

MATRICES

1. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular A^2 , A^3 y A^{428} .

$$\text{Solución: } A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, A^3 = I, A^{428} = A^2$$

2. Dada la matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- Calcular la matriz $(A - I)^2$.
- Haciendo uso del apartado anterior hallar A^4 .

Solución:

3. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, ¿qué relación deben guardar las constantes a y b para que se verifique la igualdad $A^2 = A$?

Solución: $a=0, b=1$ / $a=1, b=0$

4. Hallar $X^2 + Y^2$, siendo X e Y las soluciones del sistema matricial siguiente:

$$\begin{aligned} 2X + Y &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ X - Y &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Solución: } X^2 + Y^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Dadas las matrices A y B de orden 3x3, decir si el siguiente razonamiento es correcto o incorrecto. Si es correcto indicar en cada paso la propiedad utilizada y si es incorrecto señalar el error cometido:

$$(A+B) \cdot (A-B) = A \cdot A - A \cdot B + B \cdot A - B \cdot B = A^2 - A \cdot B + B \cdot A + B^2 = A^2 - B^2$$

6. Siendo A y B dos matrices 2x2, resolver el sistema matricial

$$3A - 5B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-A + 3B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: $A = \begin{pmatrix} \frac{13}{4} & \frac{14}{4} \\ \frac{39}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & \frac{10}{4} \\ \frac{17}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

7. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- Demostrar que $A^2 = 2A - I$, donde I es la matriz identidad 2x2.
- Expresar A^3 y A^4 en función de A.
- Calcular A^{100} .

$$A^3 = 3A - I$$

Solución: $A^4 = 4A - I$

$$A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -100 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Sean P y Q matrices cuadradas de orden n, ¿Es cierta la siguiente igualdad?

$$(P+Q) \cdot (P-Q) = P^2 - Q^2.$$

9. Calcula las matrices cuadradas X que verifiquen $PX=XP$, siendo $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$