1º) Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\2&-2&0\\1&-1&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-2&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&-2&0\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&-1&2\end{pmatrix}$$

Calcular si es posible:

a) $$A+B=\begin{pmatrix}-1&1&0\\2&-2&0\\1&-1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-1&1\\-2&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+0&1+(-1)&0+1\\2+(-2)&-2+0&0+1\\1+0&-1+0&0+1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-2&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

b) $$C+D=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&-2&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2&0\\3&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&5&0\\3&-3&2\end{pmatrix}$$

c) $$4A-2D=4\cdot\begin{pmatrix}-1&1&0\\2&-2&0\\1&-1&0\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}1&2&0\\3&-1&2\end{pmatrix}\ \textit{no se puede hacer}$$

d) $$2C-3D=2\cdot\begin{pmatrix}1&3&0\\0&-2&0\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}1&2&0\\3&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-3&6-6&0-0\\0-9&-4+3&0-6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1&0&0\\-9&-1&-6\end{pmatrix}$$

e) $$B\cdot C=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-2&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3&0\\0&-2&0\end{pmatrix}=\{(3x3)\cdot(2x3)\}\ \textit{no se puede hacer}$$

f) $$C\cdot B=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&-2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-1&1\\-2&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}=$$

$$a_{11}=\begin{pmatrix}1&3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}=1\cdot0+3\cdot(-2)+0\cdot0=-6$$

$$a_{12}=\begin{pmatrix}1&3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}=1\cdot(-1)+3\cdot0+0\cdot0=-1$$

$$a_{13}=\begin{pmatrix}1&3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=4,\qquad a_{21}=\begin{pmatrix}0&-2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}=4$$

$$a_{22}=\begin{pmatrix}0&-2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}=0\qquad a_{23}=\begin{pmatrix}0&-2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=-2$$

$$=\begin{pmatrix}-6&-1&4\\4&0&-2\end{pmatrix}$$

g) $A\cdot B-B\cdot A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\2&-2&0\\1&-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-1&1\\-2&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-1&1\\-2&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&1&0\\2&-2&0\\1&-1&0\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}-2&1&0\\4&-2&0\\2&-1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&1&0\\3&-3&0\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

h) $A^3=A\cdot A\cdot A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\2&-2&0\\1&-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&1&0\\2&-2&0\\1&-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&1&0\\2&-2&0\\1&-1&0\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}3&-3&0\\-6&6&0\\-3&3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&1&0\\2&-2&0\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9&9&0\\18&-18&0\\9&-9&0\end{pmatrix}$$

i) $(C\cdot D)^t=\left(C_{(2\times 3)}\cdot D_{(2\times 3)}\right)^t$ *no se puede multiplicar*

j) $(A+B)\cdot(A-B)=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-2&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}-1&1&0\\2&-2&0\\1&-1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-1&1\\-2&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\right]=$

$$=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-2&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&2&-1\\4&-2&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3&0\\-7&3&1\\-4&3&-1\end{pmatrix}$$

k) $A^2-B^2=\left[\begin{pmatrix}-1&1&0\\2&-2&0\\1&-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&1&0\\2&-2&0\\1&-1&0\end{pmatrix}\right]-\left[\begin{pmatrix}0&-1&1\\-2&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-1&1\\-2&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\right]=$

$$=\begin{pmatrix}3&-3&0\\-6&6&0\\-3&3&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3&0\\-6&4&1\\-3&3&-1\end{pmatrix}$$

l) $(A-B)^2=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\4&-2&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&2&-1\\4&-2&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&-5&0\\-13&13&-3\\-4&3&1\end{pmatrix}$

2º) Calcular los siguientes determinantes:

a) $A=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}=[3\cdot 0\cdot 3+2\cdot 1\cdot 0+(-1)\cdot 2\cdot(-1)]-$
$-[(-1)\cdot 0\cdot 0+2\cdot(-1)\cdot 3+3\cdot 2\cdot 1]=2+6-6=2$

b) $B=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=[1\cdot 1\cdot 1+0\cdot 0\cdot 0+1\cdot 1\cdot 1]-[0\cdot 0\cdot 1+1\cdot 0\cdot 1+1\cdot 0\cdot 1]=2$

c) $C=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=(1+8+27)-(6+6+6)=36-18=18$

d) $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=(desarrollando\ por\ la\ cuarta\ fila)=$

$$=(-1)^{4+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}+(-1)^{4+3}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$-(1+1+1+1)-(-1+1+1+1-1-1)=-4$$

e) $E=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\{(C_1'=C_1+C_2+C_3+C_4)\}=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=$

$$=\begin{Bmatrix} F_2'=F_2-F_1 \\ F_3'=F_3-F_1 \\ F_4'=F_4-F_1 \end{Bmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=(desarrollando\ por\ la\ primera\ columna)=(-1)^{1+1}\cdot 5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=5$$

