MATEMÁTICAS 2º BACH. CC. SS. 31 de octubre de 2005
Análisis

1) Hallar el dominio de $y=\sqrt{-3x^2+4x-1}$ *(2 puntos)*
2) Decir si la siguiente función es *par*, *impar* o ninguna de las dos cosas:

$$y=\frac{2x^4-3x^2}{x^2-1}$$ *(2 puntos)*

3) Hallar las intersecciones con los ejes y el dominio de $f(x)=\dfrac{4x-1}{2x-2}$. *(2 puntos)*
4) Calcular: *(4 puntos)*

a) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\frac{2^x}{4x^3-2}$

b) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3}{x-1}-\frac{x^2+3}{x+1}\right)$

c) $\displaystyle \lim_{x\to 2}\frac{3x^3-5x^2-4x+4}{x^2-4x+4}$

d) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{8x^3-5x}}{4x-2}$

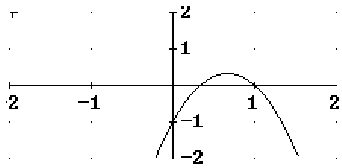
Soluciones

Nota: Casi todos los ejercicios de estos apuntes están extraídos de exámenes de selectividad o de propuestas de exámenes de selectividad. Pero esto no ocurre con los ejercicios de este examen

1) Hallar el dominio de $y=\sqrt{-3x^2+4x-1}$

Los polinomios dan resultado para cualquier valor de *x*. Pero las raíces cuadradas exigen que el radicando sea mayor o igual que 0. Luego $x\in D(f) \Leftrightarrow -3x^2+4x-1\geq 0$. Para resolver esta inecuación, dibujamos la parábola $y=-3x^2+4x-1$. Como el coeficiente de x^2 es negativo (–3), se abre hacia abajo, con un máximo. Corta al eje OX en: $-3x^2+4x-1=0 \Leftrightarrow$

$x=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-12}}{-6}=\dfrac{-4\pm 2}{-6}=\begin{cases}=1\\=\dfrac{1}{3}\end{cases}$. Su gráfica será:



Luego los valores de *x* que hacen que la *y* sea positiva, que son la solución de la inecuación (porque hemos llamado *y* a $-3x^2+4x-1$, y la inecuación es $-3x^2+4x-1\geq 0$) y, por tanto, el dominio, son: $D(f)=[\frac{1}{3},1]$

2) Decir si la siguiente función es par, impar o ninguna de las dos cosas:

$$y=\frac{2x^4-3x^2}{x^2-1}$$

$f(x)=\dfrac{2x^4-3x^2}{x^2-1} \Rightarrow f(-x)=\dfrac{2(-x)^4-3(-x)^2}{(-x)^2-1}=\dfrac{2x^4-3x^2}{x^2-1}=f(x) \Rightarrow$ Es par

3) Hallar las intersecciones con los ejes y el dominio de $f(x)=\dfrac{4x-1}{2x-2}$.

La única operación que presenta restricciones en el cálculo de la imagen, de entre las que aparecen en *f*, es la división, porque no se puede dividir entre 0. Por tanto, no pertenecen al dominio los valores de *x* que anulen el denominador, esto es: $2x-2=0 \Leftrightarrow x=1$. Es decir: $D(f)=\mathbb{R}-\{1\}$

Intersección con OX: $y=0 \Rightarrow 0=\dfrac{4x-1}{2x-2} \Rightarrow 0=4x-1 \Rightarrow 1=4x \Rightarrow x=\dfrac{1}{4}$ (observar que es solución, porque no anula el denominador; además, los puntos que anulan el denominador estaban excluidos del dominio) $\Rightarrow (\frac{1}{4}, 0)$ son las coordenadas de la intersección.

Intersección con OY: $x=0 \Rightarrow y=\dfrac{-1}{-2}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow (0, \frac{1}{2})$

4) Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x}{4x^3-2}=+\infty$, porque la exponencial de base mayor que 1 crece mucho más rápidamente que cualquier polinómica, por lo que el numerador produce un infinito de orden superior al del denominador.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-3}{x-1}-\dfrac{x^2+3}{x+1}\right)=$ (en principio, produce la indeterminación $\infty-\infty$) $=$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x^2-3)(x+1)}{(x-1)(x+1)}-\frac{(x^2+3)(x-1)}{(x+1)(x-1)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x^3+x^2-3x-3)-(x^3-x^2+3x-3)}{(x-1)(x+1)}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+x^2-3x-3-x^3+x^2-3x+3}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-6x}{x^2-1}\right) = \frac{2}{1} = 2$$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^3-5x^2-4x+4}{x^2-4x+4}$ Produce la indeterminación 0/0. Descomponemos por Ruffini, probando en x=2:

	3	–5	–4	4
2		6	2	–4
	3	1	–2	0

	1	–4	4
2		4	–4
	1	–2	0

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^3-5x^2-4x+4}{x^2-4x+4} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(3x^2+x-2)}{(x-2)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2+x-2}{x-2} =$ $\dfrac{12+2-2}{2-2} = \infty$ sin signo; calculando los límites laterales se vería cuando es $+\infty$ y cuando $-\infty$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8x^3-5x}}{4x-2}$ = (en el ∞, equivale a quedarse sólo con los sumandos de máxima potencia) $= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8x^3}}{4x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{x^3}}{4x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{4x} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

MATEMÁTICAS 2º BACH. CC. SS. 22 de febrero de 2002
Análisis

1) Calcular las derivadas de: *(3 puntos)*

a) $f(x) = -\dfrac{2x^5}{\cos x}$ b) $g(x) = -\dfrac{3}{2}\ln\sqrt{7x}$ c) $h(x) = \dfrac{e^{3x-5}}{2}$

2) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x-2} & \text{si } x < 0 \\ 2^{2-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad de esa función y analice su comportamiento en los posibles puntos de discontinuidad *(2 puntos)*

b) Calcule la función derivada de $f(x)$ *(2 puntos)*

c) Represente gráficamente la función *(3 puntos)*

Soluciones

1) Calcular las derivadas de:

a) $f(x) = -\dfrac{2x^5}{\cos x}$ **b)** $g(x) = -\dfrac{3}{2}\ln\sqrt{7x}$ **c)** $h(x) = \dfrac{e^{3x-5}}{2}$

Soluciones:

a) $f'(x) = -\dfrac{10x^4\cos x + 2x^5 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$

b) Simplificamos antes de derivar, aplicando propiedades de logaritmos neperianos: $g(x) = -\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{2}\ln 7x = -\dfrac{3}{4}\ln 7x \Rightarrow g'(x) = -\dfrac{3}{4}\dfrac{7}{7x} = -\dfrac{3}{4x}$

c) Como $h(x) = \dfrac{1}{2}e^{3x-5} \Rightarrow h'(x) = \dfrac{1}{2}3e^{3x-5} = \dfrac{3}{2}e^{3x-5}$

2) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x-2} & \text{si } x < 0 \\ 2^{2-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad de esa función y analice su comportamiento en los posibles puntos de discontinuidad

- Intervalo (–∞,0): *f* coincide con $y = \dfrac{4}{x-2}$, que es continua en su dominio. La única operación que presenta problemas de entre las que figuran en dicha función es la división, porque no se puede dividir entre 0. Por tanto, es continua en todo R–{2} (2 anula el denominador). Pero 2, que es la única discontinuidad, no pertenece a (–∞,0), zona donde *f* coincide con esta función ⇒ *f* es continua en todo (–∞,0).
- Intervalo (0,+∞): *f* coincide con $y = 2^{2-x}$, que es continua en su dominio. Éste es todo R (ninguna operación tiene restricciones de cálculo) ⇒ *f* es continua en todo (0,+∞).
- $x = 0$: Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{4}{x-2} = -2$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2^{2-x} = 2^2 = 4 \Rightarrow f$ tiene una discontinuidad de salto finito (de primera especie) en *x*=0.

En resumen, *f* es continua en R–{0} y tiene una discontinuidad de salto finito en *x*=0.

b) Calcule la función derivada de f(x)

En $x = 0$ *f* no es derivable, puesto que no es continua (una función no puede ser derivable donde no es continua). Las fórmulas habituales de derivación son válidas en intervalos abiertos, por lo que, aplicándolas:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{4}{(x-2)^2} & \text{si } x \in (-\infty,0) \\ -2^{2-x}\ln 2 & \text{si } x \in (0,+\infty) \end{cases}$$

c) Represente gráficamente la función

Representaremos cada una de ellas por separado. Veamos, en primer lugar, la gráfica de $y = \dfrac{4}{x-2}$.

1. Dominio: R–{2}

2. Asíntotas. Horizontal: $\underset{x\to\infty}{lím}\dfrac{4}{x-2}=\left(\dfrac{4}{\infty}\right)=0$ $\Rightarrow$ La recta de ecuación y=0 es A.H.

