Matrices y determinantes

Observación: La mayoría de estos ejercicios se han propuesto en las pruebas de Selectividad, en los distintos distritos universitarios españoles.

---

1. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. Halla la matriz X = A · (B − C).

Solución:

$$X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}$$

---

2. Calcula dos matrices cuadradas A y B sabiendo que $2A+3B=\begin{pmatrix}-4 & 5\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ y que $A-B=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

Solución:
Es un sistema lineal.

$$2A+3B=\begin{pmatrix}-4 & 5\\ -2 & -1\end{pmatrix}$$
$$A-B=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Multiplicando por 3 la segunda ecuación y sumando miembro a miembro ambas ecuaciones, se tiene:

$$5A=\begin{pmatrix}-4 & 5\\ -2 & -1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 5\\ -5 & 5\end{pmatrix}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Sustituyendo y despejando en la segunda ecuación:

$$B=A-\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

3. Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -3\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

determina la matriz X que verifica la ecuación $A\cdot X = B\cdot C$.

Solución:

Si $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, debe cumplirse que:

$$\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}-2a-c & -2b-d\\ a+c & b+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-2a-c=5\\ a+c=1\\ -2b-d=2\\ b+d=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-6\\ c=7\\ b=-3\\ d=4\end{cases}$$

La matriz $X=\begin{pmatrix}-6 & -3\\ 7 & 4\end{pmatrix}$.

---

4. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

a) Calcula la matriz $C = B\cdot A - A^t\cdot B^t$.

b) Halla la matriz X que verifique $A\cdot B\cdot X=\begin{pmatrix}4\\ 2\end{pmatrix}$.

Solución:

a) $C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -4 & -2 & 2\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & -4 & 3\\ -1 & -2 & 2\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3 & -3\\ -3 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

b) Para que pueda hacerse la multiplicación ABX, la matriz X debe ser de dimensión 2×1.

Sea $X=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$, entonces:

$$A\cdot B\cdot X=\begin{pmatrix}4\\ 2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}-6 & 3\\ -3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 2\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}-6a+3b\\ -3a+2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-6a+3b=4\\ -3a+2b=2\end{cases} \Rightarrow a=-2/3,\ b=0 \Rightarrow X=\begin{pmatrix}-2/3\\ 0\end{pmatrix}$$

5. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcula A^2 y expresa el resultado en función de la matriz identidad.
b) Utiliza la relación hallada con la matriz identidad para calcular A^{2005}.

Solución:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -I$

b) Puede observarse que:

$A = A$
$A^2 = -I$
$A^3 = A^2 \cdot A = -I \cdot A = -A$
$A^4 = A^3 \cdot A = -A \cdot A = -A^2 = I$
$A^5 = A^4 \cdot A = I \cdot A = A$
$A^6 = A^5 \cdot A = A \cdot A = A^2 = -I$
…
…

Los posibles resultados son:

$A^{4n} = I$ $A^{4n+1} = A$ $A^{4n+2} = -I$ $A^{4n+3} = -A$

En consecuencia, como $A^{2005} = A^{4\cdot 501+1} = A$.

6. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} y \\ ay \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 6-ay \\ 1-a \end{pmatrix}$

a) Si AB − C = D, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por *x* e *y*) en función de *a*.
b) ¿Para qué valores de *a* el sistema tiene solución?; ¿es siempre única? Encuentra una solución para $a = 1$ con $y \neq 1$.

Solución:

a) AB − C = D $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} y \\ ay \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6-ay \\ 1-a \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ax+y \\ y \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} y \\ ay \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6-ay \\ 1-a \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} ax \\ y-ay \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6-ay \\ 1-a \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ax=6-ay \\ (1-a)y=1-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+ay=6 \\ (1-a)y=1-a \end{cases}$$

b) Si observamos la primera ecuación, vemos que cuando $a = 0$ queda $0 = 6$, lo que indica que el sistema será incompatible.

