

## PROBLEMAS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS.

Los métodos para determinar los máximos y mínimos de las funciones se pueden aplicar a la solución de problemas prácticos, para resolverlos tenemos que transformar sus enunciados en fórmulas, funciones o ecuaciones.

Debido a que hay múltiples tipos de ejercicios no hay una regla única para sus soluciones, sin embargo puede desarrollarse una estrategia general para abordarlos, la siguiente es de mucha utilidad.

### ESTRATEGIA PARA RESOLVER PROBLEMAS APLICADOS A LA OPTIMIZACIÓN.

- a) Identificar los hechos dados y las cantidades desconocidas que se tratan de encontrar.
- b) Realizar un croquis o diagrama que incluya los datos pertinentes introduciendo variables para las cantidades desconocidas.
- c) Enunciar los hechos conocidos y las relaciones entre las variables.
- d) Determinar de cuál de las variables se desea encontrar el máximo o el mínimo y expresa esta variable como función de una de las otras variables.
- e) Encontrar los valores críticos de la función obtenida.
- f) Utilizar el criterio de la primera o de la segunda derivada para determinar si esos valores críticos son máximos o mínimos.
- g) Verificar si hay máximos o mínimos en la frontera del dominio de la función que se obtuvo anteriormente.
- h) **MUCHA DEDICACIÓN Y PRÁCTICA.**

**1.) Hallar dos números cuya suma es 18, sabiendo que el producto de uno por el cuadrado del otro es máximo.**

Según el enunciado  $x + y = 18$  y  $x \cdot y^2 = \text{Máximo}$

Despejemos una en la primera ecuación y su valor lo llevamos a la ecuación del máximo.

$y = 18 - x$ ;  $\text{Máximo} = x(18 - x)^2 \Rightarrow M(x) = x(18 - x)^2$ , En esta ecuación hallamos el valor de  $x$  que la hace máxima.

A.- Hallar la primera derivada, se iguala a cero y se resuelve la ecuación resultante.

$$M'(x) = (18-x)^2 - 2x(18-x) \Rightarrow M'(x) = 3(x-18)(x-6)$$

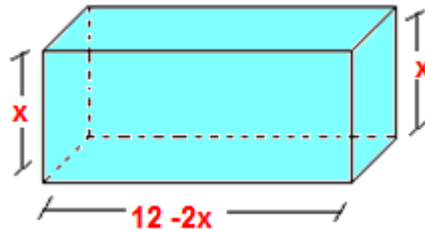
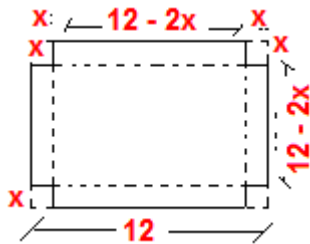
$$\text{si } M'(x) = 0 \Rightarrow -3(18-x)(x-6) = 0 \Rightarrow x_1 = 18; x_2 = 6(\text{v.c.})$$

B.- Calculamos la segunda derivada y hallamos su valor numérico para las raíces anteriores.

$$M''(x) = 6(x-12) \Rightarrow M''(6) = -36 < 0 \Rightarrow \exists \text{ máximo}; M''(18) = 36 > 0 \exists \text{ mínimo}$$

$$\text{si } x = 6 \Rightarrow y = 12$$

2) Se dispone de una lámina de cartón cuadrada de 12 cm. de lado. Cortando cuadrados iguales en las esquinas se construye una caja abierta doblando los laterales. Hallar las dimensiones de los cuadros cortados para que el volumen sea máximo.



$$\text{Volumen de la caja} = v = (12-2x)(12-2x)(x) \Rightarrow v = x(12-2x)^2$$

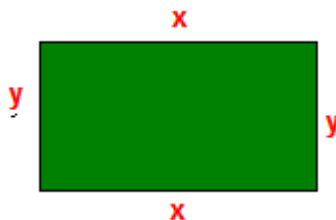
$$v(x) = x(12-2x)^2 \Rightarrow v'(x) = 12(x-2)(x-6)$$

$$\text{si } v'(x) = 0 \Rightarrow 12(x-2)(x-6) = 0 \Rightarrow x = 2; x = 6(\text{v.c.})$$

$$v''(x) = 24(x-4) \Rightarrow v''(2) = -48 < 0 \exists \text{ máximo}; v''(6) = 48 \exists \text{ mínimo}$$

**NOTA:** Por la naturaleza del problema, se ve que x no puede valer 6 cm. Porque el volumen sería 0, por lo tanto  $x = 2 \text{ cm}$ .

3) ¿Cuál será la forma rectangular de un campo de área dada igual a  $36 \text{ Dm}^2$  para que sea cercado por una valla de longitud mínima?



Según el enunciado, área =  $x \cdot y$  ;  $x \cdot y = 36$

Mínimo =  $2x + 2y$  ;  $Min = 2x + 2y$

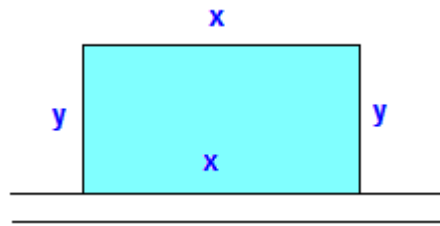
Despejamos y en la primera ecuación y su valor lo llevamos a la ecuación del mínimo.

$$y = \frac{36}{x} \Rightarrow Min(x) = 2x + 2\left(\frac{36}{x}\right) = \frac{2x^2 + 72}{x} \Rightarrow Min(x) = \frac{2x^2 + 72}{x}$$

$$Min'(x) = \frac{2x^2 - 72}{x^2}; \text{ si } : Min'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^2 - 72}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 6(\text{v.c.})$$

$$Min''(x) = \frac{144}{x^3} \Rightarrow Min''(6) = \frac{2}{3} > 0 \Rightarrow \exists \text{mín (nota: no se toma en cuenta } x = -6)$$

**4) Se quiere cercar un campo rectangular que está junto a un camino. Si la valla del lado que está junto al camino cuesta BF. 8 el metro y para los lados BF. 4 el metro, halla el área del mayor campo que puede cercarse con BF.1.440.**



Según el enunciado, área =  $x \cdot y$

$$8x + 4x + 4x + 4y = 1.440 \Rightarrow 12x + 8y = 1.440 \Rightarrow 3x + 2y = 360$$

Despejando  $y$  en la segunda y llevando su valor al área, nos queda:

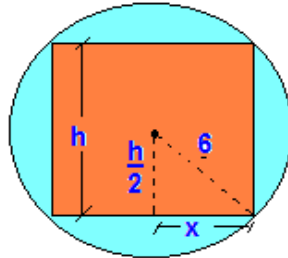
$$\text{si } : y = \frac{360 - 3x}{2} \Rightarrow A = xy \Rightarrow A(x) = x\left(\frac{360 - 3x}{2}\right) \Rightarrow A(x) = \frac{360x - 3x^2}{2}$$

$$A'(x) = \frac{360 - 6x}{2} \Rightarrow \text{si } : A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{360 - 6x}{2} = 0 \Rightarrow x = 60(\text{v.c.})$$

$$y = \frac{360 - 3x}{2} \Rightarrow y = y = \frac{360 - 3(60)}{2} \Rightarrow y = 90 \text{ m.} \Rightarrow A = xy = (60\text{m})(90\text{m}) = 5.400\text{m}^2$$

**NOTA:** Por la naturaleza del problema, no hace falta hallar la segunda derivada.

5) Una esfera tiene un radio de 6 cm. Hallar la altura del cilindro de volumen máximo inscrito en ella.



En la figura  $x$  es el radio de la base del cilindro. Por Pitágoras  $6^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + x^2$ .

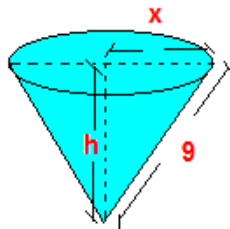
$$\text{Volumen} = \pi \cdot x^2 \cdot h \quad \text{pero} \quad x^2 = 36 - \frac{h^2}{4}$$

$$V(h) = \pi \left(36 - \frac{h^2}{4}\right) h \Rightarrow V(h) = \frac{\pi (144h - h^3)}{4} \Rightarrow V'(h) = \frac{\pi}{4} (144 - 3h^2)$$

$$V'(h) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} (144 - 3h^2) = 0 \Rightarrow h = \frac{12}{\sqrt{3}} = \pm 4\sqrt{3}; \text{ se toma : } h = 4\sqrt{3}$$

**NOTA:** Por la naturaleza del problema, no hace falta hallar la segunda derivada.

6) Para hacer un filtro de laboratorio, se pliega un papel circular. Si el radio de dicho papel mide 9cm. Calcular la altura del cono que se forma para que el volumen sea máximo.



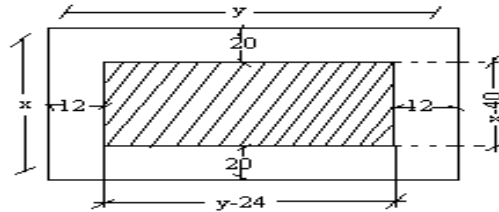
$$9^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 81 - h^2$$

$$v = \frac{\pi x^2 h}{3} \Rightarrow V(h) = \frac{\pi (81 - h^2) h}{3} \Rightarrow V(h) = \frac{\pi}{3} (81h - h^3)$$

$$V'(h) = \frac{\pi}{3} (81 - 3h^2); \text{ si } V'(h) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{3} (81 - 3h^2) = 0 \Rightarrow h = \frac{9}{\sqrt{3}} \Rightarrow h = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

**NOTA:** Por la naturaleza del problema, no hace falta hallar la segunda derivada.

7) Se dispone de una hoja de papel para un cartel que mide  $2\text{m}^2$ . Los márgenes superior e inferior, miden  $20\text{ cm}$ . cada uno y los laterales  $12\text{ cm}$ . cada uno. Hallar las dimensiones de las hojas, sabiendo que la parte impresa es máxima.



parte impresa :  $A = (x - 40)(y - 24)$ ; además área total :  $xy = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{y}$

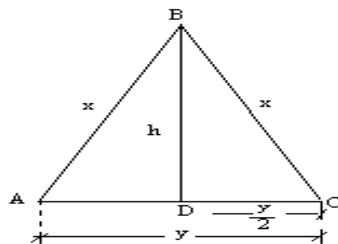
$$A(y) = \left(\frac{2}{y} - 40\right)(y - 24) \Rightarrow A(y) = (y - 24) \left(\frac{2 - 40y}{y}\right)$$

$$A'(y) = \left(\frac{2 - 40y}{y}\right) + (y - 24) \left(\frac{y(-40) - (2 - 40y)}{y^2}\right) \Rightarrow A'(y) = \frac{8(6 - 5y^2)}{y^2}$$

$$\text{si: } A'(y) = 0 \Rightarrow \frac{8(6 - 5y^2)}{y^2} = 0 \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{30}}{5} \text{ (v.c.); } y = 0 \nexists A'(y)$$

$$xy = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{y} \Rightarrow x = \frac{10}{\sqrt{30}} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{30}}{3}; y = \frac{\sqrt{30}}{5}$$

8) De todos los triángulos isósceles de  $12\text{ m}$  de perímetro, hallar el de área máxima.



En la figura: área =  $\frac{y \cdot h}{2}$  por Pitágoras  $\overline{BC}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{BD}^2$ ;  $x^2 = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + h^2$

Perímetro:  $2x + y = 12 \rightarrow y = 12 - 2x$

$$h = \sqrt{x^2 - \frac{y^2}{4}} ; \text{Area} = \frac{y \cdot h}{2} \Rightarrow \text{Area} = \frac{y \cdot \sqrt{x^2 - \frac{y^2}{4}}}{2}$$

$$\text{si: } y = 12 - 2x ; A(x) = \frac{(12 - 2x) \sqrt{x^2 - \frac{(12 - 2x)^2}{4}}}{2} = \frac{2(6 - x) \sqrt{4x^2 - 144 + 48x - 4x^2}}{2}$$

$$A(x) = (6 - x) \frac{\sqrt{48x - 144}}{2} \Rightarrow A(x) = (6 - x) \frac{\sqrt{48x(x - 3)}}{2} \Rightarrow A(x) = (6 - x) \frac{4\sqrt{3(x - 3)}}{2} \Rightarrow$$

$$A(x) = 2(6 - x) \sqrt{3(x - 3)} \Rightarrow A'(x) = 2 \left[ -2\sqrt{3(x - 3)} + \frac{(6 - x)\sqrt{3(x - 3)}(3)}{3(x - 3)} \right]$$

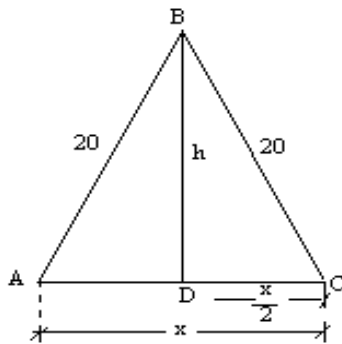
$$A'(x) = \frac{3\sqrt{3(4 - x)}}{\sqrt{x - 3}} \Rightarrow A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3\sqrt{3(4 - x)}}{\sqrt{x - 3}} = 0 \Rightarrow x = 4(\text{v.c.}); x = 3 \cancel{A'(x)}$$

para  $x = 4 \Rightarrow y = 4$

El triángulo de área máxima es equilátero de lado igual a 4cm.

**NOTA:** Por la naturaleza del problema, se ve que para  $x = 3$ , el triángulo se transformaría en una recta, por lo tanto  $x = 4$ , es la solución.

9) En un triángulo isósceles, los lados iguales miden 20 cm. cada uno. Hallar la longitud de la base para que el área sea máxima.



en la figura:  $\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2$ ;  $(20)^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \sqrt{400 - \frac{x^2}{4}}$

Area:  $A = \frac{xh}{2} \Rightarrow A(x) = \frac{x\sqrt{400 - \frac{x^2}{4}}}{2} \Rightarrow A(x) = \frac{x\sqrt{1600 - x^2}}{4}$

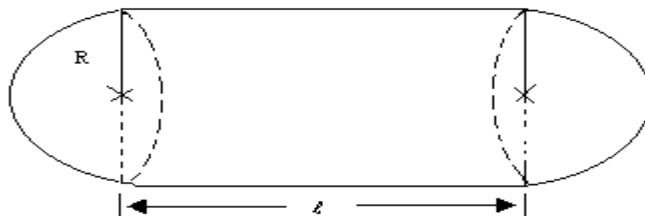
$A'(x) = \frac{\sqrt{1600 - x^2} - \frac{x(-2x)}{2\sqrt{1600 - x^2}}}{4} \Rightarrow A'(x) = \frac{800 - x^2}{2\sqrt{1600 - x^2}}$

$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{800 - x^2}{2\sqrt{1600 - x^2}} = 0 \Rightarrow \frac{(800 - x^2)\sqrt{1600 - x^2}}{2(1600 - x^2)} = 0$

Por lo tanto:  $800 - x^2 = 0$  y  $\sqrt{1600 - x^2} = 0$ ;  $800 - x^2 = 0 \rightarrow x = 20\sqrt{2}$   
 $\sqrt{1600 - x^2} = 0 \rightarrow x = 40$

**NOTA:** Para la naturaleza del problema, para  $x = 40$  el triángulo se transformaría en una recta, por lo tanto  $x = 20\sqrt{2} m$ .

**10) Se desea construir un tanque de acero con la forma de un cilindro circular recto y semiesferas en los extremos para almacenar gas propano. El costo por pie cuadrado de los extremos es el doble de la parte cilíndrica. ¿Qué dimensiones minimizan el costo si la capacidad deseada es de  $10\pi$  . Pies?**



a) Tenemos que:  $A_{\text{esfera}} = 4\pi R^2$ ;  $A_{\text{cilindro sin tapa}} = 2\pi R l$

b) La función a optimizar es el costo:  $C = 2(4\pi R^2) + 2\pi R l$

$$c) V. esfera = \frac{4}{3} \pi R^3; V. cilindro = \pi R^2 \ell \Rightarrow V_{total} = \frac{4}{3} \pi R^3 + \pi R^2 \ell \Rightarrow \ell = \frac{30 - 4R^3}{3R^2}$$

$$C(R) = 8\pi R^2 + 2\pi R \left( \frac{30 - 4R^3}{3R^2} \right) \Rightarrow C(R) = 8\pi R^2 + \frac{60\pi - 8\pi R^3}{3R}$$

$$C(R) = \frac{24\pi R^3 + 60\pi - 8\pi R^3}{3R} \Rightarrow C(R) = \frac{16\pi R^3 + 60\pi}{3R}$$

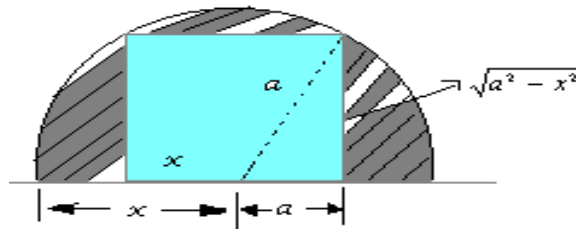
$$d) C'(R) = \frac{48\pi R^3(3R) - 3(16\pi R^3 + 60\pi)}{(3R)^2} \Rightarrow C'(R) = \frac{144\pi R^3 - 48\pi R^3 - 180\pi}{(3R)^2}$$

$$C'(R) = \frac{96\pi R^3 - 180\pi}{(3R)^2}; \text{ si: } C'(R) = 0 \Rightarrow \frac{96\pi R^3 - 180\pi}{(3R)^2} = 0 \Rightarrow 96\pi R^3 - 180\pi = 0 \Rightarrow R^3 = \frac{180\pi}{96\pi}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{180}{96}} = \sqrt[3]{\frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^5 \cdot 3}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 5}{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{15}}{2} \Rightarrow R = \frac{\sqrt[3]{15}}{2} \text{ ft}$$

$$e) \text{ Si: } R = \frac{\sqrt[3]{15}}{2} \text{ ft} \Rightarrow \ell = 2 \sqrt[3]{15} \text{ ft}$$

**11) Determine las dimensiones del rectángulo que se puede inscribir en un semicírculo de radio "a" de manera que dos de sus vértices estén sobre el diámetro.**



Rectángulo tiene como:

$$\text{Base} = 2x; \text{ Altura} = \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow A_{ret} = bh \Rightarrow A_{ret} = (2x)\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$A'(x) = 2\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{2x(-2x)}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \Rightarrow A'(x) = \frac{2a^2 - 2x^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Rightarrow A'(x) = \frac{2a^2 - 4x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\text{ Si } A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2a^2 - 4x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0 \Rightarrow 2a^2 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$b = 2x \Rightarrow b = a\sqrt{2}; h = \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2 \cdot 2}{4}} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{4a^2 - 2a^2}{4}} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



12) Encuentre el punto de la gráfica  $y = x^2 + 1$  más cercano al punto (3, 1).