Verticales: Sólo puede haberlas en x=2, única discontinuidad. Como $\underset{x\to 2}{lím}\dfrac{4}{x-2}=\left(\dfrac{4}{0}\right)=\infty$ $\Rightarrow$ La recta x=2 es A.V.

Oblicua: No hay, porque hay A. horizontal.

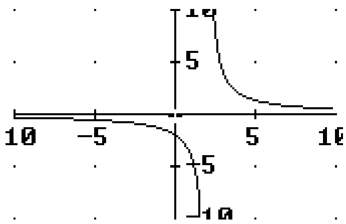
3. Monotonía: $y'=-\dfrac{4}{(x-2)^2}$. No se anula nunca (debería ser el numerador igual a 0, pero 4≠0). La única discontinuidad, tanto de y como de y' es x=2. Dividimos, por tanto, R en intervalos mediante este único punto, resultando:

	(-∞,2)	2	(2, +∞)
f'	–	∄	–
f	↘	∄	↘

No tiene extremos relativos.

4. Intersecciones con los ejes: x=0 ⇒ y=–2: (0,–2). y=0 ⇒ Imposible (se vio antes)

5. Gráfica:



Estudiemos ahora $y = 2^{2-x}$

1. Dominio: R

2. Asíntotas. Horizontal: La exponencial se comporta de modo diferente en el +∞ y en el –∞. Calculamos los límites, entonces, por separado:

$\underset{x\to+\infty}{lím}\ 2^{2-x} = 2^{-\infty} = 0$ $\qquad$ $\underset{x\to-\infty}{lím}\ 2^{2-x} = 2^{+\infty} = +\infty$

Por tanto, y=0 es asíntota horizontal, pero sólo por el lado del +∞. Por el lado del –∞, la función se va hasta +∞.

Vertical: No tiene, porque no hay discontinuidades

Oblicua: Sólo podría ser posible por el lado del –∞ (por el otro, hay asíntota horizontal):

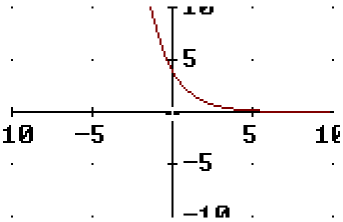
$m = \underset{x\to-\infty}{lím}\dfrac{f(x)}{x} = \underset{x\to-\infty}{lím}\dfrac{2^{2-x}}{x} = \left(\dfrac{2^{+\infty}}{-\infty}\right)$=∞, porque la exponencial produce un infinito de orden superior al de cualquier potencial. Por tanto, no hay asíntota oblicua.

3. Monotonía: y' $=-2^{2-x}\ln 2$. Como la exponencial siempre da imágenes positivas, cualquiera que sea x, y –ln 2 es constante, el signo de esta función no cambia nunca. Concretamente es negativo (–ln 2<0 y 2^{2-x}>0). Luego siempre es decreciente y no tiene extremos relativos, por consiguiente.

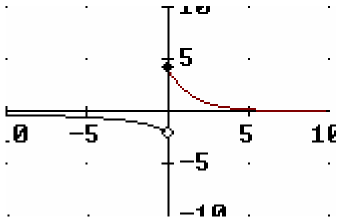
4. Tabla de valores:

x	–2	–1	0	1	2	3
y	16	8	4	2	1	1/2

5. Gráfica:



Teniendo en cuenta dónde está definida cada función, la gráfica de *f* es, combinando los resultados anteriores:



MATEMÁTICAS 2º BACH. CC. SS. 6 de marzo de 2002
Análisis

1) La función $f(x)=\frac{1}{90}(-x^2+100x-1600)$ representa el beneficio, expresado en millones de pesetas, que obtiene una empresa por la fabricación de x unidades de un determinado producto.
   a) Realice un boceto de la gráfica. ¿Cuántas unidades hay que fabricar para que no se produzcan pérdidas? *(1,5 puntos)*
   b) ¿Cuál es el mayor beneficio posible? ¿Cuántas unidades deben fabricarse para obtenerlo? *(2,5 puntos)*

2) Dada la función $f(x)=\frac{3x+7}{x+2}$,
   a) Calcule los puntos de la gráfica de dicha función donde la tangente tiene pendiente -1. *(1,5 puntos)*
   b) Explique, razonadamente, si puede existir algún punto de tangente horizontal en esta función. *(1,5 puntos)*
   c) Represente gráficamente la función, indicando, al menos, sus asíntotas, crecimiento y decrecimiento. Indique, también, los intervalos de concavidad y convexidad, (puede concluirlo a la vista de la gráfica obtenida, si lo desea). *(3 pts)*

[Soluciones](#)

1) La función f(x) = $\frac{1}{90}(-x^2+100x-1600)$ representa el beneficio, expresado en millones de pesetas, que obtiene una empresa por la fabricación de x unidades de un determinado producto.