Igualmente, la segunda ecuación, cuando $a = 1$, queda $0 = 0$, lo que indica que el sistema será compatible indeterminado.

Por tanto:
- Si $a = 0$ el sistema es incompatible.
- Si $a = 1$, el sistema es compatible indeterminado: con infinitas soluciones.
- Si $a \neq 0$ y 1, el sistema es compatible determinado. En cada caso tendrá una única solución.

Para $a = 1$ el sistema queda: $\begin{cases} x+y=6 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow$ (y = 6 − x) $\Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=6-t \end{cases}$

Algunas soluciones son: x = 0, y = 6; x = 3, y = 3; …

La única que excluimos ene este caso es: x = 5, y = 1.

---

7. ¿Es posible que una matriz de tamaño 3 × 2 coincida con su traspuesta? ¿Y con su inversa?

Solución:

- Una matriz rectangular nunca puede coincidir con su traspuesta.

Por ejemplo, si la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, su traspuesta es $A^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 8 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Evidentemente no coinciden.

- Una matriz rectangular no tiene inversa.

8. Halla una matriz X que verifique la igualdad: AX = B, con $A=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 4 & -2\end{pmatrix}$

¿Verifica también la matriz X la igualdad XA = B?

Solución:

Sea $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ la matriz buscada.

Si $\begin{pmatrix}4 & 6\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 4 & -2\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix}4a+6c & 4b+6d\\ 2a+4c & 2b+4d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 4 & -2\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases}4a+6c=2\\ 2a+4c=4\\ 4b+6d=2\\ 2b+4d=-2\end{cases}\Rightarrow a=-4;\ c=3;\ b=5;\ d=-3 \Rightarrow \text{La matriz es: } X=\begin{pmatrix}-4 & 5\\ 3 & -3\end{pmatrix}$$

Normalmente no se verifica que XA = B, pues el producto de matrices no es conmutativo; no obstante, en este caso, basta con multiplicar para comprobarlo.

Efectivamente, $\begin{pmatrix}-4 & 5\\ 3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 6\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -4\\ 6 & 6\end{pmatrix}\neq \text{B}$

---

9. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}4 & 20\\ 16 & 5\end{pmatrix}$

a) Calcula A^2 y $(A^2)^{-1}$
b) Despeja X de la ecuación matricial $A^2X=B$
c) Calcula X.

Solución:

a) $A^2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

Si $\left(A^2\right)^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, se verifica: $\begin{pmatrix}7 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}7a+c & 7b+d\\ 3a+4c & 3b+4d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \begin{cases}7a+c=1\\ 3a+4c=0\\ 7b+d=0\\ 3b+4d=1\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}a=4/25\\ b=-1/25\\ c=-3/25\\ d=7/25\end{cases}$$

Luego, $\left(A^2\right)^{-1}=\begin{pmatrix}4/25 & -1/25\\ -3/25 & 7/25\end{pmatrix}$

b) $A^2X=B \Rightarrow X=\left(A^2\right)^{-1}B$

c) $X=\left(A^2\right)^{-1}B \Rightarrow X=\begin{pmatrix}4/25 & -1/25\\ -3/25 & 7/25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 20\\ 16 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}$

10. Determina la matriz A que verifica la ecuación $AB + A = 2B^t$, donde $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y B^t representa la matriz transpuesta de B.

Solución:

$AB + A = 2B^t \iff A(B + I) = 2B^t$

Si la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se tendrá:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 2\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Multiplicando e igualando se tiene:

$$\begin{pmatrix} 4a & -a+3b \\ 4c & -c+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4a = 6 \\ 4c = -2 \\ -a + 3b = 0 \\ -c + 3d = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3/2 \\ c = -1/2 \\ b = 1/2 \\ d = 7/6 \end{cases}$$

La matriz $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 7/6 \end{pmatrix}$

---

11. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, averigua si existe una matriz C que cumpla B · C = A, y si es el caso, calcúlala.