La distancia entre los puntos  $(x, y)$  y  $(3, 1)$  es:  $d = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2}$

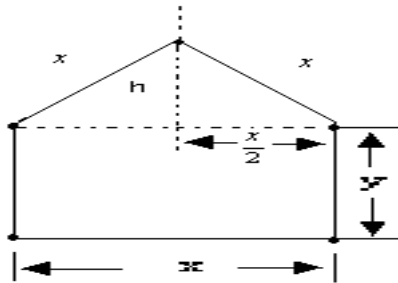
pero:  $y = x^2 + 1 \Rightarrow d = \sqrt{(x-3)^2 + (x^2 + 1 - 1)^2} \Rightarrow d = \sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}$

$d'(x) = \frac{2x^3 + x - 3}{\sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}}$ ; Si:  $d'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^3 + x - 3}{\sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}} = 0 \Rightarrow 2x^3 + x - 3 = 0$

por Ruffini:  $(x-1)(2x^2 + 2x + 3) = 0 \Rightarrow x = 1(v.c.); \quad 2x^2 + 2x + 3 \neq 0$

Si:  $x=1 \Rightarrow y = 2$ . Punto (1, 2)

13) Una ventana tiene forma de un rectángulo coronado por un triángulo equilátero. Encuentre las dimensiones del rectángulo para el cual el área de la ventana es máxima, si el perímetro de la misma debe ser 12 pies.



Cálculo de  $h$ :  $h = \sqrt{x^2 - (\frac{x}{2})^2} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} \Rightarrow h = (\frac{x\sqrt{3}}{2})$

Área del triángulo:  $A = \frac{xh}{2} \Rightarrow A = \frac{x(\frac{x\sqrt{3}}{2})}{2} \Rightarrow A = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$

Área del rectángulo:  $A = xy$

Para:  $y$  en función de  $x$ , usamos el perímetro de la ventana:

$P = 2y + 3x \Rightarrow 12 = 2y + 3x \Rightarrow y = \frac{12 - 3x}{2} \Rightarrow A(x) = \frac{12x - 3x^2}{2}$

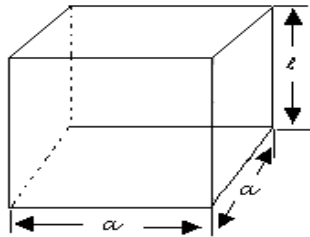
Área total de la figura:  $A_T(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + \frac{12x - 3x^2}{2}$

$A'_T(x) = \frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{12 - 6x}{2} \Rightarrow A'_T(x) = \frac{x\sqrt{3} + 12 - 6x}{2} = 0 \Rightarrow x(\sqrt{3} - 6) + 12 = 0$

$$x = \frac{-12}{\sqrt{3}-6} \Rightarrow x = \frac{12}{6-\sqrt{3}} \text{ Base del rectángulo} \Rightarrow \text{si: } y = \frac{12-3x}{2} \Rightarrow y = \frac{12-3\left(\frac{12}{6-\sqrt{3}}\right)}{2} \Rightarrow$$

$$y = \frac{72-12\sqrt{3}-36}{2(6-\sqrt{3})} \Rightarrow y = \frac{36-12\sqrt{3}}{2(6-\sqrt{3})} \Rightarrow y = \frac{18-6\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}} \text{ Altura del rectángulo}$$

14) Para que un paquete pueda enviarse por correo es necesario que la suma de su longitud y el perímetro de su base no exceda de 108 pulgadas. Encuentre las dimensiones de la caja con base cuadrada de mayor volumen que se puede enviar por correo.



El perímetro de la base es:  $P = 4a$

Condición:  $l + 4a \leq 108$  pulg, tomaremos el extremo máximo

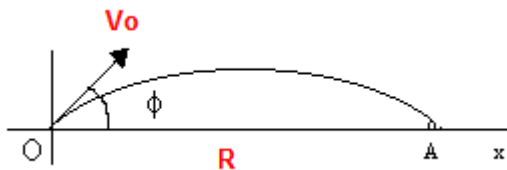
$l + 4a = 108$ , de donde  $l = 108 - 4a$

El Volumen:  $V = aal \Rightarrow V = a^2l \Rightarrow V = a^2(108 - 4a) \Rightarrow V(a) = 108a^2 - 4a^3$

$V'(a) = 216a - 12a^2$ ; Si:  $V'(a) = 0 \Rightarrow 4a(54 - 3a) = 0 \Rightarrow a = 0$  no es solución,

$54 - 3a = 0 \Rightarrow a = 18$  pulg  $\Rightarrow l = 108 - 4(18) \Rightarrow l = 36$  Pulg

15) La distancia  $R = OA$  (en el vacío) que cubre un proyectil, lanzando con velocidad inicial,  $V_0$  desde una pieza de artillería que tiene un ángulo de elevación  $\phi$  respecto al horizonte, se determina según la fórmula:  $R = \frac{V_0^2 \text{ Sen } 2\phi}{g}$  Determinar el ángulo  $\phi$  con el cual la distancia  $R$  es máxima dada la velocidad inicial  $V_0$ .



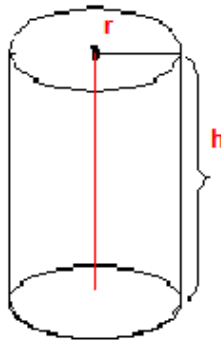
$$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \text{ (condición)}$$

$$\frac{dR}{d\phi} = \frac{2V_0^2 \cos(2\phi)}{g} \Rightarrow \frac{dR}{d\phi} = 0 \Rightarrow \frac{2V_0^2 \cos(2\phi)}{g} = 0 \Rightarrow \cos(2\phi) = 0 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4} \text{ (v.c.)}$$

$$\frac{d^2 R}{d\phi^2} = -\frac{(4V_0^2) \operatorname{sen}(2\phi)}{g} \Rightarrow \text{sust. v.c. en } \frac{d^2 R}{d\phi^2} \Rightarrow \frac{d^2 R}{d\phi^2} = -\frac{(4V_0^2) \operatorname{sen}2(\frac{\pi}{4})}{g} \Rightarrow \frac{d^2 R}{d\phi^2} = -\frac{(4V_0^2)}{g} < 0$$

$$\Rightarrow \text{en } \phi = \frac{\pi}{4} \exists \text{ máximo} \Rightarrow \text{sust en } R(\phi) = \frac{V_0^2 \operatorname{Sen}(2\phi)}{g} \Rightarrow R(\phi) = \frac{V_0^2}{g}$$

16) ¿Qué dimensiones debe tener un cilindro para que sea mínima su área total, dado el volumen V?



$$r = \text{radio}; h = \text{altura} \Rightarrow S = 2\pi r^2 + 2\pi rh; V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}$$

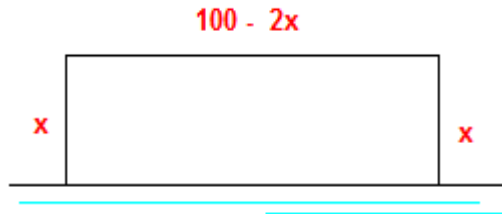
$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{V}{\pi r^2}\right) \Rightarrow S(r) = 2\pi r^2 + \left(\frac{2V}{r}\right) \Rightarrow S(r) = 2\left(\pi r^2 + \frac{V}{r}\right)$$

$$\frac{ds}{dr} = 2\left[2\pi r - \frac{V}{r^2}\right] \Rightarrow \frac{ds}{dr} = 0 \Rightarrow 2\left[\frac{2\pi r^3 - V}{r^2}\right] = 0 \Rightarrow 2\pi r^3 - V = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{V}{2\pi} \text{ (v.c.); } r = 0 \nexists$$

$$\frac{d^2 S}{dr^2} = 2\left[2\pi + \frac{2V}{r^3}\right] \Rightarrow \text{sust v.c.} \Rightarrow \frac{d^2 S}{dr^2} = 2\left[2\pi + \frac{2V}{\frac{V}{2\pi}}\right] \Rightarrow \frac{d^2 S}{dr^2} = 2[2\pi + 4\pi] = 12\pi > 0$$

$$r^3 = \frac{V}{2\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \Rightarrow \text{si: } h = \frac{V}{\pi r^2} \Rightarrow h = \frac{V}{\pi \sqrt[3]{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2}}$$

17) Un terreno rectangular se encuentra adyacente a un río y se debe cercar en 3 lados, ya que el lado que da al río no requiere cerca. Si se dispone de 100 m de cerca, encuentre las dimensiones del terreno con el área máxima.

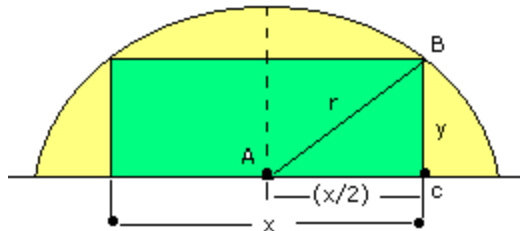


$$0 < x < 50(\text{condición}); A = bh \Rightarrow A = x(100 - 2x) \Rightarrow A(x) = 100x - 2x^2$$

$$\frac{dA}{dx} = 100 - 4x \Rightarrow \frac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow 100 - 4x = 0 \Rightarrow x = 25(\text{v.c.})$$

$$\frac{d^2A}{dx^2} = -4 \Rightarrow \frac{d^2A}{dx^2} < 0 \Rightarrow \text{en } x = 25 \exists \text{ máximo} \Rightarrow x = h = 25 \text{ m} \Rightarrow b = 50 \text{ m} \Rightarrow A = 1250 \text{ m}^2$$

18) Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una semicircunferencia de radio  $r$ .



$$A_{\text{rectángulo}} = xy \Rightarrow \triangle ABC: r^2 = y^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 = r^2 - y^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{r^2 - y^2}$$

$$A(y) = 2y\sqrt{r^2 - y^2} \Rightarrow \frac{da}{dy} = 2\sqrt{r^2 - y^2} + 2y \left[ \frac{1}{2}(r^2 - y^2)^{-1/2}(-2y) \right]$$

$$\frac{da}{dy} = \frac{2[r^2 - 2y^2]}{\sqrt{r^2 - y^2}} \Rightarrow \text{si: } \frac{da}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{2[r^2 - 2y^2]}{\sqrt{r^2 - y^2}} = 0 \Rightarrow r^2 - 2y^2 = 0 \Rightarrow y_1 = \frac{r}{\sqrt{2}} \Rightarrow y_1 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{r^2 - y^2} \Rightarrow r = y \exists$$

$$\frac{d^2A}{dy^2} = \frac{2[-4y]\sqrt{r^2 - y^2} - 2[r^2 - 2y^2] \left[ \frac{1}{2}(r^2 - y^2)^{-1/2}(-2y) \right]}{(r^2 - y^2)}$$

$$\frac{d^2 A}{dy^2} = \frac{2y(r^2 - y^2)^{-1/2} [-4(r^2 - y^2) + (r^2 - y^2)]}{(r^2 - y^2)}$$

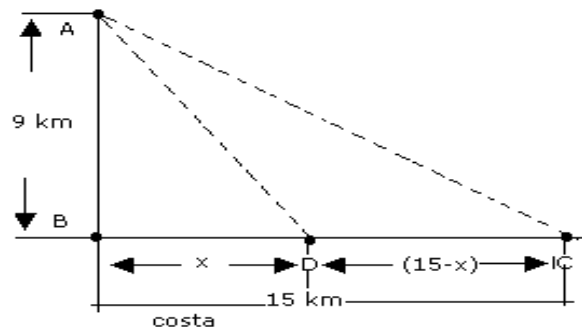
$$\frac{d^2 A}{dy^2} = \frac{2y [-4r^2 + 4y^2 + r^2 - 2y^2]}{\sqrt{(r^2 - y^2)^3}} \Rightarrow \frac{d^2 A}{dy^2} = \frac{2y [2y^2 - 3r^2]}{\sqrt{(r^2 - y^2)^3}}$$

$$\frac{d^2 A}{dy^2} = \frac{2(\frac{r\sqrt{2}}{2}) [2(\frac{r\sqrt{2}}{2})^2 - 3r^2]}{\sqrt{(r^2 - (\frac{r\sqrt{2}}{2})^2)^3}} \Rightarrow \frac{d^2 A}{dy^2} = \frac{r\sqrt{2} [-r^2]}{\sqrt{[r^2 - \frac{r^2}{2}]^3}} \Rightarrow \frac{d^2 A}{dy^2} = \frac{-r^3\sqrt{2}}{\sqrt{[\frac{2r^2 - r^2}{2}]^3}}$$

$$\frac{d^2 A}{dy^2} = \frac{-r^3\sqrt{2}}{\sqrt{(\frac{r^2}{2})^3}} \Rightarrow \frac{d^2 A}{dy^2} = \frac{-r^3\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{r^6}{8}}} \Rightarrow \frac{d^2 A}{dy^2} = \frac{-r^3\sqrt{2}}{r^3\sqrt{\frac{1}{2^3}}} \Rightarrow \frac{d^2 A}{dy^2} = \frac{-8}{r} < 0$$

$$y = \frac{r}{\sqrt{2}}; x = 2\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} \Rightarrow x = 2\sqrt{\frac{r^2}{2}} \Rightarrow x = \frac{2r}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = 2y$$

19) Un buque militar se encuentra anclado a 9 km. del punto más próximo de la costa. Se precisa enviar un mensajero a un campamento militar situado a 15 km. del punto de la costa más próximo al buque, medido a lo largo de la costa; el mensajero andando a pie hace 5 km/h y remando 4 km/h; ¿En qué punto de la costa debe desembarcar el mensajero para llegar al campamento en el mínimo tiempo posible?



por pítgoras:  $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2$

Remando:  $AD = \sqrt{9^2 + x^2}$ ; A pie:  $DC = 15 - x$

$$M.R.U. \Rightarrow V = \frac{x}{t} \Rightarrow t = \frac{x}{V} \Rightarrow t. \text{ remando: } t_R = \frac{\sqrt{81 + x^2}}{4 \frac{km}{h}}; t. a \text{ pie: } t_P = \frac{15 - x}{5 \frac{km}{h}}$$

$$t_i = t_R + t_P \Rightarrow t_i(x) = \frac{\sqrt{81 + x^2}}{4} + \frac{15 - x}{5} \Rightarrow t_i(x) = \frac{\sqrt{81 + x^2}}{4} - \frac{x}{5} + 3$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{2} (81 + x^2)^{-1/2} (2x) \right] - \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{x}{4\sqrt{81 + x^2}} - \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{5x - 4\sqrt{81 + x^2}}{20\sqrt{81 + x^2}}$$

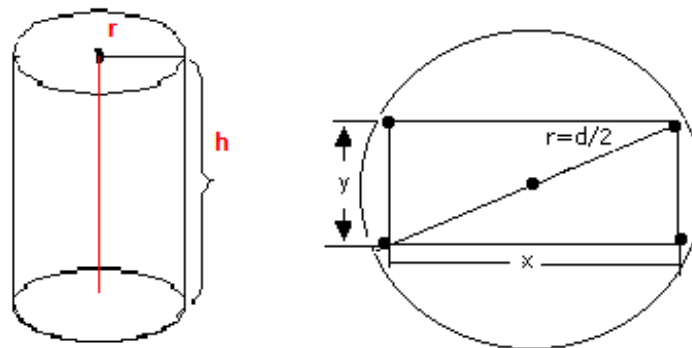
$$\frac{dt}{dx} = 0 \Rightarrow 5x - \sqrt{81 + x^2} = 0 \Rightarrow (5x)^2 = (4\sqrt{81 + x^2})^2 \Rightarrow 25x^2 = 16x^2 + 1296 \Rightarrow x = 12 \text{ (v.c.)}$$

$$\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{81 + x^2} - \frac{x}{2}(81 + x^2)^{-1/2}(2x)}{(81 + x^2)} \Rightarrow \frac{d^2t}{dx^2} = \frac{81}{4\sqrt{(81 + x^2)^3}}$$

$$\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{81}{4\sqrt{81 + (12)^2}} > 0 \therefore x = 12 \text{ Km} \quad \exists \text{ mínimo tiempo empleado}$$

20) De un tronco redondo de diámetro  $d$  hay que cortar una viga de sección rectangular. ¿Qué ancho ( $x$ ) y altura ( $y$ ) deberá tener esta sección para que la viga tenga resistencia máxima posible. A) A la compresión, B) A la flexión?

