & \text{si } 3 < x < 5 \end{cases} \quad \text{La función no puede ser derivable en } \mathbb{R}$$

ya que su dominio es  $[-1, 5]$ , por tanto solo podríamos estudiar los valores de a y b que la hagan derivable en el intervalo  $(-1, 5)$ . Al estar compuesta por funciones polinómicas el único punto que podría tener problemas es  $x=3$ , estudiamos la derivabilidad en este punto:

$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} -x^2 + ax = -9 + 3a$ ;  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} bx + 3 = 3b + 3 = f(3) \Rightarrow -9 + 3a = 3b + 3$

$f'_-(3) = -6 + a$ ;  $f'_+(3) = b \Rightarrow -6 + a = b$ ; El sistema obtenido no tiene solución por lo que no hay ningún valor de a y b que hagan que la función sea derivable en  $x=3$



g)  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$   $f'(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x < 0 \\ -2x + a & \text{si } x > 0 \end{cases}$  La función está compuesta por dos polinómicas y por lo tanto será derivable en  $\mathbb{R} - \{0\}$ , estudiamos la derivabilidad en este punto

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + 4x + 3 = 3 = f(0); \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x^2 + ax + b = b \Rightarrow b = 3$$

$$f'_-(0) = 4; f'_+(0) = a \Rightarrow a = 4; f \text{ es derivable en } \mathbb{R} \text{ si } b = 3 \text{ y } a = 4$$

h)  $y = \begin{cases} x^3 - x & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$   $y' = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x > 0 \end{cases}$  La función está compuesta por dos polinómicas y por lo tanto será derivable en  $\mathbb{R} - \{0\}$ , estudiamos la derivabilidad en este punto

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 - x = 0; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ax + b = b = f(0) \Rightarrow b = 0$$

$$f'_-(0) = -1; f'_+(0) = a \Rightarrow a = -1$$

i)  $y = \begin{cases} 3 - ax^2 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{ax} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$   $y' = \begin{cases} -2ax & \text{si } x < 1 \\ \frac{-2a}{(ax)^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$  la función está compuesta por un polinomio, derivable en todo  $\mathbb{R}$  y por la función  $y = 2/ax$  derivable en  $\mathbb{R} - \{0\}$  y por tanto lo es donde está definida. En consecuencia el único punto que puede tener problema es  $x = 1$ , estudiamos la derivabilidad

$$\text{en este punto: } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 3 - ax^2 = 3 - a; \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{ax} = \frac{2}{a} = f(1) \Rightarrow 3 - a = \frac{2}{a} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$f'_-(1) = -2a; f'_+(1) = \frac{-2}{a} \Rightarrow -2a = \frac{-2}{a} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$
 Como es necesario que se cumplan ambas condiciones es necesario que  $a = 1$  para que  $f$  sea derivable en  $\mathbb{R}$

ambas condiciones es necesario que  $a = 1$  para que  $f$  sea derivable en  $\mathbb{R}$

$$j) y = \begin{cases} bx^2 + ax & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{a}{x} & \text{si } -1 < x < 1 \\ \frac{x^2 + ax + 1}{x + 1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$
  $y' = \begin{cases} 2bx + a & \text{si } x < -1 \\ -a/x^2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ \frac{x^2 + 2x + a - 1}{(x + 1)^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$  La función está compuesta por una polinómica, derivable en  $\mathbb{R}$ , la función  $y = a/x$  derivable en  $\mathbb{R} - \{0\}$  y la función  $y = \frac{x^2 + ax + 1}{x + 1}$

que es derivable en  $\mathbb{R} - \{-1\}$  y por lo tanto donde está definida. Dado que en el intervalo  $[-1, 1]$  la función que tenemos es  $y = a/x$  que no es derivable en  $x = 0$  por tanto nuestra función no puede ser derivable en todo  $\mathbb{R}$  para ningún valor de  $a$  y  $b$ . Buscaremos los valores que la hagan derivable en  $\mathbb{R} - \{0\}$  para lo cual tenemos que estudiar los puntos  $x = -1$  y  $x = 1$