Solución:

Si existiese, la matriz C podría calcularse despejando. Esto es: B · C = A $\Rightarrow$ C = B^{-1} · A.

Como el determinante de B vale 0, no existe su matriz inversa. En consecuencia no existe la matriz C buscada.

De otra forma:

Si suponemos que existe C y que es igual a $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, debe cumplirse que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a+3c & b+3d \\ 2a+6c & 2b+6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{array}{l} a + 3c = 2 \\ 2a + 6c = 1 \end{array}\right\} \\ \left.\begin{array}{l} b + 3d = 3 \\ 2b + 6b = 2 \end{array}\right\} \end{cases}$$, que como puede verse fácilmente se trata de dos sistemas incompatibles: si $a + 3c = 1$, su doble $2a + 6c$ debe valer 2, y no 1 como se indica.

12. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Encuentra el valor o valores de *x* de forma que $B^2 = A$.
b) Igualmente para que $A - I_2 = B^{-1}$.
c) Determine *x* para que $A \cdot B = I_2$.

Solución:

a) $B^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Por tanto,

$$B^2 = A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{x = 1.}$$

b) Hallamos $B^{-1}=\dfrac{1}{|B|}(B_{ij})^t$, siendo (B_{ij}) la matriz de los adjuntos.

Como $|B|=-1$ y $(B_{ij})=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Por tanto,

$$A - I_2 = B^{-1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{x} - 1 = -1 \Rightarrow \text{x} = 0$$

<u>Nota</u>: La matriz inversa se puede hallar por cualquier otro método.

c) De $A \cdot B = I_2 \Rightarrow A = B^{-1}$.

Por tanto,

$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x=-1.$$

---

13. Calcula los valores de *x*, *y*, *z* que verifican la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}x+\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

Operando con las matrices se tiene:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}x+\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y+2z=2 \\ 2x+2y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases} \to \text{(transformando por Gauss)}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} E1-E2 \\ \\ \\ \end{matrix}\begin{cases} z=2 \\ 2x+2y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=2 \\ 2y=-2x-z \\ x=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \\ z=2 \end{cases}$$

14. Halla todas las matrices X tales que $AX = XA$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Solución:

Si $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 4a+2c & 4b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+4b & 2b \\ c+4d & 2d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = a+4b \\ b = 2b \\ 4a+2c = c+4d \\ 4b+2d = 2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = a \\ b = 0 \\ c = 4d-4a \\ d = d \end{cases}$$

Las matrices pedidas son: $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 4d-4a & d \end{pmatrix}$.

Por ejemplo, una de ellas es: $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}$.

---

15. Sea la matriz 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcula el valor de a sabiendo que AA^t es una matriz diagonal.

Solución:

$$AA^t = \begin{pmatrix} a & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+9 & 2a-12 \\ 2a-12 & 20 \end{pmatrix}$$

Si es igual a una matriz diagonal, se cumple:

$$\begin{pmatrix} a^2+9 & 2a-12 \\ 2a-12 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \Rightarrow 2a-12 = 0 \Rightarrow a = 6.$$

La matriz inicial debe ser: $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

16. Encuentra, si existen, matrices cuadradas *A*, de orden 2, distintas de la matriz identidad, tales que $A\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot A$

¿Cuántas matrices *A* existen con esa condición? Razona tu respuesta.

Solución:

Sea $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ la matriz buscada. Entonces:

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}a+b & b\\ c+d & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ a+c & b+d\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=a\\ b=b\\ c+d=a+c\\ d=b+d\end{cases} \Rightarrow b=0;\ a=d.$$

La matriz buscada es $A=\begin{pmatrix}a & 0\\ c & a\end{pmatrix}$, con $a\neq 1$ o $c\neq 0$. Por ejemplo, $A=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 17 & -4\end{pmatrix}$.