Nota: La resistencia de la viga a la compresión es proporcional al área de su sección transversal mientras que la flexión es proporcional al producto del ancho de esta sección por el cuadrado de su altura.



$$A_{\text{rectángulo}} : A = bh \Rightarrow b = x; h = y; \text{ Por pitágoras } : d^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow y = \sqrt{d^2 - x^2}$$

$$R_c(x) = kx\sqrt{d^2 - x^2} \Rightarrow \frac{dR_c}{dx} = k \left[ \sqrt{d^2 - x^2} + x \left( \frac{1}{2} (d^2 - x^2)^{-1/2} \right) (-2x) \right] \Rightarrow \frac{dR_c}{dx} = \frac{k(d^2 - x^2)}{\sqrt{d^2 - x^2}}$$

$$\frac{dR_c}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{k(d^2 - x^2)}{\sqrt{d^2 - x^2}} = 0 \Rightarrow k \neq 0; d^2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{d}{\sqrt{2}} \text{ (v.c.)}; \text{ Si } : x = d \nexists \frac{dR_c}{dx}$$

$$\frac{d^2 R_c}{dx^2} = k \left[ \frac{-4x(\sqrt{d^2 - x^2}) - (d^2 - 2x^2) \frac{1}{2} (d^2 - x^2)^{-1/2} (-2x)}{(d^2 - x^2)} \right] \Rightarrow \frac{d^2 R_c}{dx^2} = \frac{kx(2x^2 - 3d^2)}{\sqrt{(d^2 - x^2)^3}}$$

$$\text{sust. v.c. en } \frac{d^2 R_c}{dx^2} \Rightarrow \frac{d^2 R_c}{dx^2} = \frac{k(\frac{d}{\sqrt{2}}) \left( 2(\frac{d}{\sqrt{2}})^2 - 3d^2 \right)}{\sqrt{\left( d^2 - (\frac{d}{\sqrt{2}})^2 \right)^3}} \Rightarrow \frac{d^2 R_c}{dx^2} = \frac{k(\frac{d}{\sqrt{2}}) \left( 2(\frac{d^2}{2}) - 3d^2 \right)}{\sqrt{\left( \frac{2d^2 - d^2}{2} \right)^3}}$$

$$\frac{d^2 R_c}{dx^2} = \frac{k(\frac{d}{\sqrt{2}}) (-d^2)}{\sqrt{\left( \frac{d^2}{2} \right)^3}} \Rightarrow \frac{d^2 R_c}{dx^2} = \frac{-k d^3 4\sqrt{2}}{\sqrt{2} d^3} \Rightarrow \frac{d^2 R_c}{dx^2} = -4k < 0 \Rightarrow \text{en } x = \frac{d}{\sqrt{2}} \exists \text{ máximo}$$

$$\text{si } : x = \frac{d}{\sqrt{2}} \text{ (ancho)} \Rightarrow y = \sqrt{d^2 - x^2} \Rightarrow y = \sqrt{d^2 - \left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2} \Rightarrow y = \frac{d}{\sqrt{2}} \text{ (altura)}$$

$$V_t = \pi r^2 h + \frac{4\pi r^3}{3} \Rightarrow V - \frac{4\pi r^3}{3} = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{V - \frac{4\pi r^3}{3}}{\pi r^2} \Rightarrow h = \frac{3V - 4\pi r^3}{3\pi r^2}$$

$$A_t = 2\pi r h + 4\pi r^2 \Rightarrow A_t(r) = 2\pi r \left[ \frac{3V - 4\pi r^3}{3\pi r^2} \right] + 4\pi r^2 \Rightarrow A_t(r) = 2 \left[ \frac{3V - 4\pi r^3}{3r} \right] + 4\pi r^2$$

$$\frac{dA}{dr} = \frac{2}{3} \left[ \frac{(-12\pi r^2)(r) - (3V - 4\pi r^3)}{r^2} \right] + 8\pi r \Rightarrow \frac{dA}{dr} = \frac{-2}{3} \left[ \frac{8\pi r^3 + 3V}{r^2} \right] + 8\pi r$$

$$\frac{dA}{dr} = \frac{-16\pi r^3 - 6V + 24\pi r^3}{3r^2} \Rightarrow \frac{dA}{dr} = \frac{-6V + 68\pi r^3}{3r^2}; \text{ si } : \frac{dA}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{-6V + 68\pi r^3}{3r^2} = 0$$

$$-6V + 68\pi r^3 = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{6V}{8\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \text{ (v.c.)}; r = 0 \nexists$$

$$\frac{dA}{dr} = \frac{-6V + 68\pi r^3}{r^2} \Rightarrow \frac{dA}{dr} = -\frac{2V}{r^2} + \frac{8\pi r}{3} \Rightarrow \frac{d^2A}{dr^2} = \frac{4V}{r^3} + \frac{8\pi}{3}$$

$$\text{sust. v.c. en } \frac{d^2A}{dr^2} \Rightarrow \frac{d^2A}{dr^2} = -\frac{4V}{\left(\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}\right)^3} + \frac{8\pi}{3} \Rightarrow \frac{d^2A}{dr^2} = \frac{16V\pi}{3V} + \frac{8\pi}{3} \Rightarrow \frac{d^2A}{dr^2} = 6\pi > 0$$

$$\text{en } r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \exists \text{ m\u00ednimo} \Rightarrow h = \frac{3V - 4\pi r^3}{3\pi r^2} \Rightarrow h = \frac{3V - 4\pi\left(\frac{3V}{4\pi}\right)}{3\pi\sqrt[3]{\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^2}} \Rightarrow h = 0$$

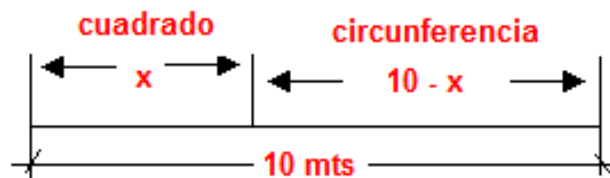
b)  $R_f = Kxy^2 \Rightarrow d^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = d^2 - x^2 \Rightarrow R_f = Kx(d^2 - x^2) \Rightarrow R_f(x) = K(xd^2 - x^3)$

$$\frac{dR_f}{dx} = K(d^2 - x^2) \Rightarrow \frac{dR_f}{dx} = 0 \Rightarrow K(d^2 - x^2) = 0 \Rightarrow K \neq 0; d^2 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{d}{\sqrt{3}} \text{ (v.c.)}$$

$$\frac{d^2R_f}{dx^2} = K(-6x) \Rightarrow \frac{d^2R_f}{dx^2} = -6Kx; \Rightarrow \text{sust. v.c. en } \frac{d^2R_f}{dx^2} \Rightarrow \frac{d^2R_f}{dx^2} = -6K\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right) < 0 \exists \text{ m\u00e1ximo.}$$

$$\text{Ancho: } x = \frac{d}{\sqrt{3}}; \text{ altura: } y = \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{3}} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{3d^2 - d^2}{3}} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{2}{3}}d$$

21) Un trozo de alambre de 10 m. de longitud se va a cortar en dos partes. Una parte ser\u00e1 doblada en forma de circunferencia y la otra en forma de cuadrado. \u00bfC\u00f3mo deber\u00e1 cortarse el alambre para que el \u00e1rea combinada de las dos figuras sean tan peque\u00f1as como sea posible.



Cuadrado de lado  $x \Rightarrow$  longitud del alambre =  $4x$

Circunferencia de radio  $r \Rightarrow$  longitud del alambre =  $2\pi r \Rightarrow 10 = 4x + 2\pi r \Rightarrow x = \frac{10 - 2\pi r}{4}$

$A_{\text{cuadrado}} = x^2; A_{\text{circunferencia}} = \pi r^2 \Rightarrow$  \u00c1rea combinada:  $A = x^2 + \pi r^2 \Rightarrow$

$$A(r) = \left[ \frac{10 - 2\pi r}{4} \right]^2 + \pi r^2 \Rightarrow \frac{dA}{dr} = 2 \left[ \frac{10 - 2\pi r}{4} \right] \left( \frac{-2\pi}{4} \right) + 2\pi r \Rightarrow \frac{dA}{dr} = \left( \frac{-10 + 2\pi^2 r}{4} \right) + 2\pi r$$

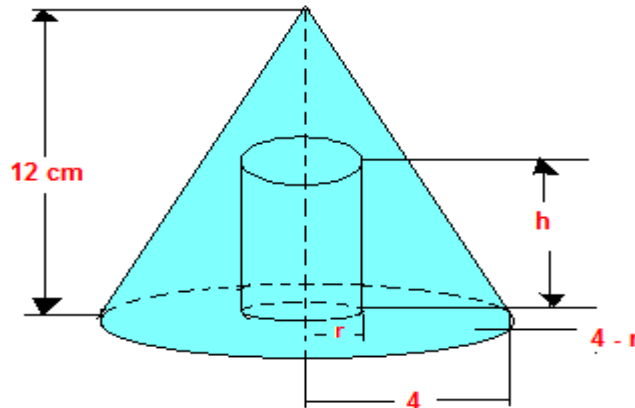


$$\frac{dA}{dr} = \frac{-5\pi + \pi^2 r}{2} + 2\pi r \Rightarrow \frac{dA}{dr} = \frac{\pi(-5 + r(\pi+4))}{2}; \text{ si: } \frac{dA}{dr} = 0 \Rightarrow r = \frac{5}{(\pi+4)} \text{ (v.c.)}$$

$$\frac{d^2A}{dr^2} = \frac{\pi(\pi+4)}{2} \Rightarrow \frac{d^2A}{dr^2} = > 0 \Rightarrow \text{ en } r = \frac{5}{\pi+4} \exists \text{ m\u00ednimo}$$

$$x = \left[ \frac{5 - \pi r}{2} \right] \Rightarrow x = \left[ \frac{5 - \pi \left[ \frac{5}{\pi+4} \right]}{2} \right] \Rightarrow x = \left[ \frac{5\pi + 20 - 5\pi}{2(\pi+4)} \right] \Rightarrow x = \frac{10}{(\pi+4)} \Rightarrow x \approx 1.4$$

22) Calcular el volumen m\u00e1ximo del cilindro circular recto, que se puede inscribir en el cono de 12 cm de altura y 4 cm en la base, de manera que los ejes del cilindro y del cono coincidan.



La figura representa una secci\u00f3n transversal del cono y del cilindro que pasa por el eje de ambos.

por relaci\u00f3n de tri\u00e1ngulos semejntes

$$\frac{h}{4-r} = \frac{12}{4} \Rightarrow \frac{h}{4-r} = 3 \Rightarrow h = 3(4-r)$$

$$\text{Volumen del cilindro: } V = \pi r^2 h \Rightarrow V(r) = \pi r^2 [3(4-r)] \Rightarrow V(r) = 3\pi r^2 (4-r)$$

si:  $r = 0$  \u00f3  $r = 4$  (volumen m\u00e1ximo no se alcanza en la frontera)

$$V(r) = 3\pi [4r^2 - r^3] \Rightarrow \frac{dv}{dr} = 3\pi [8r - 3r^2]; \text{ si: } \frac{dv}{dr} = 0 \Rightarrow 3\pi [8r - 3r^2] = 0$$

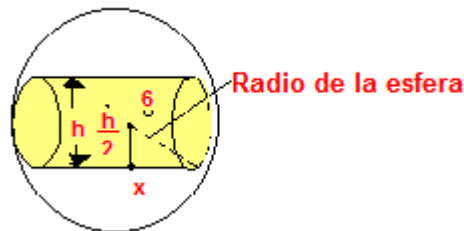
$$3\pi \neq 0; 8r - 3r^2 = 0 \Rightarrow r[8 - 3r] = 0 \Rightarrow r = 0; r = \frac{8}{3} \text{ (v.c.)}$$

$$\frac{d^2 V}{dr^2} = 3\pi[8 - 6r] \Rightarrow \frac{d^2 V}{dr^2} = 3\pi\left[8 - 6\left(\frac{8}{3}\right)r\right] < 0 \Rightarrow \exists \text{ máximo}$$

$$\text{Calculamos la altura: } h = 3\left(4 - \frac{8}{3}\right) \Rightarrow h = 4$$

$$\text{El volumen máximo del cilindro inscrito es: } V = \pi\left(\frac{8}{3}\right)^2 4 \Rightarrow V = 89.4 \text{ cm}^3$$

**23) Una esfera tiene un radio de 6 cm. Hallar la altura del cilindro de volumen máximo inscrito en ella.**



X = radio del cilindro

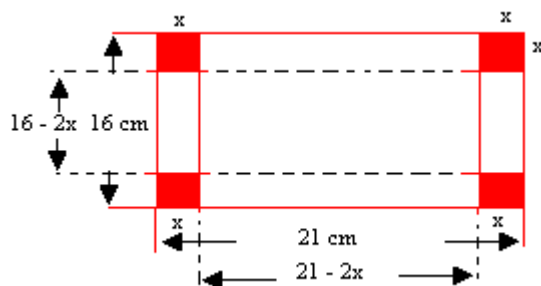
$$\text{Volumen del cilindro: } V = \pi r^2 h; \text{ por pitágoras: } 6^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + x^2$$

$$x^2 = 36 - \frac{h^2}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{144 - h^2}{4} \Rightarrow V(h) = \pi \left[ \frac{144 - h^2}{4} \right] h \Rightarrow V = \frac{\pi}{4} [144h - h^3]$$

$$\frac{dv}{dh} = \frac{\pi}{4} [144 - 3h^2] \text{ si: } \frac{dv}{dh} = 0 \Rightarrow 144 - 3h^2 = 0 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{144}{3}} \Rightarrow h = 4\sqrt{3}$$

$$\frac{d^2 v}{dh^2} = \frac{\pi}{4} (-6h) \Rightarrow \frac{d^2 v}{dh^2} = \frac{\pi}{4} (-6)(4\sqrt{3}) < 0 \Rightarrow h = 4\sqrt{3} \exists \text{ máximo}$$

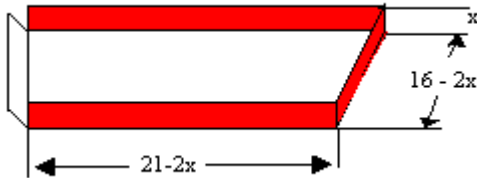
**24) Se desea construir una caja sin tapa con base rectangular de cartón de 16 c, de ancho y 21 cm de largo, recortando un cuadrado de cada esquina y doblando los lados hacia arriba. Calcular el lado del cuadrado para el cual se obtiene una caja de volumen máximo.**



Sean: x = longitud en cm de los cuadrados que van a cortarse, V = Volumen en  $\text{cm}^3$

El volumen de una caja es el producto de sus dimensiones.

**NOTA:**  $x$  no puede ser negativa debido a que el ancho del cartón mide 16 cm no puede cortarse cuadrado cuyos lados midan 8 cm de largo.



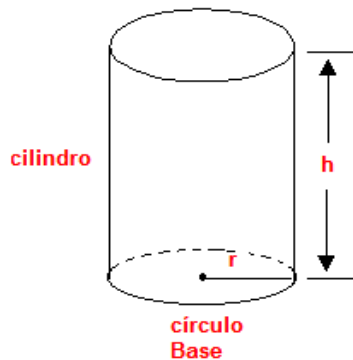
$$V = lah \Rightarrow v(x) = (21-2x)(16-2x)x \Rightarrow V(x) = 4x^3 - 74x^2 + 336$$

$$\frac{dv}{dx} = 12x^2 - 148x + 336 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = 4(3x-28)(x-3); \text{ si } \frac{dv}{dx} = 0 \Rightarrow 4(3x-28)(x-3) = 0$$

$$x = 9; x = 3 \text{ (v.c.)}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = (24x-148) \Rightarrow \text{sustituimos: } \frac{d^2v}{dx^2} = 24(3) - 148 < 0 \quad \exists \text{ máximo cuando } x = 3$$

25) Se desea elaborar un pequeño recipiente cilíndrico sin tapa, que tenga un volumen de  $24 \pi \text{ cm}^3$ , el material que se usa para la base cuesta tres veces más que el que se emplea para la parte cilíndrica. Suponiendo que en la construcción no se desperdicia material, evaluar las dimensiones para las que es mínimo el costo del material de fabricación.



Donde:  $r$  = Radio de la base en (cm),  $h$  = la altura en (cm),  $V = 24 \pi \text{ cm}^3$

Sustituyendo:  $24 \pi = \pi r^2 h$

$$h = \frac{24 \pi}{\pi r^2} \rightarrow h = \frac{24}{r^2}$$

Para obtener la ecuación de Costo de Fabricación.