3º) Calcular, si es posible, la inversa de las siguientes matrices:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $\quad |A|=3\neq 0 \quad$ $A^t=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$

$$Adj(A^t)=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3 & 1/3 & -1\\ -2/3 & 1/3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1, \quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1, \quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-3$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-2, \quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1, \quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=0$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0, \quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{vmatrix}=0, \quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=3$$

b) $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ -1 & -2 & 3\end{pmatrix}$ $\quad |B|=0 \implies \nexists B^{-1}$

c) $C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$

$$|C|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{vmatrix}=\left\{\left(C_1'=C_1-\frac{1}{2}C_2\right)\right\}=\begin{vmatrix}1/2 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 3 & 3\\ 0 & 2 & 3 & 4\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 3\\ 2 & 3 & 4\end{vmatrix}=1\neq 0$$

$$C^t=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}, \quad C^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

d) $D=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$ $\quad |D|=4, \quad D^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3/2 & -1/2\\ -3/2 & 1 & 5/4 & -1/4\\ -5/2 & 1 & 9/4 & -1/4\\ 1/2 & 0 & -1/4 & 1/4\end{pmatrix}$

4º) Calcular el rango de las siguientes matrices determinando un menor principal

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ matriz de orden $(3 \times 4)$. Cogemos un menor de orden 2 distinto de cero ( puede ser cualquiera distinto de cero),

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ nos sirve y lo orlamos

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$, no nos sirve asi que orlamos con la cuarta columna $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$ luego todos los menores posibles de orden 3 son cero con lo cual $R(A) = 2$ (que es el orden del mayor menor distinto de cero).

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matriz de orden $(4 \times 3)$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ Orlamos y obtenemos

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0 \Longrightarrow R(B) = 3$$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matriz cuadrada de orden 4, luego calculamos directamente el determinante por si es distinto de cero y ya tendríamos el rango.

$$|C| = (-1)^{2+4} \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4} \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 20$$

$$R(C) = 4$$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matriz de orden $(4 \times 5)$

Cogemos entonces un menor de orden 2 distinto de cero

1. $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ orlamos con la tercera fila y la primera columna

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a partir de este menor de orden 3 seguimos Orlando con la cuarta fila y la segunda columna

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$ = 0 por lo tanto no nos vale, seguimos orlando con la cuarta fila y la quinta columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego $R(D) = 4$ pues es el mayor menor que podemos considerar.

5º) Estudiar la resolubilidad de los siguientes sistemas y, si es posible, determinar sus soluciones:

a) $\begin{cases} 2y - z = 1 \\ 3x - 2z = 11 \\ y + z = 6 \\ 2x + y - z = 9 \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad y \quad$ $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \end{array}\right)$

Estudiamos los rangos de $A$ y de $\bar{A}$

$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$ orlamos $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$ luego $R(A) = 3$

$|\bar{A}| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \end{vmatrix} = 17 \neq 0$ luego $R(\bar{A}) = 4$

$R(A) \neq R(\bar{A}) \;\; \Longrightarrow Sistema\ incompatible\ S.I.$ No hay solución.

b) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y = 4 \\ x + 2z = 2 \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad y \quad$ $\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$

$|A| = 0 \;\; \Longrightarrow el\ rango\ no\ es\ 3,\ \ veremos\ si\ es\ 2,\ \exists \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \;\; \Longrightarrow R(A) = 2$

Para ver el rango de $\bar{A}$ podemos partir del mismo menor de orden 2 distinto de cero

$orlamos \;\; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \;\; y \;\; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$ el otro menor de orden 3 ya lo hemos estudiado al calcular $|A|$, luego tenemos que concluir $R(\bar{A}) = 2$, por lo tanto
$R(A) = 2 = R(\bar{A}) < número\ de\ incognitas \Longrightarrow Sistema\ compatible\ indeterminado\ S.C.I. \Longrightarrow$ $\infty\ soluciones, eliminamos\ la\ tercera\ ecuación\ y\ tomamos\ como\ parámetro\ libre\ z$

$$\begin{cases} x + y = 3 - z & (1) \\ x + 2y = 4 & (2) \end{cases}$$

Observamos que hemos dejado en el primer miembro de las ecuaciones las variables que me proporcionan el menor principal que hemos utilizado para el cálculo del rango.

Hacemos $z = \alpha$ con lo cual el sistema queda

$\begin{cases} x + y = 3 - \alpha & (1) \\ x + 2y = 4 & (2) \end{cases}$ hacemos $(2) - (1) \Longrightarrow y = 4 - (3 - \alpha) = 1 + \alpha$ y por lo tanto tenemos

despejando en $(1)$ $\;\; x = 3 - \alpha - (1 + \alpha) = 2 - 2\alpha$

Solución: $\{(2 - 2\alpha, 1 + \alpha, \alpha) / \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

c) $\begin{cases} x+y+z=2 & (1) \\ x-y-z=-2 & (2) \\ 2x+2y-z=5 & (3) \end{cases}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 5 \end{array}\right)$

$|A|=6 \Longrightarrow R(A)=3,$ utilizando el mismo menor de orden 3 obtenemos que $R(\bar{A})=3$ por lo tanto el sistema es $compatible\ determinado\ S.C.D.$ y tiene una única solución.