---

17. Calcula los valores de *a* para los cuales la inversa de la matriz

$$A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}a & 4\\ -4 & a\end{pmatrix}$$

coincide con sus traspuesta.

Solución:

La traspuesta de A es $A^t=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}a & -4\\ 4 & a\end{pmatrix}$.

Como $A^t = A^{-1}$ se cumplirá que

$$A\cdot A^t = A\cdot A^{-1} = I \Leftrightarrow \frac{1}{5}\begin{pmatrix}a & 4\\ -4 & a\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix}a & -4\\ 4 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{25}\begin{pmatrix}a^2+16 & 0\\ 0 & 16+a^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \frac{a^2+16}{25}=1 \Rightarrow a=\pm 3$$

18. Dada la ecuación matricial: $A \cdot X + 2B = X$ con $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Despeja la matriz X. (3 puntos)
b) Calcula la matriz X. (7 puntos)

Solución:
a) $A \cdot X + 2B = X \Rightarrow 2B = X - A \cdot X \Rightarrow 2B = (I - A)X \Rightarrow (I - A)^{-1} \cdot 2B = X$

b) Calculamos cada una de las matrices producto:

$$2B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

La inversa de I – A existe, pues: $|I - A| = 4$

Adjunta de I – A: $\left((I - A)_{ij}\right) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Luego: $(I - A)^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Por tanto, $X = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -6 & 16 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$

19. Una empresa fabrica juguetes de tres tipos diferentes T_1, T_2 y T_3. El precio de coste de cada juguete y los ingresos que obtiene la empresa por cada juguete vendido vienen dados por la siguiente tabla:

	T_1	T_2	T_3
Precio de coste	4 €	6 €	9 €
Ingreso	10 €	16 €	24 €

El número de ventas anuales es de 4500 juguetes T_1, 3500 juguetes T_2 y 1500 juguetes T_3. Sabiendo que la matriz de costes (C) y la matriz de ingresos (I) son matrices diagonales y que la matriz de ventas anuales (V) es una matriz fila.

a) Determina las matrices C, I y V.

b) Obtén, utilizando las matrices anteriores, la matriz de costes anuales, la matriz de ingresos anuales, y la matriz de beneficios anuales, correspondientes a los tres tipos de juguetes.

Solución:

a) Matriz de ventas: $V = \begin{pmatrix} 4500 & 3500 & 1500 \end{pmatrix}$

Matriz de costes: $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

Matriz de ingresos: $I = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$

b) Costes anuales:

$$V \cdot C = \begin{pmatrix} 4500 & 3500 & 1500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \cdot 4500 & 6 \cdot 3500 & 9 \cdot 1500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18000 & 21000 & 13500 \end{pmatrix}$$

Ingresos anuales:

$$V \cdot I = \begin{pmatrix} 4500 & 3500 & 1500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 \cdot 4500 & 16 \cdot 3500 & 24 \cdot 1500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45000 & 56000 & 36000 \end{pmatrix}$$

Beneficios anuales:

$$\text{VC} - \text{VI} = (45000 \quad 56000 \quad 36000) - (18000 \quad 21000 \quad 13500) =$$
$$= (27000 \quad 35000 \quad 22500)$$

Los beneficios anuales son de 27000 euros por la venta de los juguetes T_1; 35000 euros por la venta de los juguetes T_2 y 22500 euros por la venta de los juguetes T_3.

20. Un almacén de ruedas de vehículos de diferentes tipos tiene en *stock* los componentes (en cientos de unidades) dados por la tabla siguiente:

	Neumáticos	Embellecedores	Llantas
Utilitarios	3,1	0,3	2,1
Berlinas	1,6	1,1	0,6
Todo terreno	0,9	0	0,2

La cantidad de quilos de materia prima necesaria para cada componente es:

	Acero	Caucho
Neumáticos	0,1	4,6
Embellecedores	1	0,05
Llantas	5	0

a) Calcula el total de acero acumulado en el almacén.
b) Calcula la cantidad de caucho acumulado en el almacén.