Derivabilidad en  $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} bx^2 + ax = b - a = f(-1); \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{a}{x} = -a \Rightarrow b - a = -a \Rightarrow b = 0$$

$$f'_-(-1) = -2b + a; f'_+(-1) = -a \Rightarrow -2b + a = -a \text{ y dado que } b = 0 \text{ se sigue } a = 0$$

Veamos si para esos valores de  $a$  y  $b$  la función es derivable en  $x = 1$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} a/x = a; \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + ax + 1}{x + 1} = \frac{2 + a}{2} = f(1)$  para  $a = 0$  esos dos límites no serían iguales y la función no sería continua en  $x = 1$  y por tanto no sería derivable. Así pues no hay ningún valor de  $a$  y  $b$  que haga al mismo tiempo que la función sea derivable en  $x = 1$  y  $x = -1$

$$k) y = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{ax + b} & \text{si } 0 < x < 2 \\ \frac{-x}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$
  $Y' = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ \frac{a}{2\sqrt{ax + b}} & \text{si } 0 < x < 2 \\ \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \text{si } x > 2 \end{cases}$  las funciones  $y = x^2 + 2$  e  $y = \frac{-x}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}$

son derivables en todo  $\mathbb{R}$  por ser polinómicas, la función  $y = \sqrt{ax + b}$  será derivable en su dominio, hallaremos  $a$  y  $b$  para que la función sea derivable en  $x = 0$  y  $x = 2$  y deberemos comprobar después que para esos valores  $ax + b$  sea  $\geq 0$  en el intervalo  $[0, 2]$ .

Derivabilidad en  $x=0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + 2 = 2 = f(0); \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{ax+b} = \sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{b} = 2 \Rightarrow b = 4$$

$$f'_-(0) = 0; f'_+(0) = \frac{a}{2\sqrt{b}} = \frac{a}{4} \Rightarrow a = 0; f \text{ es derivable en } x=0 \text{ si } a=0 \text{ y } b=4$$

Veamos si con esos valores la función resulta derivable en  $x=2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{ax+b} = \sqrt{2a+b} \text{ para } a=0 \text{ y } b=4 \text{ quedaría } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \sqrt{2a+b} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \neq 2 \text{ por lo tanto para esos valores de } a \text{ y } b \text{ la}$$

función no sería continua en  $x=2$ , en consecuencia no hay ningún valor que haga que la función sea derivable en todo  $\mathbb{R}$

40. Si  $f(x)$  es creciente y derivable en  $\mathbb{R}$   $f'(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto  $f'(x)$  no puede ser negativa pero si igual a cero. Por ejemplo: la función  $y=x^3$  es creciente en  $\mathbb{R}$ , sin embargo  $f'(0)=0$  al ser  $y'=3x^2$

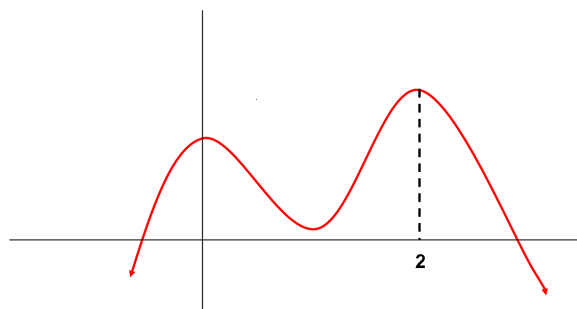
41. La función  $y=\text{sen}x$  tiene un máximo relativo en  $x=\pi/2$  y un mínimo relativo en  $x=3\pi/2$ . Al ser periódica de período  $2\pi$  los puntos  $x=\pi/2 + 2k\pi$  serán máximos  $\forall k \in \mathbb{Z}$  y los puntos  $x=3\pi/2 + 2k\pi$  serán mínimos  $\forall k \in \mathbb{Z}$  por lo tanto tiene infinitos máximos y mínimos relativos.