A = costo por  $\text{cm}^2$  para la parte curva

El costo para la base  $C_B = 3a(\pi r h)$

**El costo para la parte cilíndrica:**  
 $C_C = a(2\pi r h)$   
 $C_C = a$  (área del cilindro)

El costo total  $C = C_B + C_C$

$$C = 3a(\pi r^2) + a(2\pi r h) \Rightarrow C = a\pi(3r^2 + 2rh) \Rightarrow \text{Como } h = \frac{24}{r^2} \Rightarrow C(r) = a\pi \left[ 3r^2 + 2r \left( \frac{24}{r^2} \right) \right]$$

$$C(r) = a\pi \left[ 3r^2 + \left( \frac{48}{r} \right) \right] \Rightarrow \frac{dc}{dr} = a\pi \left( 6r - \left( \frac{48}{r^2} \right) \right) \Rightarrow \frac{dc}{dr} = 6a\pi \left( \frac{r^3 - 8}{r^2} \right)$$

$$\text{si: } \frac{dc}{dr} = 0 \Rightarrow r^3 - 8 = 0 \Rightarrow r = 2(\text{v.c.}); \text{ si } r = 0(\text{no tiene sentido})$$

$$\frac{d^2c}{dr^2} = a\pi \left( 6 + \left( \frac{96}{r^3} \right) \right) \Rightarrow \text{sust. v.c. en: } \frac{d^2c}{dr^2} = a\pi \left( 6 + \left( \frac{96}{(2)^3} \right) \right) > 0 \Rightarrow \text{en } r = 2 \exists \text{ mínimo}$$

$$\text{como } h = \frac{24}{r^2} \Rightarrow h = 6$$

**26) Hallar dos números positivos que minimicen la suma del doble del primero más el segundo, si el producto de los dos números es 288.**

Sea: (x) El primer número, (y) el segundo número, S la suma de ellos.

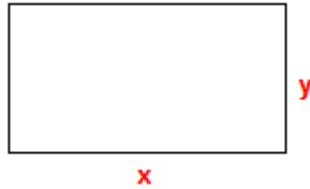
$$\text{Del enunciado: } S = 2x + y; \quad xy = 288 \Rightarrow y = \frac{288}{x} \Rightarrow S(x) = 2x + \frac{288}{x}$$

$$\frac{ds}{dx} = 2 - \frac{288}{x^2} \Rightarrow \frac{ds}{dx} = \frac{2x^2 - 288}{x^2} \Rightarrow \frac{ds}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{2x^2 - 288}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 288 = 0 \Rightarrow x = \pm 12$$

$$\frac{d^2s}{dx^2} = \frac{288}{x^3} \Rightarrow \text{sust v.c. en } \frac{d^2s}{dx^2} = \frac{288}{(12)^3} > 0 \Rightarrow \text{en } x = 12 \exists \text{ mínimo}$$

$$\text{si: } x = 12 \Rightarrow y = 24$$

27) Un granjero dispone de 100 metros de valla, con los que desea construir un corral rectangular de la máxima superficie posible.



(superficie del corral):  $S = xy$ ; del enunciado  $2x + 2y = 100 \Rightarrow y = 50 - x \Rightarrow S(x) = x(50 - x)$

$$\frac{ds}{dx} = 50 - 2x \Rightarrow \frac{ds}{dx} = 0 \Rightarrow 50 - 2x = 0 \Rightarrow x = 25(\text{v.c.})$$

$$\frac{d^2s}{dx^2} = -2 < 0 \Rightarrow \text{en } x = 25 \exists \text{ máximo} \Rightarrow y = 25 \therefore S. \text{máxima es de } : S = 625\text{m}^2$$

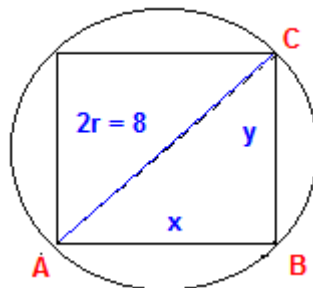
28) Hallar un número positivo cuya suma con su inverso sea mínima.

Sea  $x$  un número  $\Rightarrow$  su inverso es:  $\frac{1}{x} \Rightarrow S(x) = x + \frac{1}{x}$

$$\frac{ds}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{ds}{dx} = \frac{x^2 - 1}{x^2} \Rightarrow \text{si: } \frac{ds}{dx} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1(\text{v.c.}), \text{ pero el valor debe ser } (+)$$

$$\frac{d^2s}{dx^2} = \frac{2}{x^3} \Rightarrow \text{sust. v.c.} \Rightarrow \frac{d^2s}{dx^2} = \frac{2}{(1)^3} > 0 \Rightarrow \text{en } x = 1 \exists \text{ mínimo}$$

29) Dado un círculo de radio 4 dm, inscribe en él un rectángulo de área máxima.



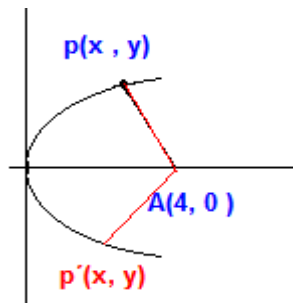
$$S = xy(\text{área del rectángulo}) \Rightarrow \widehat{ABC} \Rightarrow x^2 + y^2 = 8^2 \Rightarrow y = \sqrt{64 - x^2} \Rightarrow S(x) = x\sqrt{64 - x^2}$$

$$S'(x) = \frac{2(32-x^2)}{\sqrt{64-x^2}} \Rightarrow \text{si } S'(x) = 0 \Rightarrow (32-x^2) = 0 \Rightarrow x = \pm 4\sqrt{2} \text{ (v.c.) pero } : x \text{ ni } y \text{ pueden ser } (-)$$

$$S''(x) = \frac{2x(x^2-96)}{\sqrt{(64-x^2)^3}} \Rightarrow \text{sust. v.c. } x = 4\sqrt{2} \Rightarrow S''(x) = \frac{2(4\sqrt{2})((4\sqrt{2})^2-96)}{\sqrt{(64-(4\sqrt{2})^2)^3}} = -4 < 0 \Rightarrow \exists \text{ máximo}$$

$$\text{si } : x = 4\sqrt{2} \Rightarrow y = \sqrt{64 - (4\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{2}$$

**30) Calcular las coordenadas de los puntos de la parábola  $y^2 = 4x$ , tales que sus distancias al punto A (4,0) sean mínimas.**



$d(A, P) = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$  y la parábola:  $y^2 = 4x \Rightarrow$  sust. en  $d$  porq el punto  $\in$  a la parábola

$$d(x) = \sqrt{(x-4)^2 + (4x)^2} \Rightarrow d'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 16}} \Rightarrow d'(x) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ (v.c.)}$$

$$d''(x) = \frac{12}{\sqrt{(x^2 - 4x + 16)^3}} \Rightarrow \text{sust. v.c. } d''(x) = \frac{12}{\sqrt{((2)^2 - 4(2) + 16)^3}} > 0 \Rightarrow x = 2 \exists \text{ mínimo}$$

$$\text{si } x = 2 \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{2}. \Rightarrow p(2, 2\sqrt{2}); p'(2, -2\sqrt{2})$$

**31) De todas las parejas de números reales cuyas componentes tiene suma S dada encontrar aquella para la cual el producto P de las mismas es máximo. Aplica lo anterior al caso S = 40.**

a) sea:  $x$  e  $y$  las componentes  $\Rightarrow x + y = S \Rightarrow y = S - x$ ; además  $P = xy$

$$\text{Sust. } \Rightarrow P(x) = x(S - x) \Rightarrow P(x) = -x^2 + xS \Rightarrow \frac{dP}{dx} = -2x + S \Rightarrow \frac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow x = \frac{S}{2}$$

$$\frac{d^2P}{dx^2} = -2 < 0 \Rightarrow \text{en } x = \frac{S}{2} \exists \text{ máximo } \Rightarrow \text{si } x = \frac{S}{2} \Rightarrow y = \frac{S}{2} \Rightarrow \left(\frac{S}{2}, \frac{S}{2}\right)$$

$$\text{de } P_{\text{máx}} = xy \Rightarrow P_{\text{máx}} = \left(\frac{S}{2}\right)\left(\frac{S}{2}\right) \Rightarrow P_{\text{máx}} = \frac{S^2}{4}$$

$$b) \text{ Si } S = 40 \Rightarrow x = 20, y = 20 \Rightarrow P_{\text{máx}} = 400.$$

**32) De todas las parejas de números reales cuyas componentes positivas tienen producto dado, encontrar aquella para la cual la suma de esas componentes es mínima. Aplica lo anterior al caso  $P = 100$ .**

$$a.) \text{ Sea } (x, y) \text{ la pareja } \Rightarrow S = x + y; \text{ además } P = xy \Rightarrow y = \frac{P}{x} \Rightarrow S(x) = x + \frac{P}{x}$$

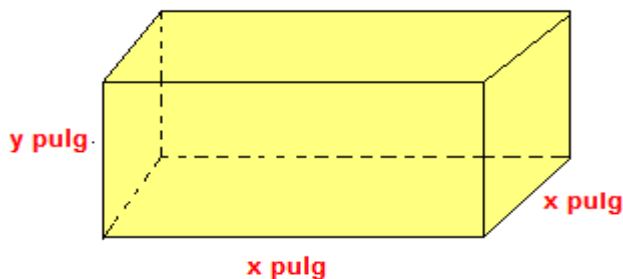
$$\frac{dS}{dx} = 1 - \frac{P}{x^2} \Rightarrow \frac{dS}{dx} = \frac{x^2 - P}{x^2}; \text{ si } \frac{dS}{dx} = 0 \Rightarrow x^2 - P = 0 \Rightarrow x = \sqrt{P} \text{ (v.c.); condición } x > 0$$

$$\frac{d^2S}{dx^2} = \frac{2P}{x^3} \Rightarrow \text{sust. v.c.} \Rightarrow \frac{d^2S}{dx^2} = \frac{2P}{(\sqrt{P})^3} > 0 \Rightarrow \text{en } x = \sqrt{P} \exists \text{mínimo } \therefore$$

$$\text{si: } y = \frac{P}{x} \Rightarrow y = \sqrt{P} \Rightarrow \text{la pareja es } (\sqrt{P}, \sqrt{P}) \text{ y su suma: } S = 2\sqrt{P}$$

$$b) \text{ Siendo } P = 100 \text{ la pareja será } (10, 10) \text{ y su suma } S = 20.$$

**33) Una caja cerrada de base cuadrada debe tener un volumen de 2000 pulg<sup>3</sup>. El material del fondo y de la tapa de la caja tiene un costo de 0.03 dólares por pulg<sup>2</sup> y el material de los laterales cuesta 0.015 dólares por pulg<sup>2</sup>. Determine las dimensiones de la caja para que el costo total sea mínimo.**



Sea  $x$  pulgadas la longitud de un lado de la base cuadrada y  $C(x)$  dólares el costo total del material. El área de la base es  $x^2 \text{ pulg}^2$ . Sea  $y$  pulgadas la profundidad de la caja. Ver figura. Puesto que el volumen de la caja es el producto del área de la base por la profundidad.

$$x^2 y = 2000 \Rightarrow y = \frac{2000}{x^2}$$

Del enunciado:  $C_{total} = \text{área}(tapa \text{ y fondo}) + \text{área}(laterales) \Rightarrow C_{total} = 3(2x^2) + \frac{3}{2}(4xy)$

$$C(x) = 6x^2 + 6x\left(\frac{2000}{x^2}\right) \Rightarrow C(x) = 6x^2 + \frac{12000}{x}; \text{Dom}: (0, \infty)$$

$$C'(x) = 12x - \left(\frac{12000}{x^2}\right) \Rightarrow \text{si } C'(x) = 0 \Rightarrow \frac{12x^3 - 12000}{x^2} = 0 \Rightarrow x^3 = 1000 \Rightarrow x = 10(\text{v.c.})$$

$$C''(x) = 12 + \frac{24000}{x^3} \Rightarrow \text{sust.v.c. } C''(10) = 12 + \frac{24000}{(10)^3} > 0 \Rightarrow \text{en } x = 10 \exists \text{ mínimo}$$

$$\Rightarrow C_{\min}: x = 10 \text{ pulg}; y = 20 \text{ pulg} \text{ y el área de la base será de } 100 \text{ plg}^2$$

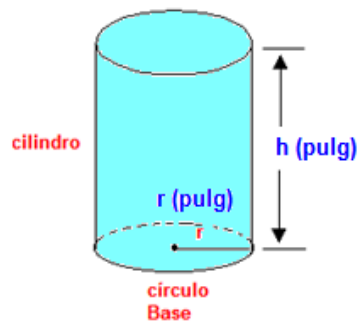
**34) Demostrar que de todos los rectángulos de perímetro p dado, el de máxima área es el cuadrado.**

perímetro del rectángulo:  $p = 2(x + y) \Rightarrow 2x + 2y = p \Rightarrow y = \frac{p-2x}{2}$ ; y su área:  $A = xy$

$$\text{sust. } A = x\left(\frac{p-2x}{2}\right) \Rightarrow A(x) = \frac{px - 2x^2}{2} \Rightarrow \frac{dA}{dx} = \frac{p-4x}{2}; \text{si } \frac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow p - 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{p}{4}(\text{v.c.})$$

$$\frac{d^2A}{dx^2} = -2 < 0 \Rightarrow \text{en } x = \frac{p}{4} \exists \text{ máximo} \Rightarrow y = \frac{p-2\left(\frac{p}{4}\right)}{2} \Rightarrow y = \frac{p}{4} \therefore \text{es un cuadrado: } A_{\max} = \frac{p^2}{16}$$

**35) Si una letra cerrada de estaño con un volumen de  $16\pi$  pulg<sup>3</sup> debe tener la forma de un cilindro circular recto, determinar la altura y el radio de dicha lata para utilizar la mínima cantidad de material en su manufactura.**



área superficial lateral:  $2\pi rh$  (pulg)<sup>2</sup> área de la parte superior:  $\pi r^2$  pulg<sup>2</sup>

$$\text{área de la base: } \pi r^2 \text{ (pulg)}^2 \Rightarrow S_t = 2\pi rh + 2\pi r^2$$



El volumen del cilindro circular recto:  $V = \pi r^2 h \Rightarrow 16\pi = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{16}{r^2}$

$$S(r) = 2\pi r \left( \frac{16}{r^2} \right) + 2\pi r^2 \Rightarrow S(r) = \frac{32\pi}{r} + 2\pi r^2; \text{Dom}S(r): (0, +\infty)$$

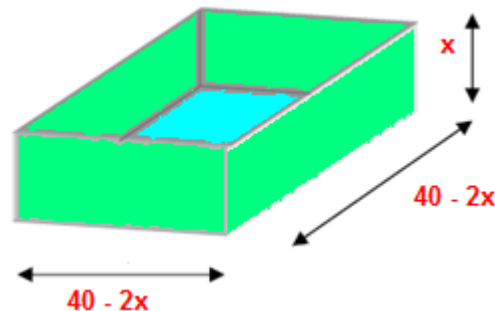
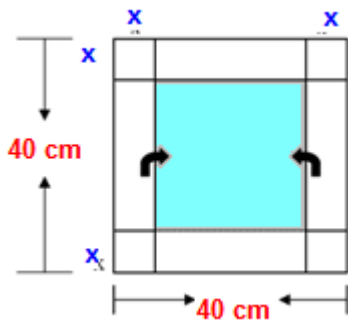
$$S'(r) = \frac{-32\pi}{r^2} + 4\pi r \Rightarrow S'(r) = \frac{-32\pi + 4\pi r^3}{r^2}; \text{si: } S'(r) = 0 \Rightarrow 4\pi r^3 = 32\pi \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2 \text{ (v.c.)}$$

$$S''(r) = \frac{64\pi}{r^3} + 4\pi \Rightarrow \text{sust. v.c.} \Rightarrow S''(2) = \frac{64\pi}{(2)^3} + 4\pi > 0 \Rightarrow r = 2 \exists \text{ mínimo} \Rightarrow h = 4$$

36) Se desean construir cajas de cartón sin tapa partiendo de cuadrados de lado 40 cm. a los que se les recortan las esquinas como indica la figura y doblando a lo largo de las líneas punteadas.

a) Determina la longitud  $x$  de los recortes para que el volumen de la caja sea máximo.

b) Determina el volumen máximo



Base un cuadrado de lado:  $(40 - 2x)$  y la altura  $(x) \Rightarrow V(x) = (40 - 2x)^2 x; \text{dom}: [0, 20]$

$$\frac{dV}{dx} = 2(40 - 2x)(-2)x + (40 - 2x)^2 \Rightarrow \frac{dV}{dx} = (40 - 2x)(-6x + 40) \Rightarrow \frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow x = 20; x = \frac{20}{3} \text{ (v.c.)}$$

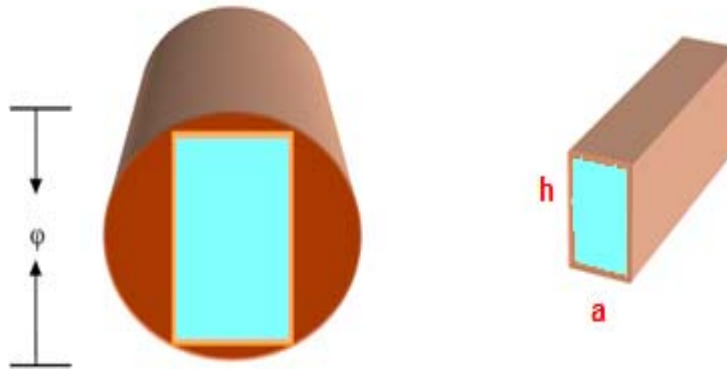
$$\frac{d^2V}{dx^2} = 8(3x - 40) \Rightarrow \text{sust. v.c.} \frac{d^2V}{dx^2} = 8\left(3\left(\frac{20}{3}\right) - 40\right) = -160 < 0 \exists \text{ máximo}$$

$$V_{\text{máx}} = \left(40 - 2\left(\frac{20}{3}\right)\right)^2 \left(\frac{20}{3}\right) \cong 4,74 \cdot 10^3 \text{ cm}^3$$

37) La resistencia de una viga de sección rectangular es proporcional al producto de su ancho  $a$  por el cuadrado de su altura  $h$ .