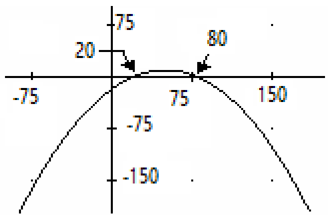
a) Realice un boceto de la gráfica. ¿Cuántas unidades hay que fabricar para que no se produzcan pérdidas?

Es una parábola de eje vertical abierta hacia abajo, es decir, con un máximo relativo, ya que el coeficiente de x^2 es –1/90 (negativo). Hallamos los puntos de corte con OX:

$$0=\frac{1}{90}(-x^2+100x-1600)$$

$$\Leftrightarrow x^2-100x+1600=0 \Leftrightarrow x=\frac{100\pm\sqrt{10.000-6.400}}{2}=\frac{100\pm 60}{2}=\begin{cases}80\Rightarrow(80,0)\\20\Rightarrow(20,0)\end{cases}$$

La ecuación del eje de la parábola es $x=-\frac{b}{2a}=\frac{-\frac{100}{90}}{-\frac{2}{90}}=\frac{100}{2}=50$, por lo que el máximo está en $f(50)=\frac{1}{90}(-50^2+100\cdot 50-1600)=10\Rightarrow(50,10)$



Con todo esto, la gráfica es la adjunta. A la vista de ella se concluye que no hay pérdidas si $x\in[20,80]$, porque son los valores de *x* que hacen que la *y* (el beneficio) sea positiva.

b) ¿Cuál es el mayor beneficio posible? ¿Cuántas unidades deben fabricarse para obtenerlo?

La gráfica de la función es una parábola, que es una función conocida y, por tanto, no hay por qué calcular los extremos relativos por el método general. El máximo lo alcanza en el vértice, que lo calculamos antes: (50,10). Es decir, el mayor beneficio posible es de 10 millones, obtenido al fabricar 50 unidades.

Si, con todo, quisiésemos usar el método general, sería así: Dom(*f*)=[0,+∞) (consideramos la imposibilidad de fabricar un número negativo de unidades). Comparamos las imágenes (o, en su defecto, los límites) en:

a) Extremos del intervalo de definición: f(0)= –160/9; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

b) Discontinuidades de f o de f': No hay

c) Puntos que anulan f': $y'=\frac{1}{90}(-2x+100)$; igualamos a 0: $\frac{1}{90}(-2x+100)=0\Rightarrow$ $-2x+100=0\Rightarrow 100=2x\Rightarrow 50=x$. Imagen: *f*(50)=10.

Por tanto, de entre los puntos anteriores, la mínima imagen, o límite, es –∞, por lo que no hay mínimo absoluto. La máxima es 10, que se alcanza en *x*=50. Por tanto, el resultado es el mismo obtenido antes: el beneficio máximo es 10, obtenido para *x*=50 unidades.

3) Dada la función f(x) = $\frac{3x+7}{x+2}$**,**

a) Calcule los puntos de la gráfica de dicha función donde la tangente tiene pendiente –1.

Según la interpretación geométrica de la derivada, la pendiente de la recta tangente a una función en el punto (x, $f(x)$) vale $f'(x)$. Por el enunciado del problema, dicha pendiente debe valer –1. Veamos el valor de x para que eso ocurra:

$$f'(x) = \frac{3(x+2)-(3x+7)}{(x+2)^2} = \frac{3x+6-3x-7}{(x+2)^2} = -\frac{1}{(x+2)^2} = -1 \Rightarrow \frac{1}{(x+2)^2} = 1 \Rightarrow$$

$$1 = (x+2)^2 \Rightarrow 1 = x^2+4x+4 \Rightarrow 0 = x^2+4x+3 \Rightarrow x = \frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4\pm 2}{2} =$$

$$\begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases} \Rightarrow$$ Los puntos donde ocurre son, entonces: (–1, 4) y (–3, 2).

No nos piden las ecuaciones de las rectas tangentes, pero usando la ecuación punto pendiente: $y-y_0=m(x-x_0)$, serían, respectivamente:

$$y-4 = -1(x+1) \Rightarrow y = -x-1+4 \Rightarrow \boxed{y=-x+3}$$
$$y-2 = -1(x+3) \Rightarrow y = -x-3+2 \Rightarrow \boxed{y=-x-1}$$

b) Explique, razonadamente, si puede existir algún punto de tangente horizontal en esta función.