42. Por definición  $x=x_0$  es un extremo relativo si:

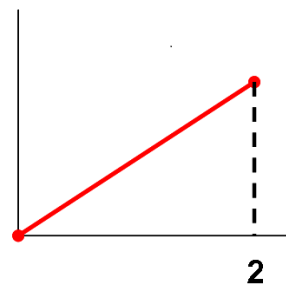
$$\exists E_{x_0} \text{ tq } \forall x \in E_{x_0} \ x \neq x_0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) > f(x_0) \text{ (mínimo)} \\ f(x) < f(x_0) \text{ (máximo)} \end{cases}$$

Sin embargo,  $x=x_0$  es un extremo absoluto si  $\forall x \in D(f) \begin{cases} f(x) > f(x_0) \text{ (mínimo absoluto)} \\ f(x) < f(x_0) \text{ (máximo absoluto)} \end{cases}$

Por ejemplo: en la función representada en la gráfica  $x=0$  es un máximo relativo pero no absoluto;  $x=2$  es un máximo absoluto y relativo



En la siguiente gráfica  $x=2$  es un máximo absoluto pero no relativo



43. Falso, si  $f'(c)=0$  en  $x=c$  la función puede ser creciente, decreciente o tener un extremo relativo. Por ejemplo la función  $y=x^2$  tiene un mínimo relativo en  $x=0$  y  $f'(0)=0$ ; la función  $y=-x^2$  tiene un máximo en  $x=0$  y  $f'(0)=0$ ; la función  $y=x^3$  es creciente en  $\mathbb{R}$  y por tanto creciente en  $x=0$  y  $f'(0)=0$ ; Por ultimo, la función  $y=-x^3$  es decreciente en todo  $\mathbb{R}$  y por lo tanto en  $x=0$  y  $f'(0)=0$

44. a) Falso, si  $f$  es creciente en  $x=x_0$  la derivada en dicho punto puede no existir, ser cero o ser positiva. Serviría como ejemplo la función  $y=x^3$  vista en el ejemplo anterior

b) Verdadero (ver teoría)

45. a) Si  $f'(a)=0$  no podemos afirmar nada del comportamiento de la función en  $x=a$ , pudiendo ocurrir que la función en  $x=a$  sea creciente, decreciente o posea un extremo relativo.

b) Sabemos que  $f'(2)<0$ , es decir  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} < 0 \Rightarrow$  que  $f(2+h)-f(2)$  y  $h$  deben tener distinto signo. Por tanto si  $h<0 \Rightarrow f(2+h)-f(2)>0$ ; si  $h>0 \Rightarrow f(2+h)-f(2)<0$ .

46. Si  $f'(a)=f''(a)=0$  la función puede presentar en  $x=a$  tanto un extremo relativo como un punto de inflexión

Ejemplo 1:  $y=x^3$ ;  $y'=3x^2$ ;  $y''=6x$ ;  $y'''=6$

$f'(0)=f''(0)=0$ ,  $f'''(0)=6 \neq 0 \Rightarrow$  en  $x=0$  la función posee un punto de inflexión

Ejemplo 2:  $y=x^4$ ;  $y'=4x^3$ ;  $y''=12x^2$ ;  $y'''=24x$ ;  $y^{iv}=24$

$f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0$ ;  $f^{iv}(0)=24>0 \Rightarrow$  en  $x=0$  la función tiene un mínimo relativo

47. Los posibles extremos relativos están entre los puntos cuya derivada sea igual a cero, en nuestro caso esos puntos son  $x=1$  y  $x=3$ . Sin embargo, el hecho de que  $f'(x)=0$  no garantiza la existencia de extremo. Analicemos la función derivada en un entorno de dichos puntos:

Para  $x=1$  observamos que a la izd del punto la derivada es positiva y por lo tanto  $f$  es creciente antes de  $x=1$ , a la derecha de  $x=1$  la derivada continúa siendo positiva por lo que  $f$  es también creciente después de  $x=1$ . Es decir en un entorno de  $x=1$  la función es creciente por lo que en  $x=1$  también lo es y no posee extremo relativo en dicho punto

Si hacemos lo mismo para  $x=3$  observamos que a la izda de ese punto la derivada es positiva por lo que  $f$  es creciente, sin embargo a la derecha de  $x=3$  la derivada es negativa es decir que  $f$  es decreciente. Tenemos así que en  $x=3$  la función pasa de ser creciente a ser decreciente por lo que  $x=3$  es un máximo relativo.

En cuanto a los puntos de inflexión se encontrarán entre los puntos cuya segunda derivada es cero. Es decir aquellos en los que  $f'$  una recta tangente horizontal. Observando la gráfica de  $f'$  vemos que eso ocurre en  $x=7/3$  y en  $x=1$  y por tanto  $f''(7/3)=0$  y  $f''(1)=0$ , por lo que ambos pueden ser puntos de inflexión. Pero que la derivada segunda sea cero es una condición necesaria para que haya un punto de inflexión, pero no es suficiente. Para garantizarlo estudiamos la función en un entorno de dichos puntos. Vemos que a la izquierda de  $x=1$  la derivada es decreciente, por tanto  $f$  es cóncava; mientras que a la derecha de  $x=1$  la derivada es creciente, por lo que  $f$  es convexa. En  $x=1$  hay por lo tanto un cambio en la concavidad de la función, es decir  $x=1$  es un punto de inflexión. En cuanto a  $x=7/3$ , vemos que a la izquierda de  $x=7/3$  la derivada es creciente, por lo que  $f$  es convexa; mientras que a la derecha de  $x=7/3$  la derivada es decreciente, y por tanto  $f$  es cóncava. En  $x=7/3$  hay por lo tanto un cambio en la concavidad de la función, es decir  $x=7/3$  es también un punto de inflexión.

48. Una función polinómica de 2º grado es de la forma  $y=ax^2+bx+c$  con  $a \neq 0$

Hallamos su derivada segunda para estudiar su concavidad y convexidad:  $y'=2ax+b$ ;  $y''=2a$

Si  $a>0$   $y''>0 \forall x \in R$  luego la función es convexa en todo  $R$

Si  $a<0$   $y''<0 \forall x \in R$  luego la función es cóncava en todo  $R$

49. Una función polinómica de tercer grado es de la forma  $y=ax^3+bx^2+cx+d$  Para garantizar que tiene un punto de inflexión debemos encontrar un punto que anule la derivada segunda y ver que en dicho punto la derivada tercera es distinta de cero.

$y'=3ax^2+2bx+c$ ;  $y''=6ax+2b=0 \Rightarrow x = \frac{-2b}{6a}$  Esta ecuación tiene solución para cualquier valor de  $a$  y  $b$  excepto para  $a=0$  pero  $a$  es distinto de cero al ser la función de tercer grado. Para ese valor de  $x$  hay un punto de inflexión ya que  $f'''(x)=6a \neq 0$

En una función polinómica de 4º grado no ocurre lo mismo ya que  $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ ;

$y'=4ax^3+3bx^2+2cx+d$ ;  $y''=12ax^2+6bx+2c$  que, al ser una ecuación de 2º grado, no siempre tiene solución. Por lo que no se puede garantizar la existencia de puntos de inflexión.

50. En  $x=1$  la derivada vale cero. De ello no podemos deducir nada acerca del comportamiento de la función, por lo tanto estudiamos la derivada en un entorno de  $x=1$ . Si  $x<1$   $f'(x)>0 \Rightarrow f$  es creciente; si  $x>1$   $f'(x)<0 \Rightarrow f$  es decreciente, por lo tanto en  $x=1$  la función tiene un máximo.