- Calcula las dimensiones de la viga de máxima resistencia que puede aserrarse de un tronco de madera de forma cilíndrica de diámetro  $\emptyset$  dado.
- Aplicalo al caso  $\emptyset = 15''$  (pulgadas)
- Si el tronco tiene largo  $L$  expresa en porcentaje del volumen total de madera el

d) volumen de la viga.



a) Sea:  $R$  la resistencia de la viga y  $k > 0$  una cte  $\Rightarrow R = kah^2$

$$\triangle ABC \Rightarrow \Phi^2 - a^2 = h^2 \Rightarrow R(a) = ka(\Phi^2 - a^2); \quad 0 \leq a \leq \Phi$$

$$\frac{dR}{da} = k(\Phi^2 - 3a^2) \Rightarrow \frac{dR}{da} = 0 \Rightarrow a = \frac{\phi}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\phi \cong 0.577\phi \text{ (v.c.)}$$

$$\frac{d^2R}{da^2} = -6ka \Rightarrow \text{sust. v.c. } \frac{d^2R}{da^2} = -6k\left(\frac{\phi}{\sqrt{3}}\right) < 0 \Rightarrow \text{en } x = \frac{\phi}{\sqrt{3}} \exists \text{ máximo}$$

$$\text{si } x = \frac{\phi}{\sqrt{3}} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{2}{3}}\phi \cong 0.816\phi$$

b) Si  $\Phi = 15'' \cong 38\text{cm} \Rightarrow a \cong 8.65'' \cong 22\text{cm}; \quad h \cong 12.24'' \cong 31\text{cm}$

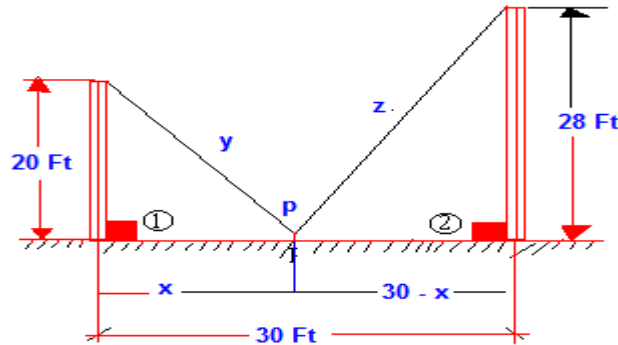
c) El volumen del trono cilíndrico de longitud  $L$  será:  $V = \pi \frac{\phi^2}{4} L$

$$\text{El volumen de la viga de longitud } L \text{ será: } V_1 = ahL \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{ahL}{\pi\left(\frac{\phi^2}{4}\right)L} = \frac{4ah}{\pi\phi^2} \cong 0.6$$

% de madera utilizada en la viga es 60% de la madera total.

38) Dos postes de 20 y 28 pies de altura respectivamente se encuentran a 30 pies de distancia. Se han de sujetar con cables fijados en un solo punto, desde el suelo a los

extremos de los puntos. ¿Dónde se han de fijar los cables para que la cantidad de cable a emplear sea mínima?



Sea  $W$  longitud del cable:  $W = y + z$

Del Triángulo 1:  $y^2 = x^2 + 400 \Rightarrow y = \sqrt{x^2 + 400} \quad Ec_1$

Del Triángulo 2:  $z^2 = (30-x)^2 + (28)^2 \Rightarrow z = \sqrt{(30-x)^2 + 784} \Rightarrow z = \sqrt{x^2 - 60x + 1684} \quad Ec_2$

$\Rightarrow w(x) = \sqrt{x^2 + 400} + \sqrt{x^2 - 60x + 1684}$ ; Siempre que:  $0 \leq x \leq 30$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 400}} + \frac{2x - 60}{2\sqrt{x^2 - 60x + 1684}} \Rightarrow \frac{dw}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 400}} + \frac{(x - 30)}{\sqrt{x^2 - 60x + 1684}}$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{x\sqrt{x^2 - 60x + 1684} + (x - 30)\sqrt{x^2 + 400}}{(\sqrt{x^2 + 400})(\sqrt{x^2 - 60x + 1684})}$$

$$\frac{dw}{dx} = 0 \Rightarrow x\sqrt{x^2 - 60x + 1684} + (x - 30)\sqrt{x^2 + 400} = 0$$

$$\left[ x\sqrt{x^2 - 60x + 1684} \right]^2 = \left[ (x - 30)\sqrt{x^2 + 400} \right]^2 \Rightarrow x^2(x^2 - 60x + 1684) = (x - 30)^2(x^2 + 400)$$

$$x^4 - 60x^3 + 1684x^2 = [900 - 60x + x^2](x^2 + 400)$$

$$x^4 - 60x^3 + 1684x^2 = 900x^2 - 60x^3 + x^4 + 360.000 - 24000x + 400x^2$$

$$x^4 - 60x^3 + 1684x^2 = 1300x^2 - 60x^3 + x^4 - 24000x + 360.000$$

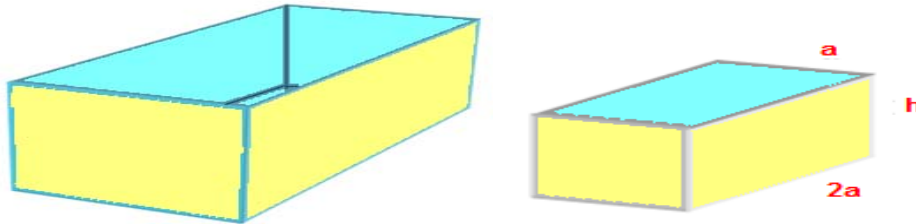
$$1684x^2 = 1300x^2 - 24000x + 360000$$

$$(384x^2 + 24.000x - 360.000 = 0) / 192 \Rightarrow 2x^2 + 125x - 1875 = 0$$

$$(x + 75)(2x - 25) = 0 \Rightarrow x = -75 \quad \text{ó} \quad x = 12.5$$

Como  $x = -75 \notin [0, 30]$  y los extremos son soluciones factibles  $x = (12.5 \text{ v.c.})$

39) Se desea construir un tanque con forma de paralelepípedo rectangular de  $45 \text{ m}^3$  de volumen, con la parte superior abierta según indica la figura. El largo del rectángulo base debe ser doble del ancho. El material de la base tiene un costo de  $100 \frac{\$}{\text{m}^2}$  y el de las paredes de  $80 \frac{\$}{\text{m}^2}$ . Determina las dimensiones del recipiente para que el costo de los materiales sea mínimo, así como el correspondiente precio del tanque.



El costo del tanque:  $C_T = C_{base} + C_{sup.lat.}$

El costo del material de la base será:  $C_{base} = 100.S_{base} = 100(2)a^2 \Rightarrow C_{base} = 200 a^2$

Costo de la superficie lateral:  $C_{lat} = 80S_{lat} = 80(6ah) \Rightarrow C_{lat} = 480ah$

$C_T = 200a^2 + 480ah$ ; como:  $V_T = 45\text{m}^3 \Rightarrow V_T = a2ah \Rightarrow V_T = 2a^2h \Rightarrow 2a^2h = 45 \Rightarrow h = \frac{45}{2a^2}$

$C_T(a) = 200a^2 + \frac{10800}{a}$ ; donde:  $a > 0 \Rightarrow \frac{dC_T}{da} = 400a - \frac{10800}{a^2}$

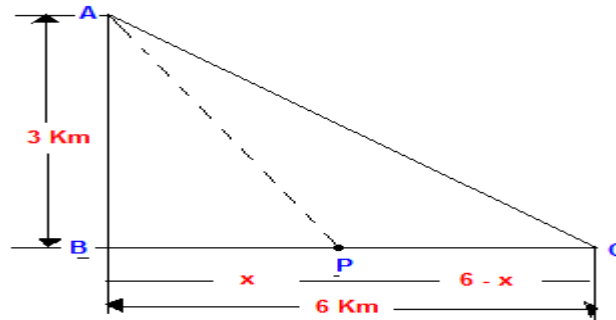
$\frac{dC_T}{da} = 0 \Rightarrow 400a^3 - 10800 = 0 \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{10800}{400}} \Rightarrow a = \sqrt[3]{27} = 3(\text{v.c.})$

$\frac{d^2C_T}{da^2} = 400 + \frac{21600}{a^3} \Rightarrow \text{sust v.c.} \frac{d^2C_T}{da^2} = 400 + \frac{21600}{(3)^3} > 0 \Rightarrow a = 3 \exists \text{ un mínimo}$

si:  $a = 3 \Rightarrow h = 2.5 \text{ m} \Rightarrow \text{Las dimensiones: } a = 3\text{m}, h = 2.5\text{m}, L = 6\text{m}; C_T(3) = \$5400.$

40) Los Puntos A y B están opuestos uno al otro y separados por el mar 3 Km. El punto C está en la misma orilla que B y 6 Km a su derecha. Una compañía de teléfonos desea

tender un cable de A a C. Si el costo por km de cable es 25% más caro bajo el agua que en tierra. ¿Qué línea de cable sería menos costosa para la compañía?



$$\overline{AP} = \text{Cantidad de cable bajo el agua.} \Rightarrow \triangle ABP \Rightarrow \overline{AP} = \sqrt{x^2 + 9}$$

$$\overline{PC} = \text{Cantidad de cable por tierra.} \Rightarrow \overline{PC} = 6 - x$$

$P$  = Punto cualquiera entre  $\overline{BC}$ .; donde  $0 \leq x \leq 6$

Si  $a$  = costo en Bs. De cada km de cable bajo tierra

$b$  = costo en Bs. De cada km de cable por tierra.

$$a = b + \frac{25b}{100} \Rightarrow a = b + \frac{b}{4} \Rightarrow a = \frac{5b}{4} \Rightarrow b = \frac{4a}{5}$$

El costo de cable bajo el agua:  $a\sqrt{x^2 + 9}$ ; El costo de cable por tierra:  $b(6 - x)$

El costo total:  $C(x) = a\sqrt{x^2 + 9} + b(6 - x) \Rightarrow C(x) = a\sqrt{x^2 + 9} + \frac{4a}{5}(6 - x)$

$$C'(x) = a \left[ \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{4}{5} \right] \Rightarrow C'(x) = a \left[ \frac{5x - 4\sqrt{x^2 + 9}}{5\sqrt{x^2 + 9}} \right]$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 5x - 4\sqrt{x^2 + 9} = 0 \Rightarrow [5x]^2 = [4\sqrt{x^2 + 9}]^2 \Rightarrow 25x^2 = 16(x^2 + 9)$$

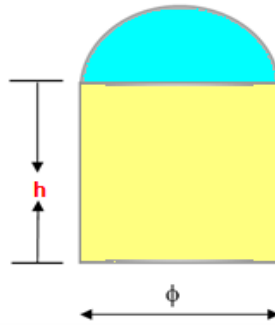
$$25x^2 = 16x^2 + 144 \Rightarrow 9x^2 = 144 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4 \Rightarrow x = 4 \text{ (v.c.)} \in [0, 6]$$

$$C(0) = \frac{39}{5}a; \quad C(6) = 3a\sqrt{5}; \quad C(4) = \frac{33}{5}a \Rightarrow \text{El valor menor es cuando } x = 4$$

$$\text{O también } C''(x) = a \left[ \frac{(x^2 + 9)^{1/2} - x(x^2 + 9)^{-1/2}(2x)}{(x^2 + 9)} \right] \Rightarrow C''(x) = 9a \left[ \frac{(x^2 + 9)^{1/2}}{(x^2 + 9)} \right]$$

$$C''(x) = \frac{9a}{\sqrt{(x^2 + 9)}} \Rightarrow C''(4) > 0 \exists \text{ mínimo}$$

41) Se desea construir un silo de forma cilíndrica rematado por una bóveda semiesférica. El costo de construcción por  $m^2$  es doble en la bóveda que en la parte cilíndrica. Encuentra las dimensiones  $h$  y  $\phi$  del silo de volumen  $V$  dado, de forma que el costo de construcción sea mínimo.



Sea:  $R$  radio de la base;  $h$  la altura de la parte cilíndrica.

Sup. lateral =  $2\pi Rh$ ; Sup. bóveda =  $2\pi R^2$

Costo de Sup lateral:  $A \left(\frac{\$}{m^2}\right)$ ; Costo de bóveda:  $2A \left(\frac{\$}{m^2}\right) \Rightarrow$

$$C_T = 2\pi RhA + 2\pi R^2(2A) \Rightarrow C_T = 2\pi AR(2R + h)$$

$$\text{si } V \text{ es volumen dado: } V = \pi R^2 h + \frac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow h = \frac{V - \frac{4\pi R^3}{3}}{\pi R^2} \Rightarrow h = \frac{3V - 4\pi R^3}{3\pi R^2}$$

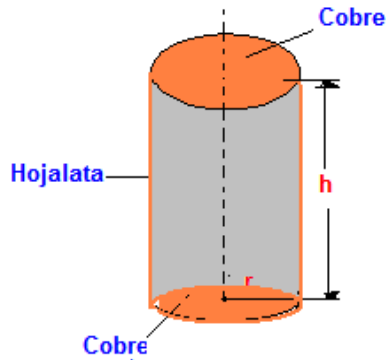
$$C_T(R) = 2A \left( \frac{4\pi R^3 + 3V}{3R} \right) \Rightarrow \frac{dC_T}{dR} = 2A \left( \frac{8\pi R^3 - 3V}{3R^2} \right) \Rightarrow \frac{dC_T}{dR} = 0 \Rightarrow -3V + 8\pi R^3 = 0 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3V}{8\pi}} \text{ (v.c.)}$$

$$\frac{d^2 C_T}{dR^2} = \left( \frac{4A(4\pi R^3 + 3V)}{3R^3} \right) \Rightarrow \text{sust. v.c. } \frac{d^2 C_T}{dR^2} > 0 \exists (\text{mínimo})$$

$$\text{Como } \phi = 2R \Rightarrow \phi = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}} \Rightarrow h = \frac{V - \frac{4}{3}\pi R^3}{\pi R^2} \Rightarrow h = \frac{V - \frac{2}{3}\pi \frac{3V}{8\pi}}{\pi \sqrt[3]{\frac{9V^2}{64\pi^2}}}$$

42) Se va a construir un calentador para agua en el forma de un cilindro circular recto con eje vertical, usando para ello una base de cobre y lados de hojalata; si el cobre

cuesta 5 veces lo que la hojalata. Calcule la razón se la altura al radio  $r$ , que hará que el costo sea mínimo cuando el volumen  $V$  es constante.



$$\text{Sean: } r = \text{Radio}; h = \text{Altura}; V = \text{Volumen, del cilindro} \Rightarrow V = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}$$

$$C_T = C_{\text{tapas}} + C_{\text{lados}} \Rightarrow \text{si: } a_{\text{cilindro}} = 2\pi r h; a_{\text{círculo}} = \pi r^2, \text{ además a el Costo del material}$$

$$C_{\text{tapas (cobre)}} = 5a[2\pi r^2]; C_{\text{lados (hojalata)}} = a[2\pi r h] \Rightarrow C_T = 5a[2\pi r^2] + a[2\pi r h]$$

$$\text{sust. } h \Rightarrow C(r) = 10a\pi r^2 + 2a\pi r \left( \frac{V}{\pi r^2} \right) \Rightarrow C(r) = 10a\pi r^2 + 2a \left( \frac{V}{r} \right) \Rightarrow C(r) = 2a \left[ 5\pi r^2 + \frac{V}{r} \right]$$

$$C'(r) = 2a \left[ 10\pi r - \frac{V}{r^2} \right] \Rightarrow C'(r) = 2a \left[ \frac{10\pi r^3 - V}{r^2} \right] \Rightarrow \text{si: } C'(r) = 0 \Rightarrow 10\pi r^3 - V = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{10\pi}} \text{ (v.c.)}$$

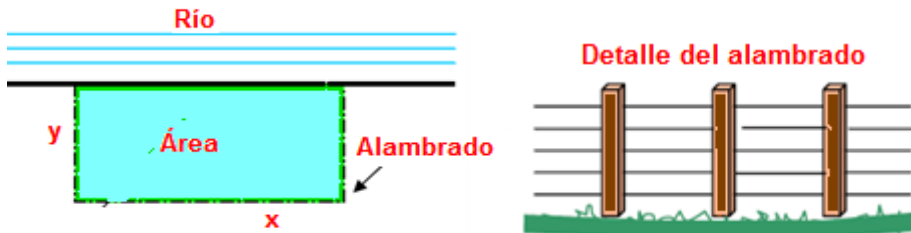
$$C''(r) = 2a \left[ 10\pi + \frac{2V}{r^3} \right] \Rightarrow C''(r) = 4a \left[ 5\pi + \frac{V}{r^3} \right] \Rightarrow \text{sust. v.c.} \Rightarrow C'' \left[ \sqrt[3]{\frac{V}{10\pi}} \right] = 4a \left[ 5\pi + \frac{V}{\left( \sqrt[3]{\frac{V}{10\pi}} \right)^3} \right]$$

$$C'' \left[ \sqrt[3]{\frac{V}{10\pi}} \right] = 4a \left[ 5\pi + \frac{10\pi V}{V} \right] \Rightarrow C'' \left[ \sqrt[3]{\frac{V}{10\pi}} \right] = 4a[15\pi] \Rightarrow C'' \left[ \sqrt[3]{\frac{V}{10\pi}} \right] = 60\pi a > 0 \therefore \exists \text{ mínimo.}$$

$$\text{si: } r = \sqrt[3]{\frac{V}{10\pi}} \Rightarrow h = \frac{V}{\pi \left( \sqrt[3]{\frac{V}{10\pi}} \right)^2}$$

43) Sobre la ribera de un río cuya orilla se supone rectilínea se desea alambra una superficie rectangular de 10 hectáreas. Admitiendo que el costo de alambrado es proporcional a la longitud a alambra, dimensionar el rectángulo para que el costo de alambra sea mínimo. Se supone que no se alambra sobre la ribera. Recuerda que

1 hectárea = 10.000 m<sup>2</sup>. Si el alambrado se construye con 5 hilos y el rollo de 1.000 m vale U\$S 35. Calcula además el costo del alambre necesario.