Debería ser 0 la pendiente, para que la recta tangente fuese horizontal. Entonces:

$f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow -1 = 0$, que no es posible.

c) Represente gráficamente la función, indicando, al menos, sus asíntotas, crecimiento y decrecimiento. Indique, también, los intervalos de concavidad y convexidad, (puede concluirlo a la vista de la gráfica obtenida, si lo desea).

1. Dom(f) = R–{–2}, puesto que es el único punto que presenta restricciones al calcular la imagen, ya que anula el denominador.

2. Asíntotas. Horizontal: $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+7}{x+2} = \frac{3}{1} = 3 \Rightarrow y=3$ es A. horizontal.

Vertical: –2 es la única discontinuidad. Entonces: $\lim_{x\to -2}\frac{3x+7}{x+2} = \infty \Rightarrow$ $x=-2$ es A. vertical

Oblicua: No tiene, porque tiene horizontal.

3. Monotonía. Se calculó antes f' y se vio, además, que no podía anularse nunca. No tiene, entonces, puntos críticos. La única discontinuidad de f y de f' está en –2. Por tanto:

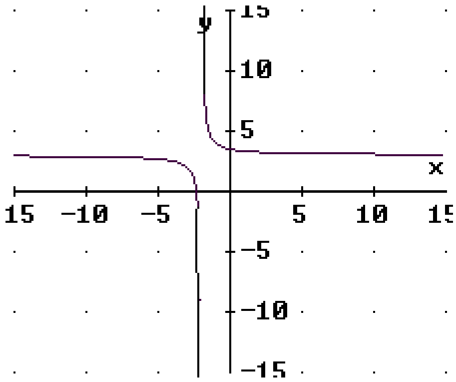
	(-∞,–2)	–2	(–2, +∞)
f'	–	∄	–
f	↘	∄	↘

Por tanto, no tiene extremos relativos.

4. Curvatura. Como $f''(x) = \frac{2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{2}{(x+2)^3}$, que no se anula nunca, y cuya única discontinuidad es la misma que la de f y la de f', es decir, –2, entonces:

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,+\infty)$
f''	$-$	$\nexists$	$+$
f	$\cap$	$\nexists$	$\cup$

5. Gráfica.



MATEMÁTICAS 2º BACH. CC. SS. 11 de marzo de 2002

Análisis

1) Una empresa de automóviles ha estimado que su beneficio B, en millones de pesetas, depende del tiempo t, en minutos, que dedica diariamente a publicidad, según la función $B(t) = -1{,}5t^2+168t-954$

   a) Calcule los minutos diarios que debe dedicar a publicidad para obtener un beneficio máximo. ¿Cuál es ese beneficio? *(3 puntos)*

   b) Calcule en qué intervalo debe estar comprendido el tiempo diario dedicado a publicidad para que la empresa obtenga beneficio positivo. *(1,5 puntos)*

2) Dada la función $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{4} & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ -\dfrac{1}{x} & \text{si } 2 < x \end{cases}$

   a) Dibuje la gráfica de esta función *(1,5 puntos)*

   b) Estudie su continuidad, asíntotas, monotonía y extremos *(4 puntos)*

Soluciones

1) **Una empresa de automóviles ha estimado que su beneficio B, en millones de pesetas, depende del tiempo t, en minutos, que dedica diariamente a publicidad, según la función $B(t) = -1,5t^2+168t-954$**

   a) **Calcule los minutos diarios que debe dedicar a publicidad para obtener un beneficio máximo. ¿Cuál es ese beneficio?**

El problema es muy simple, puesto que la función es una parábola abierta hacia abajo, es decir, con máximo, ya que el coeficiente de t^2 es negativo. Simplemente hallando las coordenadas del vértice, contestamos el apartado *a* del problema, y con las intersecciones con OX tendremos el *b*.

Pues bien. La ecuación del eje es: $x = -\dfrac{b}{2a} \Leftrightarrow x = \dfrac{-168}{2(-1,5)} \Leftrightarrow x = 56$

El vértice, por tanto, es: $B(56) = -1,5 \cdot 56^2+168 \cdot 56-954 = 3750 \Rightarrow (56, 3750)$

Por tanto, el máximo absoluto se obtiene para t=56 minutos, cifrándose en 3.750 millones.