Solución:
a) Cantidad de acero: (Unidades de vehículos × quilos de acero)
Utilitarios: $310 \cdot 0{,}1 + 30 \cdot 1 + 210 \cdot 5 = 1111$
Berlinas: $160 \cdot 0{,}1 + 110 \cdot 1 + 60 \cdot 5 = 426$
Todo terreno: $90 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 1 + 20 \cdot 5 = 109$
Total: $1111 + 426 + 109 = 1646$ kg

b) Cantidad de caucho: (Unidades de vehículos × quilos de caucho)
Utilitarios: $310 \cdot 4{,}6 + 30 \cdot 0{,}05 + 210 \cdot 0 = 1427{,}5$
Berlinas: $160 \cdot 4{,}6 + 110 \cdot 0{,}05 + 60 \cdot 0 = 741{,}5$
Todo terreno: $90 \cdot 4{,}6 + 0 \cdot 0{,}05 + 20 \cdot 0 = 414$
Total: $1427{,}5 + 741{,}5 + 416 = 2583$ kg

NOTA: Las cantidades anteriores pueden obtenerse mediante cálculo matricial así:

Matriz de vehículos: $V = \begin{pmatrix} 310 & 30 & 210 \\ 160 & 110 & 60 \\ 90 & 0 & 20 \end{pmatrix}$

Matriz de materias primas: $M = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 4{,}6 \\ 1 & 0{,}05 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

Matriz de cantidades de acero y caucho: $V \cdot M = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \textit{acero} & \textit{caucho} \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 1111 & 1427{,}5 \\ 426 & 741{,}5 \\ 109 & 414 \end{pmatrix} \\ \textit{Total} & \begin{array}{cc} 1646 & 2583 \end{array} \end{array}$

21. Un importador de globos los importa de dos colores: de color naranja (N) y de color fresa (F). Todos ellos se envasan en paquetes de 2, 5 y 10 unidades, que vende a los siguientes precios (en pesetas):

	2 unidades	5 unidades	10 unidades
Color N	4	8	12
Color F	3	5	8

Sabiendo que en un año se venden el siguiente número de paquetes,

	Color N	Color F
De 2 unidades	700000	50000
De 5 unidades	600000	40000
De 10 unidades	500000	500000

se pide:

a) Resume la información anterior en dos matrices A y B: A será una matriz 2×3 que recoja las ventas en un año y B una matriz 3×2 que recoja los precios.
b) Calcula los elementos de la diagonal principal de la matriz A por B y dar su significado.
c) Calcula los elementos de la diagonal principal de la matriz B por A y dar su significado

Solución:

a) Matriz de ventas: $A = \begin{pmatrix} 700000 & 600000 & 500000 \\ 50000 & 40000 & 500000 \end{pmatrix}$

Matriz de precios: $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$

b) $AB = \begin{pmatrix} 700000 & 600000 & 500000 \\ 50000 & 40000 & 500000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13600000 & 9100000 \\ 6520000 & 4350000 \end{pmatrix} = C$

El elemento c_{11} = 13600000 da los ingresos por venta de los globos de color naranja.
El elemento c_{22} = 4350000 da los ingresos por venta de los globos de color fresa.

c) $BA = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 700000 & 600000 & 500000 \\ 50000 & 40000 & 500000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2950000 & 2520000 & 3500000 \\ 5850000 & 5000000 & 6500000 \\ 8800000 & 7520000 & 10000000 \end{pmatrix} = D$

El elemento d_{11} = 2950000 da los ingresos por venta de los globos envasados de dos en dos (de ambos colores).
El elemento d_{22} = 5000000 da los ingresos por venta de los paquetes de 5 unidades.
El elemento d_{33} = 10000000 da los ingresos por venta de los paquetes de 10 unidades.

Nota: Puede observarse que la suma de los elementos de ambas diagonales es la misma: 17950000 pta.