Sea:  $L$  a su longitud (m)  $\Rightarrow L = x + 2y$ ; y  $A$  el área  $\Rightarrow A = xy \Rightarrow y = \frac{A}{x} \Rightarrow L(x) = x + \frac{A}{x}$ ;  $x \geq 0$

$$\frac{dL}{dx} = 1 - \frac{2A}{x^2} \Rightarrow \frac{dL}{dx} = \frac{x^2 - 2A}{x^2} \Rightarrow \frac{dL}{dx} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2A} \text{ (v.c.)}$$

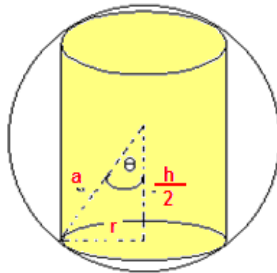
$$\frac{d^2L}{dx^2} = \frac{4A}{x^3} \Rightarrow \text{sust. (v.c.)} \Rightarrow \frac{d^2L}{dx^2} > 0 \Rightarrow \exists \text{mínimo} \Rightarrow \text{si } x = \sqrt{2A} \Rightarrow y = \frac{A}{\sqrt{2A}} = \frac{\sqrt{2A}}{2}$$

como: 1 Hectaria = 10000 m<sup>2</sup>  $\Rightarrow x \cong 447,20 \text{ m}$ ;  $y \cong 223,60 \text{ m}$ ;  $L = 894,40 \text{ m}$

Además, el alambrado debe tener 5 hilos,  $\Rightarrow L_{\text{total}} = 4472 \text{ m}$

y el costo total de alambre es de U\$S 156,52.

44) Un cilindro circular recto va a ser inscrito en una esfera con determinado radio. Calcular la razón de la altura del radio de la base del cilindro que tenga la mayor área de superficie lateral.



Sean:  $\theta$  el ángulo al centro de las esferas,  $r$ : radio del cilindro;  $h$ : altura

$S$ :  $S = 2\pi rh$ : áreas de la superficie lateral del cilindro.

De la figura:  $r = a \sin \theta$ ;  $h = 2a \cos \theta \Rightarrow S = 2\pi (a \sin \theta) (2a \cos \theta) \Rightarrow$

$S(\theta) = 4\pi a^2 (\sin \theta \cos \theta)$ ;  $\text{Dom}(0, \frac{\pi}{2})$

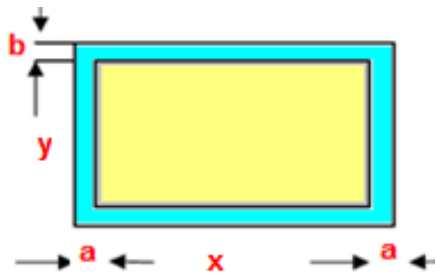


$$\frac{dS}{d\theta} = 4\pi a^2 (2\cos^2 \theta - 1) \Rightarrow \frac{dS}{d\theta} = 0 \Rightarrow 2\cos^2 \theta - 1 = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \text{ (v.c.)} \in \text{Dom}\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d^2 S}{d\theta^2} = -16\pi a^2 \sin\theta \cos\theta \Rightarrow \frac{d^2 S}{d\theta^2} = -8\pi a^2 \sin 2\theta; \text{ sust. v.c. } \frac{d^2 S}{d\theta^2} = -8\pi a^2 < 0 \exists \text{ máximo}$$

$$r = a \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow r = \frac{a\sqrt{2}}{2}; \quad h = 2a \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow h = \frac{2a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow h = a\sqrt{2} \Rightarrow \frac{h}{r} = 2 \text{ (razón buscada)}$$

45) Una fábrica necesita una superficie de piso de forma rectangular y área  $A \text{ m}^2$  para carga de materiales. Para cerrar esa superficie se construirán paredes de espesores fijos de  $a$  metros y  $b$  metros como indica la figura.



Dimensiona el rectángulo de carga para que la superficie rectangular exterior necesaria sea mínima.

Sea:  $x$  e  $y$  los lados del rectángulo, de área  $A$ ;  $a, b$ : los espesores de las paredes.

Los lados del rectángulo exterior:  $(x+2a)$  e  $(y+2b)$  y su área  $S$ :  $S = (x+2a)(y+2b)$

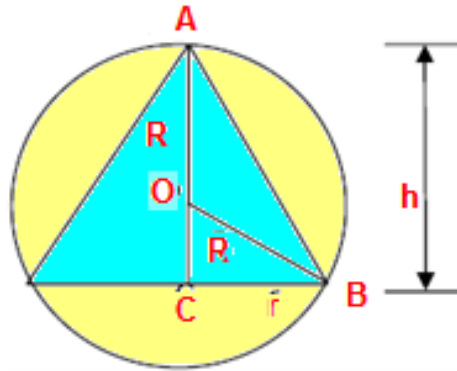
además:  $A = xy \Rightarrow y = \frac{A}{x} \Rightarrow S(x) = (x+2a)\left(\frac{A}{x} + 2b\right)$ ; Donde:  $x > 0$

$$\frac{dS}{dx} = \left(\frac{A}{x} + 2b\right) + (x+2a)\left(-\frac{A}{x^2}\right) \Rightarrow \frac{dS}{dx} = \frac{2bx^2 - 2aA}{x^2} \Rightarrow \frac{dS}{dx} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{aA}{b}} \text{ (v.c.)}$$

$$\frac{d^2 S}{dx^2} = \frac{4aA}{x^3} \Rightarrow \text{sust. v.c. } \frac{d^2 S}{dx^2} = \frac{4aA}{\sqrt{\left(\frac{aA}{b}\right)^3}} > 0 \Rightarrow \exists \text{ mínimo} \Rightarrow \text{si: } x = \sqrt{\frac{aA}{b}} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{b}{a}} A$$

se deduce que: si  $(a=b)$  el rectángulo de carga y el rectángulo exterior serán cuadrados.

46) Encuentra las dimensiones  $r$  y  $h$  del cono recto de base circular de volumen máximo que puede inscribirse en una esfera de radio  $R$  dado.



$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} \text{ volumen del cono}$$

El cono de volumen máximo debe tener su base en la semiesfera inferior pues todo cono tiene otro con base simétrica respecto al plano diametral de la esfera  $\wedge AC$ , en la semiesfera superior, pero de menor altura, lo que permite variar  $h$  en  $[R, 2R]$

$$\text{Del triángulo } OCB \Rightarrow R^2 = (h-R)^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - (h-R)^2 \Rightarrow r^2 = 2hR - h^2$$

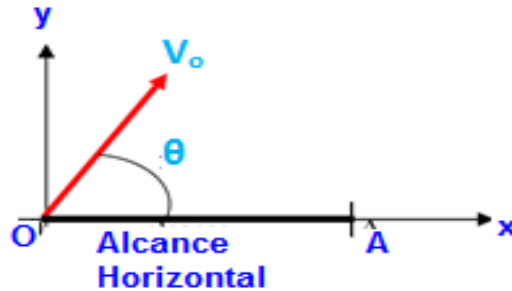
$$V(h) = \frac{\pi}{3} [2hR - h^2] h \Rightarrow V(h) = \frac{\pi}{3} (2Rh^2 - h^3); \text{ Donde: } R \leq h \leq 2R$$

$$\frac{dV}{dh} = \frac{\pi}{3} (4Rh - 3h^2) \Rightarrow \text{si: } \frac{dV}{dh} = 0 \Rightarrow h = 0; \quad h = \frac{4R}{3} \text{ (v.c.)}$$

$$\frac{d^2V}{dh^2} = \frac{\pi}{3} (4R - 6h) \Rightarrow \text{sust v.c. } \frac{d^2V}{dh^2} = \frac{\pi}{3} (4R - 6(\frac{4R}{3})) < 0 \exists \text{ máximo} \Rightarrow \text{si: } h = \frac{4R}{3} \Rightarrow r = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$$

47) Se lanza un proyectil en el vacío desde un punto  $O$  (ver figura) con velocidad  $V_0$  y ángulo de inclinación  $\theta$ . En el sistema  $(XOY)$  indica, la trayectoria del proyectil responde a la función:  $Y(x) = \frac{-g}{2V_0^2 \cos^2 \theta} \cdot x^2 + (tg\theta)x$ ;  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ;  $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$  a) Para  $V_0$  y  $\theta$  dadas, encuentra la altura máxima ( $h_{\text{máx}}$ ) que alcanza el proyectil. b) Calcula el

alcance  $L$  del proyectil y suponiendo  $V_0$  constante, indicando el valor  $\theta_0$  que da máximo alcance.



$$a) y(x) = \frac{-g}{2V_0^2 \cos^2 \theta} x^2 + (tg\theta)x; \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; \text{ Siendo } v_0 \text{ y } \theta \text{ const}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-g}{V_0^2 \cos^2 \theta} x + tg\theta \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{g}{V_0^2 \cos^2 \theta} x = tg\theta \Rightarrow x = \frac{V_0^2 (\text{sen}\theta \cos \theta)}{g}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-g}{V_0^2 \cos^2 \theta} < 0 \Rightarrow \exists \text{ máximo}$$

$$y_{\text{máx}} = \frac{-g}{2V_0^2 \cos^2 \theta} \left( \frac{V_0^4 \text{sen}^2 \theta \cos^2 \theta}{g^2} \right) + tg\theta \left( \frac{V_0^2 \text{sen}\theta \cos \theta}{g} \right) \Rightarrow y_{\text{máx}} = \frac{V_0^2 \text{sen}^2 \theta}{2g}$$

$$b) \text{ Sea } L \text{ alcance} \Rightarrow L = 2x \Rightarrow L = 2 \left( \frac{V_0^2}{g} \text{sen}\theta \cos \theta \right) \Rightarrow L(\theta) = \frac{V_0^2}{g} \text{sen}(2\theta); \text{ Para: } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{dL}{d\theta} = \frac{V_0^2}{g} \cos(2\theta) \cdot 2 \Rightarrow \frac{dL}{d\theta} = \frac{2V_0^2 \cos(2\theta)}{g} \Rightarrow \text{si: } \frac{dL}{d\theta} = 0 \Rightarrow \cos(2\theta) = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \text{ (v.c.)}$$

$$\frac{d^2L}{d\theta^2} = \frac{-4V_0^2 \text{sen}(2\theta)}{g} \Rightarrow \text{sust. v.c.} \Rightarrow \frac{d^2L}{d\theta^2} = \frac{-4V_0^2 \text{sen}\left(2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}{g} = \frac{-4V_0^2}{g} < 0 \Rightarrow \exists \text{ máximo}$$

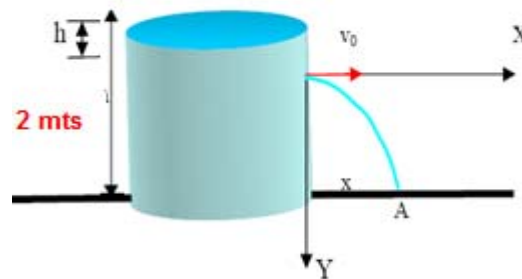
$$\text{en: } \theta = \frac{\pi}{4}$$

48) Un tanque de 2 m. de altura apoyado en el piso se mantiene lleno de agua mientras que por un orificio practicado en una de sus paredes escapa un chorro que golpea el piso en el punto A, a una distancia  $x$  de la pared. Admite que el chorro tiene forma parabólica y que en el sistema (XY) indicado su ecuación es:

$$Y = \frac{g}{2 \cdot V_0^2} \cdot x^2,$$

Donde  $V_0$  es la velocidad del chorro a la salida del orificio y  $g$  la aceleración de la gravedad. Sabiendo que  $V_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ , se pide que determines la profundidad  $h$  a que

debe encontrarse el orificio para que el chorro golpee el piso a máxima distancia del tanque.



$$\text{Dada: } y = \frac{gx^2}{2V_0^2}; \text{ de la Fig. el punto A es: } A(x, 2-h) \Rightarrow 2-h = \frac{gx^2}{2V_0^2}$$

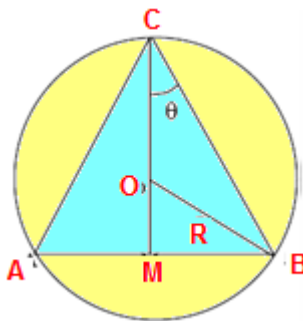
$$\text{la velocidad de salida del líquido } (V_0): V_0^2 = 2gh \Rightarrow 2-h = \frac{gx^2}{2(2gh)} \Rightarrow 2-h = \frac{x^2}{4h}$$

$$x^2 = 4h(2-h) \Rightarrow x(h) = 2\sqrt{2h-h^2} \text{ Donde: } x \geq 0; 0 \leq h \leq 2$$

$$\frac{dx}{dh} = \frac{2(1-h)}{\sqrt{h(2-h)}} \Rightarrow \text{si } \frac{dx}{dh} = 0 \Rightarrow h = 1(\text{v.c.})$$

$$\frac{d^2x}{dh^2} = \frac{-2}{\sqrt{(h(2-h))^3}} < 0 \Rightarrow \text{en } h = 1 \exists \text{ máximo} \Rightarrow x(h) = 2\sqrt{2h-h^2} \Rightarrow x = 2$$

49) Considera una circunferencia de radio R dado. Se inscriben en ella triángulos isósceles ABC. a) Calcula el perímetro de los triángulos en función del ángulo  $\theta$ . b) Halla el triángulo de perímetro máximo.



a.) sea  $p$  el perímetro  $\triangle ABC$ .