$$(1)+(2) \Longrightarrow 2x=0 \Longrightarrow \boldsymbol{x=0}$$
$$(3)-(2) \Longrightarrow 3y=7 \Longrightarrow \boldsymbol{y={}^{7}/_{3}}$$
$$Sustituyendo\ en\ (1)\ los\ valores\ de\ x\ e\ y \Rightarrow z=2-x-y=2-{}^{7}/_{3} \Rightarrow \boldsymbol{z=-{}^{1}/_{3}}$$

d) $\begin{cases} x+y+z=0 & (1) \\ x+y-z=0 & (2) \\ x+y=0 & (3) \end{cases}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema homogéneo por lo tanto el sistema siempre es compatible

$|A|=0 \Longrightarrow R(A)\neq 3,$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=1 \Longrightarrow R(A)=2=R(\bar{A})<número\ de\ incognitas \Longrightarrow S.C.I.$

Eliminamos la primera ecuación y tomamos como parámetro libre $x$

Hacemos $x=\alpha$ y estudiamos el sistema proporcionado por el menor

$$\begin{cases} y-z=-\alpha \\ \ \ y=-\alpha \end{cases} \qquad \Longrightarrow z=y+\alpha=-\alpha+\alpha=0$$

Por lo tanto la solución es $\{(\alpha,-\alpha,\ 0)\ /\ \alpha\in\mathbb{R}\}$

e) $\begin{cases} x+y+2z=0 & (1) \\ x+2y+3z=0 & (2) \\ x+3y+4z=0 & (3) \end{cases}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right)$

$|A|=0$ elegimos un menor de orden 2 distinto de cero

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1\neq 0 \Longrightarrow R(A)=R(\bar{A})=2<número\ de\ incognitas \Longrightarrow S.C.I.$

Eliminamos la tercera ecuación y tomamos como parámetro libre $z$

$z=\alpha,$ $\begin{cases} x+y=-2\alpha & (1) \\ x+2y=-3\alpha & (2) \end{cases} \Longrightarrow (2)-(1) \Longrightarrow y=-\alpha,\quad x=-2\alpha-y=-2\alpha+\alpha=-\alpha$

Por lo tanto la solución es $\{(-\alpha,-\alpha,\ \alpha)\ /\ \alpha\in\mathbb{R}\}$

f) $\begin{cases} x+y+z+t=0 & (1) \\ x+y-z+t=0 & (2) \\ x+y+t=0 & (3) \end{cases}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\bar{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ orlamos con la primera columna y la segunda columna ⇨ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, al tener dos columnas iguales, la otra posibilidad con la primera columna pasa exactamente igual por lo tanto $R(A) = R(\bar{A}) = 2 \Longrightarrow S.C.I.$

Eliminamos la primera ecuación y tomamos como parámetros libres $x$ $e$ $y$

$$x=\alpha,\;\; y=\beta \;\;\Longrightarrow \begin{cases} -z+t=-\alpha-\beta & (2) \\ t=-\alpha-\beta & (3) \end{cases} \Longrightarrow z=\alpha+\beta+t=\alpha+\beta-\alpha-\beta=0$$

Por tanto la solución es $\{\,(\alpha,\beta,0,-\alpha-\beta)\;/\;\alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$

g) $\begin{cases} x+y-z+t=0 & (1) \\ 2x+2y-2z+2t=0 & (2) \end{cases}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

$$R(A)=R(\bar{A})=1<\textit{número de incognitas} \;\Longrightarrow S.C.I.$$

Como el rango es uno nuestro menor será cualquier número de la matriz, por ejemplo el número 1 que ocupa la posición $a_{11}$

Eliminamos la segunda ecuación y tomamos como parámetros libres $y, z, t$

$$y=\alpha,\;\; z=\beta,\;\;\; t=\gamma,\quad ⇨ \quad x=-\alpha+\beta-\gamma$$

Por lo tanto la solución es $\{\,(-\alpha+\beta-\gamma,\alpha,\beta,\gamma)\;/\;\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\}$

6º) Resolver por la regla de Cramer

a) $\begin{cases} x-3y+4z=13 \\ 3x-y+2z=-3 \\ -3x+5y-z=9 \end{cases}$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad |A|=48$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 13 & -3 & 4 \\ -3 & -1 & 2 \\ 9 & 5 & -1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-186}{48}=-\frac{31}{8}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 13 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ -3 & 9 & -1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{3}{8}, \quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 13 \\ 3 & -1 & -3 \\ -3 & 5 & 9 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{9}{2}$$

b) $\begin{cases} 4x-3y+3z=0 \\ 6x+y-9z=9 \\ 2x-5y-6z=5 \end{cases}$

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 6 & 1 & -9 \\ 2 & -5 & -6 \end{pmatrix} \qquad |A|=-354$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 9 & 1 & -9 \\ 5 & -5 & -6 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-177}{-354}=\frac{1}{2}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 6 & 9 & -9 \\ 2 & 5 & -6 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{0}{-354}=0, \quad z=\frac{\begin{vmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 6 & 1 & -9 \\ 2 & -5 & -6 \end{vmatrix}}{-354}=\frac{236}{-354}=-\frac{2}{3}$$