22. En una clínica dental colocan tres tipos de prótesis, P_1, P_2 y P_3, en dos modelos diferentes, M_1 y M_2. El número de prótesis que tienen ya construidas viene dado en la matriz A. El precio, en euros, de cada prótesis viene dado en la matriz B

$$A = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} M_1 & M_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 11 & 21 \\ 16 & 12 \\ 9 & 14 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 150 & 160 & 240 \\ 210 & 190 & 220 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Obtener, si es posible, las matrices C = A · B y D = B · A
b) ¿Qué información proporcionan los elementos c_{12} de la matriz C y el elemento d_{22} de D?
c) ¿Qué elemento de C o de D proporciona el valor total de todas las prótesis del tipo P_2?

Solución:

a) $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 11 & 21 \\ 16 & 12 \\ 9 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 150 & 160 & 240 \\ 210 & 190 & 220 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6060 & 5750 & 7260 \\ 4920 & 4840 & 6480 \\ 4290 & 4100 & 5240 \end{pmatrix}$

$D = B \cdot A = \begin{pmatrix} 150 & 160 & 240 \\ 210 & 190 & 220 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 21 \\ 16 & 12 \\ 9 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6370 & 8430 \\ 7330 & 9770 \end{pmatrix}$

b) $c_{12} = 11 \cdot 160 + 21 \cdot 190 = 5750$ no proporciona ninguna información válida, pues multiplica el número de prótesis P_1 con los precios de las prótesis P_2.

$d_{22} = 210 \cdot 21 + 190 \cdot 12 + 220 \cdot 14 = 9770$ da el precio de todas las prótesis (P_1, P_2 y P_3) del modelo M_2.

c) El precio de todas las prótesis del tipo $P_2 = 16 \cdot 160 + 14 \cdot 190 = 4840$ es el elemento c_{22}.

23. Tres personas van a una pescadería. La primera compra 1 kg de salmonetes y 2 de calamares, la segunda compra 2 kg de salmonetes, 1 de calamares y 1 kg de sardinas, y la tercera compra 1 kg de salmonetes y 3 de calamares.

a) Dar una matriz 3×3 que exprese el número de kg de salmonetes, de calamares y de sardinas que ha comprado cada una de las tres personas.

b) Si en esa compra la primera persona ha gastado un total de 59 euros, la segunda un total de 47 euros y la tercera un total de 84 euros, ¿qué vale un kg de salmonetes, qué vale un kg de calamares y qué vale un kg de sardinas?

Solución:

a) Una posibilidad es la siguiente:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} S & C & S \end{array} \\ \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) Sean x, y, z los precios de un kg de salmonetes, calamares y sardinas, respectivamente. Se tendrá el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=59 \\ 2x+y+z=47 \\ x+3y=84 \end{array}\right\}$$

Si a la primera ecuación se le resta la tercera, se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=59 \\ 2x+y+z=47 \\ y=25 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{(Sustituyendo) } x=9;\ z=4$$

Luego los salmonetes están a 9 euros el kg, los calamares a 25 y las sardinas a 4 euros el kg.

NOTA: Matricialmente, el sistema tiene la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59 \\ 47 \\ 84 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 59 \\ 47 \\ 84 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 59 \\ 47 \\ 84 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 25 \\ 4 \end{pmatrix}$$

24. En la siguiente tabla se indica la audiencia prevista (en miles de espectadores) por tres cadenas de TV (A, B, C) en una determinada semana y en cada uno de los tres segmentos horarios (Mañana: M, Tarde: T y Noche: N)

	A	B	C
M	40	60	20
T	60	40	30
N	100	80	90

Sin embargo, como consecuencia de la calidad de los programas emitidos, se produce en la audiencia prevista (y en todos los segmentos horarios) una reducción del 10 % para la cadena A, una reducción del 5 % para la cadena B y un aumento del 20 % para la cadena C.

a) Obtener la matriz que representa la nueva audiencia de las tres cadenas A, B y C, en los tres segmentos horarios M, N y T.

b) Sabiendo que el beneficio que obtiene cada cadena por espectador es de 3 euros por la mañana, de 4 euros por la tarde y de 6 euros por la noche, obtener mediante cálculo matricial los beneficios para cada una de las cadenas.