Del  $\triangle OMB$ :  $\angle MOB = 2\theta$  (ángulo central e inscrito correspondientes)

$$\Rightarrow MB = R \text{ sen}(2\theta) \Rightarrow AB = 2(R \text{ sen}(2\theta))$$

$$\sphericalangle CMB: BC = \frac{MB}{\sin \theta} = \frac{R \sin(2\theta)}{\sin \theta} \Rightarrow BC = \frac{2R \sin(2\theta)}{\sin \theta} \Rightarrow BC = 2R \cos(\theta)$$

$$p(\theta) = 2R \sin(2\theta) + 2(2R \cos \theta) \Rightarrow p(\theta) = 2R(\sin(2\theta) + 2 \cos \theta) \Rightarrow p(\theta) = 4R \cos \theta (1 + \sin \theta)$$

$$b.) \frac{dp}{d\theta} = 4R[-\sin \theta (\sin \theta + 1) + \cos \theta \cos \theta] \Rightarrow \frac{dp}{d\theta} = 4R(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta - \sin \theta) \text{ Para: } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{dp}{d\theta} = 4R(-2\sin^2 \theta - \sin \theta + 1); \text{ si } \frac{dp}{d\theta} = 0 \Rightarrow -2\sin^2 \theta - \sin \theta + 1 = 0 \Rightarrow \sin \theta = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-4}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \text{ (v.c.) en } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{d^2 p}{d\theta^2} = -12R \cos \theta \Rightarrow \text{sust. v.c. } \frac{d^2 p}{d\theta^2} = -12R \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -6R\sqrt{3} < 0 \Rightarrow \exists \text{ máximo}$$

$$p\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4R \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + 1\right) = 3\sqrt{3}R \Rightarrow \text{El triángulo es equilátero.}$$

50) Un generador de fuerza electromotriz constante  $\varepsilon$  y resistencia interna  $r$  se conecta a una resistencia de carga  $R$ . en esas condiciones la potencia  $P$  disipada por la resistencia  $R$  esta expresada por la relación:  $P = \frac{R \cdot \varepsilon^2}{(R+r)^2}$ ,  $R$  y  $r$  en  $\Omega$ ,  $V$  en voltios. Determine el valor de  $R$  en función de  $r$  para que la potencia sea máxima.

$$P(R) = \frac{R \varepsilon^2}{(R+r)^2} \Rightarrow \frac{dP}{dR} = \varepsilon^2 \left[ \frac{(R+r)^2 - R \cdot 2(R+r)}{(R+r)^4} \right] \Rightarrow \frac{dP}{dR} = \varepsilon^2 \frac{(-R^2 + r^2)}{(R+r)^4}$$

$$\frac{dP}{dR} = 0 \Rightarrow -R^2 + r^2 = 0 \Rightarrow R = r \text{ (v.c.)}$$

$$\frac{d^2 P}{dR^2} = \frac{2\varepsilon^2 (R-2r)}{(R+r)^4} \Rightarrow \text{sust. v.c. } \frac{d^2 P}{dR^2} = \frac{2\varepsilon^2 (R-2R)}{(R+R)^4} < 0 \Rightarrow \exists \text{ máximo} \Rightarrow P_{\text{máx}} = \frac{\varepsilon^2}{4R}$$

51) Determine los valores de las constantes  $a$ ,  $b$ , y  $c$  para la curva  $y = \frac{ax}{b + cx^2}$  presente extremos relativos en  $(1, -\frac{1}{2})$  y  $(1, \frac{1}{2})$

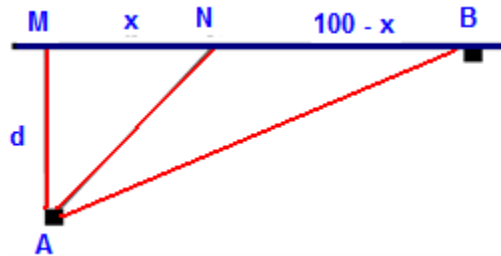
La derivada correspondiente a la función objeto de estudio está dada por:  $y' = \frac{a(b - cx^2)}{(b + cx^2)^2}$ .

La existencia de extremos relativos en  $x = \pm 1$  indica que en este par de valores  $y' = 0$ , esto es,  $a(b - c) = 0$ . De aquí,  $a = 0$ , o  $b = c$ . De acá sólo es admisible  $b = c$ . Como los puntos dados satisfacen la ecuación dada y usando la última relación obtenida, se tiene:

$$-\frac{a}{b+c} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{2b} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = b.$$

De esta forma, si  $a = b = c$ , la ecuación en cuestión se puede escribir como  $y = \frac{ax}{a+ax^2} = \frac{ax}{a(1+x^2)} = \frac{x}{1+x^2}$ . Por lo tanto, es irrelevante el valor de  $a$ , lo verdaderamente importante es la relación obtenida entre las constantes.

**52) Un vehículo debe trasladarse desde el punto A hasta el punto B de la figura. El punto A dista 36 Km de una carretera rectilínea. Sobre la carretera el vehículo puede desarrollar una velocidad de  $100 \frac{Km}{h}$ , mientras que sobre el terreno puede desarrollar una velocidad de  $80 \frac{Km}{h}$ . a) Se desea saber cual es el recorrido que debe realizar el conducto para que el tiempo empleado en ir desde A hasta B sea mínimo. b) Calcula ese tiempo.**



sea:  $v_1 = 80 \frac{km}{h}$  rapidez en el terreno,  $v_2 = 100 \frac{km}{h}$  rapidez en la carretera.

$MN = d_{MN} = x$ ,  $NB = d_{NB} = 100 - x$ ,  $d_{AM} = d = 36km$

Del  $\triangle AMN$ :  $d_{AN} = \sqrt{d^2 + x^2}$

Por M.R.U.  $t_{AN} = \frac{\sqrt{d^2 + x^2}}{v_1}$ ;  $t_{NB} = \frac{100 - x}{v_2} \Rightarrow t(x) = \frac{\sqrt{d^2 + x^2}}{v_1} + \frac{100 - x}{v_2}$ ;  $[0, 100]$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{v_1 \sqrt{d^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{x}{v_1 \sqrt{d^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2} = 0 \Rightarrow v_2 x = v_1 \sqrt{d^2 + x^2}$$

$$v_2^2 x^2 - v_1^2 x^2 = d^2 v_1^2 \Rightarrow x^2 = \frac{d^2 v_1^2}{v_2^2 - v_1^2} \Rightarrow x = \frac{\pm d v_1}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}} \Rightarrow x = \frac{(36)(80)}{\sqrt{(100)^2 - (80)^2}} \Rightarrow x = 48(v.c.)$$

$$\frac{d^2 t}{dx^2} = \frac{d^2}{v_1 \sqrt{(d^2 + x^2)^3}} \Rightarrow \text{sust. v.c. } \frac{d^2 t}{dx^2} > 0 \Rightarrow \exists \text{ mínimo en } x = 48$$

b.) El tiempo de recorrido sera:  $t = 1h 16m$

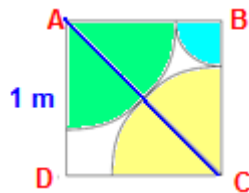
53) Demuestre que la curva de ecuación  $y = \frac{a}{x} - x^2$  no tiene mínimo relativo para ningún valor de  $a$ .

El dominio de la curva está dado por,  $R - \{0\}$ . De donde existe una asíntota vertical en  $x = 0$ ,

$$y' = \frac{-(a + 2x^3)}{x^2} \Rightarrow \text{si } y' = 0 \Rightarrow a + 2x^3 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{-a}{2}} \text{ (v.c)}$$

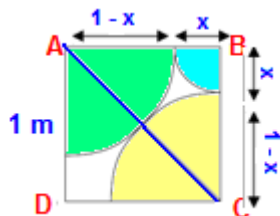
$$y'' = \frac{2a}{x^3} - 2 \Rightarrow y'' = \frac{2(a - x^3)}{x^3} \Rightarrow \text{sust v.c.} \Rightarrow y'' = \frac{2\left[a - \left(\frac{-a}{2}\right)\right]}{\frac{-a}{2}} = -6 < 0 \Rightarrow \text{máximo en } x = \sqrt[3]{\frac{-a}{2}}$$

54) Se considera un cuadrado de lado 1 m. En tres vértices consecutivos, de él se toman los centros de tres circunferencias de forma que los radios de las que tienen centros en vértices consecutivos, sumen 1 m. a) Encuentra los valores extremos de los radios de forma que los cuadrantes de círculo sombreados no se solapen. b) calcular los radios de las circunferencias para que el área sombreada sea mínima. c) calcula dicha área.



a.) Como los círculos de centros A y C son de igual radio  $x$ , el máximo valor para que aquellos no se solapen será, la mitad de la diagonal del cuadrado.

$$\text{siendo el lado } L \text{ del cuadrado de } 1\text{m} \Rightarrow x_{\text{máx}} = \frac{\sqrt{2}L}{2} \Rightarrow x_{\text{máx}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{m}$$



b.) El área a considerar se compone de dos cuadrantes de círculo de radio  $x$  y un

$$\text{cuadrante de radio } 1-x \Rightarrow A(x) = 2\left(\frac{\pi x^2}{4}\right) + \frac{1}{4}\pi(1-x)^2$$

$$A(x) = \frac{3\pi x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow A(x) = \frac{\pi}{4}(3x^2 - 2x + 1); \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{\pi}{4}(6x - 2) \Rightarrow \frac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow 6x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \text{ (v.c.)}$$

$$\frac{d^2A}{dx^2} = \frac{6\pi}{4} \Rightarrow \frac{d^2A}{dx^2} = \frac{3\pi}{2} > 0 \Rightarrow \exists \text{ mínimo en } x = \frac{1}{3}$$

c.) área mínima será  $A_{\min} = \frac{\pi}{6}$

**55) Calcule los valores de las constantes a, b, c y d sabiendo que la curva de ecuación  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  tiene extremos relativos en  $(-1, \frac{11}{2})$  y  $(2, -8)$ .**

De  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow y' = 3ax^2 + 2bx + c$ . Usando los hechos de que los puntos dados satisfacen la ecuación de la curva y que  $y' = 0$  en  $x = -1$  y  $x = 2$ , se tiene el sistema de ecuaciones.

$$\left\{ \begin{array}{l} -a + b - c + d = \frac{11}{2} \quad (1) \\ 8a + 4b + 2c + d = -8 \quad (2) \\ 3a - 2b + c = 0 \quad (3) \\ 12a + 4b + c = 0 \quad (4) \end{array} \right.$$

Haciendo (2)-(1), sigue:  $3a + b + c = -\frac{9}{2}$  (5). De (5)-(3), queda:

$$3b = -\frac{9}{2} \Rightarrow b = -\frac{3}{2}. \text{ a partir de (4)-(3), obtenemos: } 3a + 2b = 0 \Rightarrow a = 1.$$

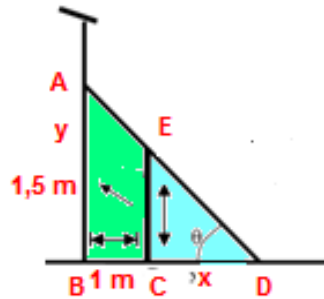
sustituyendo los valores calculados en (3) y luego en (1), se tiene:  $c = -6, d = 2$ .

**55) Se desea colocar una escalera apoyada en el suelo y en la pared de un galpón como se muestra en la figura. Paralelamente a la pared del galpón y a 1 m. de distancia corre una cerca de 1.50 m de altura. La escalera se apoyara también sobre la cerca. a) Calcula la longitud mínima que deberá tener la escalera para cumplir con las condiciones**



pedidas (se sugiere expresar la longitud de la escalera en función del ángulo que la misma forma con el piso). b) ¿A que altura de la pared del galpón apoyara la escalera?

c) ¿A que distancia de la cerca apoyara la escalera sobre el suelo?



$$\text{Del } \triangle ECD: \operatorname{tg} \theta = \frac{1.5}{x} \Rightarrow x = 1.5(\operatorname{tg} \theta); \text{ Del } \triangle ABD: \cos \theta = \frac{1+x}{L} \Rightarrow L = \frac{1+x}{\cos \theta}$$

$$L = \frac{1 + \frac{1.5}{\operatorname{tg} \theta}}{\cos \theta} \Rightarrow L = \frac{1.5 + \operatorname{tg} \theta}{\operatorname{sen} \theta}; 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{dL}{d\theta} = \frac{(\sec^2 \theta) \operatorname{sen} \theta - (1.5 + \operatorname{tg} \theta) \cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} \Rightarrow \frac{dL}{d\theta} = 0 \Rightarrow (1 + \operatorname{tg}^2 \theta) \operatorname{sen} \theta = (1.5 + \operatorname{tg} \theta) \cos \theta$$

$$(1 + \operatorname{tg}^2 \theta) \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \theta + 1.5 \Rightarrow \operatorname{tg}^3 \theta = 1.5 \Rightarrow \theta = \operatorname{Arctg} \sqrt[3]{1.5} = 1.14 \Rightarrow \theta \cong 0.85 \text{ rad} \cong 49^\circ (\text{v.c.})$$

$$\frac{d^2 L}{d\theta^2} = \frac{3 \cos^5 \theta + 3 \cos^3 \theta + 2 \operatorname{sen}^5 \theta + 2 \operatorname{sen}^3 \theta}{2 \operatorname{sen}^3 \theta \cos^3 \theta} \Rightarrow \text{sust v.c. } \frac{d^2 L}{d\theta^2} > 0 \Rightarrow \exists \text{mínimo} \Rightarrow L_{\min} \cong 3.51 \text{ m}$$

$$\text{b.) Del } \triangle ABD \text{ La altura "y" es: } y = L \operatorname{sen} \theta \cong 2.65 \text{ m}$$

$$\text{c.) Del } \triangle ECD \text{ "x" es: } x = \frac{1.5}{\operatorname{tg} \theta} \cong 1.30 \text{ m}$$

56) Determine los valores de a y b en la ecuación  $y = \sqrt[3]{2ax^2 + bx^3}$ , asumiendo que la curva en cuestión tiene un extremo relativo en  $(4, 2\sqrt[3]{4})$ , donde además existe la primera derivada.

A partir de las coordenadas del punto dado, se tiene:

$$\sqrt[3]{2 \cdot 4^2 a + 4^3 \cdot b} = 2\sqrt[3]{4} \Rightarrow \sqrt[3]{2 \cdot 4^2 (a + .2b)} = 2\sqrt[3]{4} \Rightarrow \sqrt[3]{2^3 \cdot 4(a + 2b)} = 2\sqrt[3]{4} \Rightarrow a + 2b = 1.$$

Como en  $x = 4$ ,  $y' = 0$ , sigue:  $a + 3b = 0$ . Resolviendo el sistema formado por estas ecuaciones, resulta:  $a = 3, b = -1$ .

57) ¿Cuál es la relación que debe existir entre los coeficientes  $a$ ,  $b$ , y  $c$  para que la curva  $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$  pueda tener puntos de inflexión?

$y' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \Rightarrow y'' = 12ax^2 + 6bx + 2c = 2(6ax^2 + 3bx + c)$  La posibilidad de puntos de inflexión se asocia a  $y'' = 0$ , esto es,  $6ax^2 + 3bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-3b \pm \sqrt{9b^2 - 24ac}}{12a} = \frac{-3b \pm \sqrt{3b^2 - 8ac}}{12a}$ , y estos posibles puntos de inflexión existen si  $3b^2 - 8ac \geq 0$ .

58) Se considera un circuito serie R-L-C, al que se le aplica un voltaje  $V(t)$  de variación sinusoidal dada por la expresión:  $v(t) = v_0 \text{sen}(wt)$  La intensidad  $I$  de la corriente que circula por el circuito viene dada por la expresión  $I(t) = I_0 \text{sen}(wt + \varphi)$ , El valor máximo  $I_0$  esta dado por la expresión:  $I_0 = \frac{V_0}{Z}$ . Donde  $Z$  es la impedancia del circuito y vale:  $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$  a) Expresa  $I_0$  como función de  $\omega$ . b) Suponiendo que la función angular  $\omega$  de la fuente puede variarse, halla el valor de  $\omega$  que corresponde al máximo valor de  $I_0$ . (El valor que hallaras se conoce como "Frecuencia de resonancia")

$$a.) I_0 = \frac{V_0}{Z}; \text{ como: } Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \Rightarrow I_0(\omega) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

b.) Dado que el voltaje  $V_0$  es constante, para maximizar  $I_0$  bastará minimizar el

$$\text{denominador} \Rightarrow L\omega = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow C\omega^2 = \frac{1}{L} \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad \omega > 0 \quad Z_{\min} = \sqrt{R^2} = R$$

59) Dada  $f(x) = x^m(1-x)^n$  donde  $m$  y  $n$  son enteros positivos mayores que 1, verifique que: a)  $f$  tiene un valor mínimo relativo en  $x = 0$ , si  $m$  es par. b)  $f$  tiene un valor

máximo relativo en  $x = \frac{m}{m+n}$ , siendo  $m$  y  $n$  pares o impares. c)  $f$  tiene un valor mínimo relativo en  $x = 1$ , si  $n$  es par.

$$f' = mx^{m-1}(1-x)^n + x^m n(1-x)^{n-1}(-1) = x^{m-1}(1-x)^{n-1}[m(1-x) - nx] = x^{m-1}(1-x)^{n-1}[m - (m+n)x]$$

Como puede observarse,  $f'(x) = 0$ , si  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = \frac{m}{m+n}$ . Además, como  $m$  y  $n$

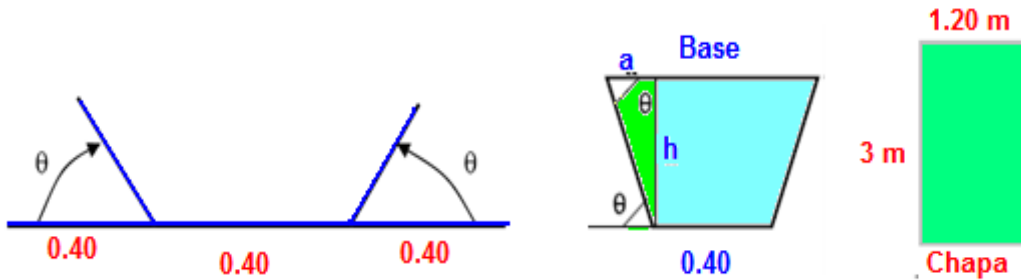
son enteros positivos mayores que, 1 entonces  $m-1 > 0$ ,  $n-1 > 0$ ,  $0 < \frac{m}{m+n} < 1$ . De

aquí, podemos construir la siguiente tabla, con un resumen correspondiente a la gráfica en cuestión.