Esta forma de resolución es absolutamente correcta. Con el único objeto de recordarlo, vamos a hacerlo por el método general. Para empezar, vamos a volvernos rigurosos y delimitamos el intervalo de actuación de la función. Éste será desde 0 minutos diarios hasta 24 horas por 60 minutos cada hora igual a 1.440 minutos diarios máximo. Es decir, que Dom(B) = [0, 1.440]. Comparamos, entonces, las imágenes (o límites) en:

a) Extremos del intervalo de definición: $B(0) = -954$; $B(1.440) = -2.869.434$
b) Discontinuidades de B y/o de B': No tiene (la función es un polinomio)
c) $B'(t)=0 \Leftrightarrow -3t+168 = 0 \Leftrightarrow 3t=168 \Leftrightarrow t=56$. Imagen: $B(56)=3.750$

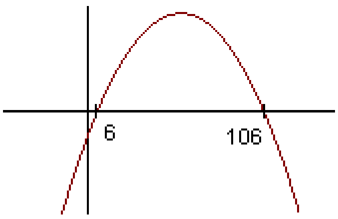
Por tanto, el mínimo absoluto (que no nos lo piden) se alcanza para t=1.440 y su valor es de –2.869.434 (mínima imagen/límite de entre los puntos estudiados), y el máximo absoluto está en t=56 y vale 3.750 (máxima imagen/límite entre los puntos estudiados). La respuesta es la que obtuvimos antes, evidentemente.

   b) **Calcule en qué intervalo debe estar comprendido el tiempo diario dedicado a publicidad para que la empresa obtenga beneficio positivo.**

Responder a esta cuestión consiste en interpretar la gráfica. Para completarla, necesitamos las intersecciones con OX:

$B(t)=0 \Leftrightarrow -1,5t^2+168t-954=0 \Leftrightarrow$ (multiplicamos los dos miembros por –2 para eliminar decimales y hacer que el coeficiente de la máxima potencia sea positivo):

$$3t^2-336t+1908=0 \Leftrightarrow t = \frac{336 \pm \sqrt{112896-22896}}{6} = \frac{336 \pm 300}{6} = \begin{cases} =106 \\ =6 \end{cases}$$



La gráfica es, consiguientemente, la adjunta. A la vista de ella, se concluye que los valores de t que hacen que la y (el beneficio) sea mayor que 0 estrictamente son:

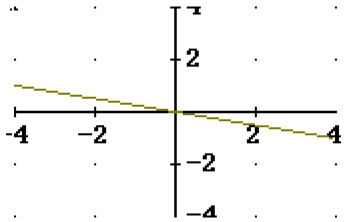
$t \in (6, 106)$

Es decir, hay beneficio positivo con más de 6 minutos de publicidad y menos de 106 diarios.

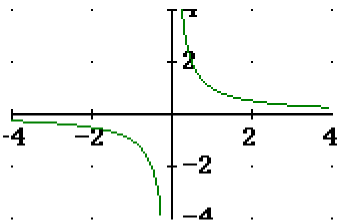
2) Dada la función $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x}{4} & \text{si } 0\le x\le 2 \\ -\dfrac{1}{x} & \text{si } 2<x \end{cases}$

a) Dibuje la gráfica de esta función

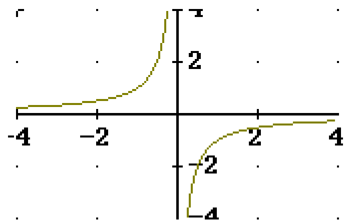
En [0, 2] la función es un trozo de la recta $y=-\dfrac{x}{4}$:



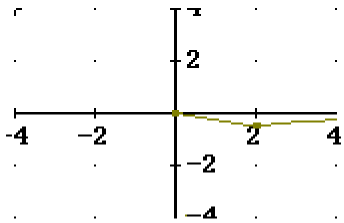
En (2, +∞) es la hipérbola equilátera $y=\dfrac{1}{x}$ cambiada de signo:



Se transforma en ⇒



Luego la gráfica es:



b) Estudie su continuidad, asíntotas, monotonía y extremos

Continuidad

- [0, 2): $f(x)=-\dfrac{1}{4}x$ que no tiene discontinuidades (es polinómica) ⇒ Continua en todo el intervalo.
- (2, +∞): $f(x)=-\dfrac{1}{x}$, continua salvo en x=0, que anula el denominador, pero que no pertenece a (2, +∞) ⇒ Continua en todo el intervalo.
- x=2: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}\left(-\dfrac{x}{4}\right) = -\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left(-\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{1}{2}$ ⇒ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-\dfrac{1}{2}=f(2)$ ⇒ Es continua.