Solución:

a)

Cadena A: conserva el 90 % de la audiencia $\to$ hay que multiplicar por 0,90

Cadena B: conserva el 95 % de la audiencia $\to$ hay que multiplicar por 0,95

Cadena C: consigue 20 % más $\to$ hay que multiplicar por 1,20

La nueva audiencia se obtiene multiplicando las matrices:

$$\begin{pmatrix} 40 & 60 & 20 \\ 60 & 40 & 30 \\ 100 & 80 & 90 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}90 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}95 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}20 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ M \\ T \\ N \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 36 & 57 & 24 \\ 54 & 38 & 36 \\ 90 & 76 & 108 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) El beneficio será:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 36 & 57 & 24 \\ 54 & 38 & 36 \\ 90 & 76 & 108 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ 864 & 779 & 864 \end{pmatrix}$$

El beneficio para la cadena A será de 864000 €; para la cadena B de 779000 €; para la cadena C de 864000 €.

25. a) Mediante cálculo matricial, discute y resuelve el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + z = -3 \\ 2x + 3y - z = 1 \\ 2x + 7y - 3z = 5 \end{cases}$$

b) Calcula la matriz X solución de la ecuación $2X + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) La matriz de coeficientes y términos independientes asociada a este sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 7 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

Aplicando transformaciones elementales:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 7 & -3 & 5 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \\ F2 - F1 \\ F3 - F1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & 8 & -4 & 8 \end{array}\right)$$

Como las filas 2ª y 3ª son proporcionales, el sistema es compatible indeterminado equivalente a:

$$\begin{cases} 2x - y + z = -3 \\ 4y - 2z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = -3 \\ 2y - z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = y - z - 3 \\ z = -2 + 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}y \\ z = -2 + 2y \end{cases}$$

O bien: $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ y = t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$

b) $2X + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2X = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -14 & 15 \\ -9 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -11 \\ 13 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 13 & -11 \\ 13 & 12 \end{pmatrix}$$

26. Tres familias van a una cafetería. La primera familia toma 2 cafés, 1 cortado y 2 descafeinados; la segunda familia toma 3 cafés y 2 cortados; y la tercera familia toma 1 café y 2 descafeinados. A la primera familia le cobran 5 €; a la segunda, 5,1 €; y a la tercera, 2,9 €. Se denota por *x*, *y*, *z* las incógnitas que representan respectivamente los precios de un café, de un cortado y de un descafeinado.

a) Dar la matriz A que expresa el nombre de cafés, de cortados y de descafeinados que toma cada una de las familias, de manera que A · X = B

donde $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 5{,}1 \\ 2{,}9 \end{pmatrix}$

b) Calcular A^{-1}.

c) Resolver la ecuación matricial A · X = B

Solución:

Si designamos por C, Co y D los cafés, los cortados y los descafeinados, respectivamente, la matriz A puede ser la siguiente:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} C & Co & D \end{array} \\ \begin{array}{r} 1^a\ familia \\ 2^a\ familia \\ 3^a\ familia \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}. \text{ Esto es: } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) La matriz inversa es $A^{-1} = \dfrac{(A_{ij})^t}{|A|}$, siendo ($A_{ij}$) la matriz de los adjuntos.

Como $|A| = -2$ y $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, se tiene:

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -6 & 2 & 6 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

c) AX = B $\Rightarrow$ X = A^{-1}B, luego:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5{,}1 \\ 2{,}9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}90 \\ 1{,}20 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El precio de cada café es:

Café: 0,90 euros; Cortado: 1,20 euros; Descafeinado: 1 euro.