Intervalos	f	f'	Conclusión
$x < 0$		-	f es decreciente
$x = 0$	$f(0) = 0$		Mín. (0,0)
$0 < x < \frac{m}{m+n}$		+	f es creciente
$x = \frac{m}{m+n}$	$f\left(\frac{m}{m+n}\right) = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$		Máx. $\left(\frac{m}{m+n}, \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}\right)$
$\frac{m}{m+n} < x < 1$		-	f es decreciente
$x = 1$	$f(1) = 0$		Mín. (1,0)
$x > 1$		+	f es creciente

60) Se dispone de una chapa metálica de forma rectangular de 1,20 m x 3 m. Se desea construir con ella un bebedero para animales procediendo a doblar la chapa como indica la figura, para formar la superficie lateral y el fondo. Las bases se confeccionan de

- madera dura. a) Determina el ángulo  $\theta$  para que el volumen del bebedero sea máximo.  
b) Calcula dicho volumen en litros.



$$a.) \text{ Superficie del trapecio base es: } S = \frac{0.40 + (0.40 + 2a)}{2} h$$

$$\text{De la fig. } \operatorname{sen} \theta = \frac{h}{0.40} \Rightarrow h = (0.40) \operatorname{sen} \theta; \quad \operatorname{cos} \theta = \frac{a}{0.40} \Rightarrow a = 0.40 \operatorname{cos} \theta$$

$$\Rightarrow \text{sust. } S(\theta) = \frac{0.40 + (0.40 + 0.80 \operatorname{cos} \theta)}{2} (0.40 \operatorname{sen} \theta) \Rightarrow S(\theta) = (0.16 + 0.16 \operatorname{cos} \theta) \operatorname{sen} \theta$$

$$\text{Sea: } V \text{ volumen del bebedero } \Rightarrow V = SL \Rightarrow \text{pero: } L = 3m \Rightarrow$$

$$V(\theta) = 3(0.16 + 0.16 \operatorname{cos} \theta) \operatorname{sen} \theta (m^3); \text{ Para: } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{dV}{d\theta} = 3[-0.16 \operatorname{sen}^2 \theta + (0.16 + 0.16 \operatorname{cos} \theta) \operatorname{cos} \theta] \Rightarrow \frac{dV}{d\theta} = 3(0.16)[- \operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{cos} \theta + \operatorname{cos}^2 \theta]$$

$$\frac{dV}{d\theta} = 0.48(2 \operatorname{cos}^2 \theta + \operatorname{cos} \theta - 1) \text{ si } \frac{dV}{d\theta} = 0 \Rightarrow 2 \operatorname{cos}^2 \theta + \operatorname{cos} \theta - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{cos} \theta = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4}$$

$$\operatorname{cos} \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \operatorname{Arc} \operatorname{cos} \left( \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \text{ (v.c.) en } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = \frac{-12 \operatorname{sen} \theta (4 \operatorname{cos} \theta + 1)}{25} \Rightarrow \text{sust v.c.} \Rightarrow \frac{d^2V}{d\theta^2} = \frac{-12 \operatorname{sen}(\frac{\pi}{3})(4 \operatorname{cos}(\frac{\pi}{3}) + 1)}{25} = \frac{-18\sqrt{3}}{25} < 0$$

$$\Rightarrow \exists \text{ máximo en } \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$b.) V\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\left(0.16 + 0.16 \operatorname{cos} \frac{\pi}{3}\right) \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cong 0.623 m^3 \cong 623 \text{ lt.}$$

61) Determine los valores de  $a$  y  $b$  en la ecuación  $y = ax^{\frac{4}{3}} + bx^{\frac{1}{3}}$  si la gráfica correspondiente presenta un punto de inflexión en  $(2, 6\sqrt[3]{2})$ .

$$y' = \frac{4}{3}ax^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}bx^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow y'' = \frac{4}{9}ax^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{9}bx^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}(2ax - b) = \frac{2(2ax - b)}{9\sqrt[3]{x^5}} \quad \text{La}$$

ecuación dada de la curva puede escribirse como:  $y = x^{\frac{1}{3}}(ax + b) = \sqrt[3]{x}(ax + b)$ . Como el punto satisface la ecuación de la curva, se tiene,  $\sqrt[3]{2}(2a + b) = 6\sqrt[3]{2} \Rightarrow 2a + b = 6$ .

Como la gráfica tiene un punto de inflexión en el punto dado, en  $x = 2$ ,  $y'' = 0$ , es decir,  $4a - b = 0$ . Resolviendo el sistema planteado, sigue:  $a = 1$ ,  $b = 4$ .

62) La intensidad de iluminación  $E$  en luz que produce un foco luminoso puntual en cualquier punto es directamente proporcional a la intensidad del foco  $I$  en candelas e inversamente proporcional al cuadrado de su distancia  $d$  al foco expresada en metros.

$E = \frac{K \cdot I}{d^2}$  Si dos focos luminosos se encuentran a una distancia  $L$  y tienen intensidades  $I_1$  e  $I_2$ . Halla el punto del segmento que los une donde la iluminación sea mínima. Se supondrá que la iluminación en cualquier punto es la suma de las iluminaciones producidas por cada foco.



$$E = \frac{KI_1}{x^2} + \frac{KI_2}{y^2} \Rightarrow E = K \left( \frac{I_1}{x^2} + \frac{I_2}{y^2} \right) \Rightarrow \frac{dE}{dx} = k \left( \frac{-2I_1}{x^3} + \frac{-2I_2}{y^3} \left( \frac{dy}{dx} \right) \right)$$

$$\text{además : } L = x + y \Rightarrow y = L - x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -1 \Rightarrow \frac{dE}{dx} = 2k \left( -\frac{I_1}{x^3} + \frac{I_2}{y^3} \right)$$

$$\text{si: } \frac{dE}{dx} = 0 \Rightarrow \left( \frac{-I_1}{x^3} + \frac{I_2}{y^3} \right) = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{I_2}{I_1} y^3 \Rightarrow x = y \sqrt[3]{\frac{I_2}{I_1}} \Rightarrow x = (L-x) \sqrt[3]{\frac{I_2}{I_1}}$$

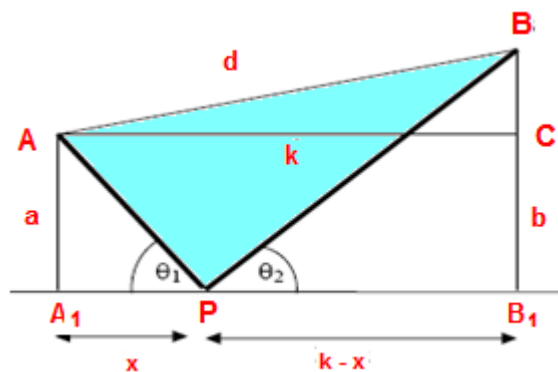
$$x = \frac{\sqrt[3]{\frac{I_2}{I_1}}}{1 + \sqrt[3]{\frac{I_2}{I_1}}} L; \text{ Como } \frac{\sqrt[3]{\frac{I_2}{I_1}}}{1 + \sqrt[3]{\frac{I_2}{I_1}}} < 1 \text{ el valor de } x \text{ hallado corresponde a un mínimo.}$$

**63) Si  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , determine a, b, c y d si se sabe que la gráfica de f tiene un mínimo relativo en (2,-1) y un punto de inflexión en (1,1).**

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$ . Como los puntos dados satisfacen la ecuación de la curva, entonces, se tienen las ecuaciones;  $8a + 4b + 2c + d = -1$ ,  $a + b + c + d = 1$

La existencia de un extremo relativo en (2, -1) implica que:  $12a + 4b + c = 0$ . De igual manera la existencia de un punto de inflexión en (1,1) los lleva a:  $6a + 2b = 3a + b = 0$ , el sistema conformado por estas ecuaciones admite la solución:  $a = 1$ ,  $b = -3$ ,  $c = 0$ ,  $d = 3$ .

**64) Dos tanques A y B situados entre si a una distancia de d Km. se encuentran ubicados a un mismo lado de la orilla rectilínea de un río y a una distancia de este de a Km y b Km respectivamente. Se desea ubicar sobre la orilla una bomba para alimentar de agua a los tanques mediante tuberías rectilíneas PA y PB. Demuestra que la longitud de tubería será mínima cuando se cumpla que:  $\theta_1 = \theta_2$  (Admite que el punto crítico que encontraras corresponde a un mínimo)**



Sea:  $L_{total}$  la longitud total  $\Rightarrow L_{total} = PA + PB$

De la fig. del  $\triangle AA_1P$ :  $d_{AP} = \sqrt{x^2 + a^2}$ ;  $\cos \theta_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \Rightarrow x = \cos \theta_1 \sqrt{x^2 + a^2}$

Del  $\triangle BB_1P$   $d_{BP} = \sqrt{(k-x)^2 + b^2}$ ;  $\cos \theta_2 = \frac{(k-x)}{\sqrt{(k-x)^2 + b^2}} \Rightarrow (k-x) = \cos \theta_2 \sqrt{(k-x)^2 + b^2}$

$L(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(k-x)^2 + b^2}$ ; para:  $0 \leq x \leq k \Rightarrow \frac{dL}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{(k-x)-1}{\sqrt{(k-x)^2 + b^2}}$

sust. los valores:  $\frac{dL}{dx} = \cos \theta_1 - \cos \theta_2 \Rightarrow$  si:  $\frac{dL}{dx} = 0 \Rightarrow \cos \theta_1 - \cos \theta_2 = 0 \Rightarrow \cos \theta_1 = \cos \theta_2$

Como  $\theta_1$  y  $\theta_2 \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow$  la igualdad implica:  $\theta_1 = \theta_2$ .

### 65) De un ejemplo de una función que tenga infinitos extremos relativos e infinitos puntos de inflexión a lo largo de todo su dominio. Explique.

Consideremos  $f(x) = \text{sen } x$ , cuyo dominio es  $R$ . En tal caso,  $f'(x) = \text{cos } x \Rightarrow f'(x) = 0$ ,  $\text{cos } x = 0$ . Así, los números críticos son:

$x = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots$ . Estos números críticos pueden escribirse en forma general

como:  $x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ ,  $n \in Z$ . Ahora bien, el entero  $n$  puede ser par o impar. **Si  $n$  es**

**par**,  $n = 2k$ ,  $k \in Z$ , entonces  $x = (4k + 1)\frac{\pi}{2}$ ,  $k \in Z$ . **Si  $n$  es impar**,

$n = 2k + 1$ ,  $k \in Z$ ,  $x = (4k + 3)\frac{\pi}{2}$ ,  $k \in Z$ .

Es decir, se tienen 2 tipos de números críticos dados por las dos últimas expresiones, con las cuales vamos a estudiar la posibilidad de existencia de extremos relativos usando el criterio de la primera derivada.

Para estudiar los signos de la primera derivada a la izquierda y a la derecha de los números críticos se siguió el siguiente proceso: En la región  $x < (4k + 1)\frac{\pi}{2}$ , se tomó  $x = 2k\pi$ , para tener  $\text{cos}(2k\pi) = 1 > 0$ .

En  $(4k + 1)\frac{\pi}{2} < x < (4k + 3)\frac{\pi}{2}$ , se tomó  $x = (2k + 1)\pi$ , con lo cual,  $\cos(2k + 1)\pi = -1 < 0$ .

En  $x > (4k + 3)\frac{\pi}{2}$ , se tomó  $x = 2(k + 1)\pi$ , de lo cual,  $\cos 2(k + 1)\pi = 1 > 0$ .

Al evaluar la función en  $x = (4k + 1)\frac{\pi}{2}$  y  $x = (4k + 3)\frac{\pi}{2}$ , se tiene, respectivamente,

$$\operatorname{sen}(4k + 1)\frac{\pi}{2} = 1 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(4k + 3)\frac{\pi}{2} = -1.$$

Este análisis permitió conformar la siguiente tabla resumen, donde efectivamente se muestra la existencia de infinitos extremos relativos.

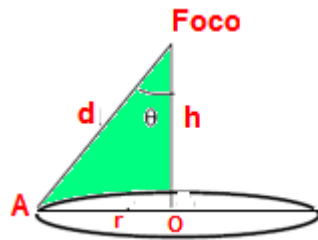
Intervalos	f	f'(x)	Conclusión
$x < (4k + 1)\frac{\pi}{2}$		+	f es creciente
$x = (4k + 1)\frac{\pi}{2}$	$f\left(\frac{(4k + 1)\pi}{2}\right) = 1$		Máx. $f\left(\frac{(4k + 1)\pi}{2}, 1\right)$
$(4k + 1)\frac{\pi}{2} < x < (4k + 3)\frac{\pi}{2}$		-	f es decreciente
$x = (4k + 3)\frac{\pi}{2}$	$f\left(\frac{(4k + 3)\pi}{2}\right) = -1$		Mín. $f\left(\frac{(4k + 3)\pi}{2}, -1\right)$
$x > (4k + 3)\frac{\pi}{2}$		+	f es creciente

Por otro lado,  $f''(x) = -\operatorname{sen} x \Rightarrow f''(x) = 0, \operatorname{sen} x = 0$ . De aquí, los posibles puntos de inflexión son:  $x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$  en general se pueden escribir como:  $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ . De esta forma podemos conformar la tabla siguiente que muestra la existencia de infinitos puntos de inflexión.

Intervalos	f	F''	Conclusión
$x < n\pi$		-	f es cóncava hacia abajo
$x = n\pi$	$f(n\pi) = 0$		P.I. $(n\pi, 0)$
$x > n\pi$		+	f es cóncava hacia arriba



66) Se desea iluminar un estanque de sección circular de radio  $R$  mediante una lámpara de altura ajustable colocada sobre la vertical que pasa por el centro de aquél. La iluminación en el borde del estanque, que es la zona de menor iluminación de la superficie, esta expresada por la relación:  $E = \frac{I \cdot \cos \theta}{d^2}$  Donde  $E$  es la iluminación expresada en luz,  $I$  la intensidad del foco luminoso supuesto puntual, expresada en candelas y  $\theta$  al ángulo indicado en la figura. Verifica que existe un valor de  $\theta$  para el cual la iluminación  $E$  es máxima y determina la altura a la que debe colocarse la lámpara para obtenerla.



$$E = \frac{I \cos \theta}{d^2}$$

Del  $\triangle AOF$  de la fig.  $d = \frac{r}{\sin \theta} \Rightarrow \text{sust. } E(\theta) = \frac{I \cos \theta \sin^2 \theta}{r^2}; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$\frac{dE}{d\theta} = \frac{I}{r^2} (-\sin^3 \theta + 2 \sin \theta \cos^2 \theta) \Rightarrow \frac{dE}{d\theta} = \frac{I \sin \theta}{r^2} (-\sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta) \Rightarrow \frac{dE}{d\theta} = \frac{I \sin \theta}{r^2} (2 - 3 \sin^2 \theta)$$

$$\sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 (\text{v.c}); \quad 2 - 3 \sin^2 \theta = 0 \Rightarrow \sin^2 \theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = \text{Arcsen} \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \theta_0 \cong 0.95 \text{ rad} \cong 54,5^\circ$$

Del  $\triangle AOF$  de la fig.  $h = \frac{r}{\text{tg} \theta} \Rightarrow h = \frac{r}{\text{tg} \theta_0} \cong \frac{2}{\text{tg} 0.95} \cong 1,41 \text{ m}$

67) Pruebe que la curva  $y = \frac{4x}{x^2 + 4}$  tiene tres puntos de inflexión y que estos se encuentran sobre una misma recta.

$$y' = \frac{4(x^2 + 4) - 4x(2x)}{(x^2 + 4)^2} \Rightarrow y' = \frac{4(4 - x^2)}{(x^2 + 4)^2}$$

$$y'' = (4) \left[ \frac{-2x(x^2 + 4)^2 - 2(x^2 + 4)2x \cdot (4 - x^2)}{(x^2 + 4)^4} \right] = (4) \left[ \frac{-2x(x^2 + 4)[(x^2 + 4) + 2(4 - x^2)]}{(x^2 + 4)^4} \right]$$

$$y'' = \frac{-8x(12-x^2)}{(x^2+4)^3} = \frac{8x(x^2-12)}{(x^2+4)^3} \Rightarrow y''' = \frac{8x(x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})}{(x^2+4)^3}$$

Calculemos los posibles puntos de inflexión, la única alternativa surge de  $y'' = 0$ , esto es:  
 $x(x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3}) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm 2\sqrt{3}$ .

Intervalos	f	f''(x)	Conclusión
$x < -2\sqrt{3}$		-	f es cóncava hacia abajo
$x = -2\sqrt{3}$	$f(-2\sqrt{3}) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$		P.I. $\left(-2\sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
$-2\sqrt{3} < x < 0$		+	F es cóncava hacia arriba
$x = 0$	$f(0) = 0$		P.I. (0,0)
$0 < x < 2\sqrt{3}$		-	f es cóncava hacia abajo
$x = 2\sqrt{3}$	$f(2\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$		P.I. $\left(2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$x > 2\sqrt{3}$		+	f es cóncava hacia arriba

De acá se desprende, obviamente, que la curva tiene 3 puntos de inflexión; probemos que estos se encuentran sobre una misma recta, para ello, utilizamos el cálculo de pendientes tomando los puntos dos a dos, es decir:

$$m = \frac{0 - \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)}{0 - (-2\sqrt{3})} = \frac{1}{4}; m = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 0}{2\sqrt{3} - 0} = \frac{1}{4}; m = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)}{2\sqrt{3} - (-2\sqrt{3})} = \frac{1}{4}.$$

Estos últimos cálculos corroboran que los 3 puntos están sobre una misma recta.

DÁMASO ROJAS  
MARZO 2008