Luego es continua en todo [0, +∞)

Asíntotas

No tiene asíntotas verticales, porque no hay discontinuidades. Por el lado de la recta, no tiene asíntotas. Por el lado de la hipérbola, calculamos asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0 \;\Rightarrow\;$ $y=0$ es asíntota horizontal por el lado del $+\infty$. Por tanto, no tiene oblicua.

Monotonía y extremos

$$f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{4} & \text{si } 0<x<2\\ \frac{1}{x^2} & \text{si } 2<x\end{cases} \qquad \text{y } \nexists f'(2) \text{ porque } f'(2^-)\neq f'(2^+)$$

- Discontinuidades de f: No tiene
- Discontinuidades de f': $x=2$
- Puntos que anulan f': No hay, porque $-\frac{1}{4}=0$ no es posible y $\frac{1}{x^2}=0$ requiere que $1=0$, luego tampoco es posible.

Por tanto:

	(0, 2)	2	(2, +∞)
f'	–	∄	+
f	↘	–1/2	↗

Luego tiene un mínimo relativo en (2, –1/2), ya que antes es decreciente y luego creciente, y la función tiene imagen para $x=2$.

MATEMÁTICAS 2º BACH. CC. SS. 4 de abril de 2002

Análisis

1) La altura, en metros, que alcanza una pelota lanzada hacia arriba en función del tiempo (en segundos) transcurrido desde su lanzamiento, viene dada por la expresión $f(t) = \frac{5t}{2} - \frac{t^2}{2}$ ¿en qué instante alcanzará la pelota su altura máxima? ¿Cuál es dicha altura? *(3 puntos)*

2) Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x \leq -1 \\ -x^2 + 2 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ \mathrm{L}x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

   a) Calcule el valor de "a" para que f sea continua en $x = -1$ *(1 punto)*
   b) Represente gráficamente la función anterior si $a = 3$ *(2 puntos)*
   c) Justifique la existencia o no de derivada en los puntos $x = -1$ y $x = 1$ para la función obtenida en el apartado anterior. *(1 punto)*

3) a) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^3 - 1$ en cada uno de los puntos en los que su pendiente sea igual a 3 *(2 puntos)*
   b) Dada la función $f(x) = x^3+ax^2+b$, calcule a y b para que $f(x)$ tenga un punto de inflexión en $(-1, 2)$ *(1 punto)*

Soluciones

1) **La altura, en metros, que alcanza una pelota lanzada hacia arriba en función del tiempo (en segundos) transcurrido desde su lanzamiento, viene dada por la expresión $f(t)=\frac{5t}{2}-\frac{t^2}{2}$ ¿en qué instante alcanzará la pelota su altura máxima? ¿Cuál es dicha altura?**

Al tratarse de una parábola abierta hacia abajo, con máximo (puesto que el coeficiente de t^2 es negativo), dicho máximo será el vértice, y es lícito limitarse a calcularlo:

Eje: $t=\frac{-b}{2a} \Rightarrow t=\frac{-\frac{5}{2}}{2\frac{-1}{2}} \Rightarrow t=\frac{-\frac{5}{2}}{-1} \Rightarrow t=\frac{5}{2}$

Vértice: $f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5\frac{5}{2}}{2}-\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2}{2}=\frac{25}{4}-\frac{\frac{25}{4}}{2}=\frac{25}{4}-\frac{25}{8}=\frac{50}{8}-\frac{25}{8}=\frac{25}{8}$

Es decir, el máximo absoluto se alcanza para $t=5/2$ y vale 25/8, que es la altura máxima alcanzada.

Por el procedimiento general de cálculo de extremos absolutos, tendremos que comparar las imágenes o límites en los siguientes puntos:

a) Extremos del intervalo de definición: Suponemos que el tiempo $t\in[0, +\infty)$.

$$f(0)=\frac{5\cdot 0}{2}-\frac{0^2}{2}=0$$

$\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{5t}{2}-\frac{t^2}{2}=-\infty$ (el orden del ∞ producido por el término de segundo grado, es mayor que el del primer sumando)

b) Discontinuidades de f ó de f': No hay (son polinómicas ambas)

c) Puntos que anulan la primera derivada: $f'(t)=0 \Leftrightarrow \frac{5}{2}-t=0 \Leftrightarrow t=\frac{5}{2}$

$$f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5\frac{5}{2}}{2}-\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2}{2}=\frac{25}{8} \text{ (se calculó antes)}$$

La máxima imagen es 25/8, obtenida para $t=5/2$, y la mínima (límite en este caso), $-\infty$. Por tanto, no tiene mínimo absoluto (la función baja hasta el $-\infty$) y el máximo absoluto es de 25/8, altura máxima conseguida para $t=5/2$.