En  $x=2$   $f'(2)<0$  lo que significa que  $f$  es creciente en ese punto y, por lo tanto, no posee extremos relativos en  $x=2$ . Estudiando la función derivada en un entorno de  $x=2$  observamos que la función derivada tiene un mínimo en  $x=2$ , es decir pasa de ser decreciente a ser creciente en dicho punto, Esto significa que la función  $f$  pasa de ser cóncava a ser convexa, es decir  $f$  posee en  $x=2$  un punto de inflexión.

51. La función  $y=\text{sen}x$  tiene un punto de inflexión en  $x=\pi$  ya que  $f''(\pi) = 0$  y  $f'''(\pi) \neq 0$ . Al ser una función periódica de período  $2\pi$  su gráfica se repite indefinidamente y los puntos  $x=\pi+2k\pi$  Son puntos de inflexión  $\forall k \in \mathbb{Z}$

52. 23.  $y=ax^2+bx+c$ ;  $y'=2ax+b$

Pasa por  $(0,-3) \Rightarrow f(0) = -3 \Rightarrow c = -3$

La tangente en  $x=0$  es paralela a la recta  $y=2x \Rightarrow f'(0) = 2 \Rightarrow b = 2$

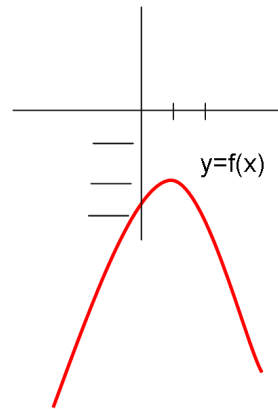
Tiene un máximo en  $x=1 \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \Rightarrow 2a + 2 = 0 \Rightarrow a = -1$ .

En consecuencia la función es  $y=-x^2+2x-3$

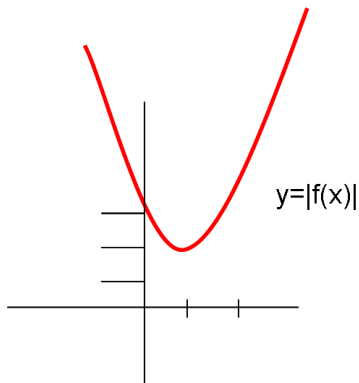
Para representar el valor absoluto de  $f(x)$  vamos a representar en primer lugar  $f(x)$

Es una parábola de vértice  $(1,-2)$  ( $x=-b/2a=-1$ ;  $y=f(-1)=-2$ )

No tiene raíces ya que la ecuación  $-x^2+2x-3=0$  no tiene solución. Pasa por  $(0,-3)$  y por  $(2,-3)$ . Por tanto su gráfica será la siguiente:



A partir de ella hacemos la de su valor absoluto que será



53.  $y=x^3-6x^2+16x-11$ . En su punto de inflexión ha de verificarse que la derivada segunda sea cero y la tercera sea distinta de cero.  $y'=3x^2-12x+16$ ;  $y''=6x-12=0 \Rightarrow x = 2$ ;  $y'''=6 \neq 0$  por lo que el punto de inflexión es  $x=2$ . Tenemos que calcular la recta tangente en ese punto:  $f(2)=2^3-6 \cdot 2^2+16 \cdot 2-11=5$ ;  $m=f'(2)=3 \cdot 2^2-12 \cdot 2+16=4$ .

La recta tangente será:  $4(x-2)=y-5$

54. Que  $x=1$  sea un punto de inflexión implica que  $f''(1)=0$ . Por otra parte al ser en ese punto la recta tangente horizontal ha de verificarse que  $f'(1)=0$ .  $f(x)=x^3+ax^2+bx+7$ ;

$f'(x) = 3x^2+2ax+b$ ;  $f''(x)=6x+2a$ . Entonces  $f'(1)=3+2a+b=0$ ,  $f''(1)=6+2a=0$ , resolviendo el sistema obtenemos que  $a=-3$  y  $b=3$