2) **Dada la función** $f(x)=\begin{cases} 2x+a & \text{si } x\le -1 \\ -x^2+2 & \text{si } -1<x\le 1 \\ \mathrm{L}x & \text{si } x>1 \end{cases}$

a) Calcule el valor de "*a*" para que f sea continua en $x = -1$

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}(2x+a)=-2+a$

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}(-x^2+2)=-(-1)^2+2=-1+2=1$

Por tanto, el límite completo existirá si los dos laterales, que hemos visto que existen, coinciden. Eso sucederá cuando: $-2+a=1 \Leftrightarrow a=3$. Para este valor:

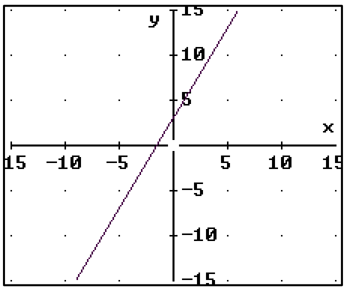
$\lim\limits_{x\to-1} f(x)=1$, y

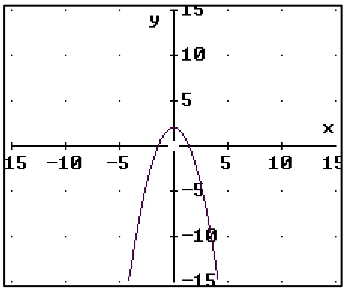
$f(-1) = 2(-1)+3 = -2+3 = 1$

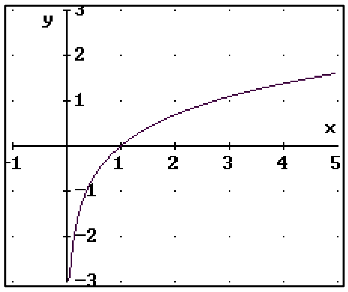
Por tanto, la función será continua.

b) Representé gráficamente la función anterior si *a* = 3

$y = 2x+3$ es una recta: $y = -x^2+2$ es una parábola: $y = \mathrm{L}x$ es conocida:

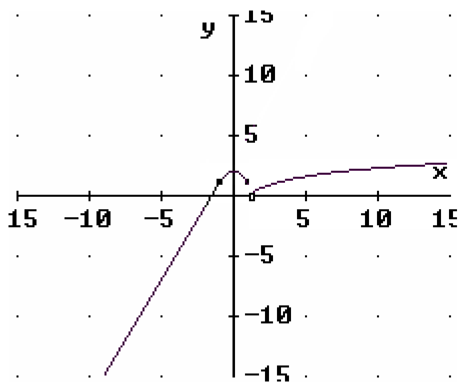






El dibujo de la recta es, simplemente, una tabla de valores. El de la parábola, pasa por calcular su eje x=0, su vértice (0, 2), y sus cortes con OX $(-\sqrt{2},0)$, $(\sqrt{2},0)$. y=Lx es conocida, y pasa por (1, 0) y (e, 1) (e=2,7182818284…).

Limitamos cada una de esas tres funciones a las zonas en las que f coincide con ellas y resulta:



c) Justifique la existencia o no de derivada en los puntos *x* = –1 y *x* = 1 para la función obtenida en el apartado anterior.

En x=1 la función no es continua, como se aprecia en el dibujo. Pero las conclusiones de cálculo a partir de gráficos deben evitarse, por lo que nos aseguramos de ello comprobándolo analíticamente.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(-x^2+2) = 1 \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \mathrm{L}x = 0$$

Es decir, hay una discontinuidad de salto finito (primera especie). Pues bien, al no ser continua, no puede ser derivable en x=1.

En $x=-1$ si es continua (se comprobó antes). Puede ser, por tanto, derivable. Lo comprobamos por la definición de derivada:

- $$\lim_{x\to -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1^-} \frac{2x+3-1}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{2x+2}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{2(x+1)}{x+1} = 2$$
- $$\lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{-x^2+2-1}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{-x^2+1}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{-(x^2-1)}{x+1} =$$
  $$\lim_{x\to -1^+} \frac{-(x-1)(x+1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} -(x-1) = 2$$

Ha sido necesario calcular la derivada por la derecha y por la izquierda, dado que la definición de f es diferente a un lado y otro de –1. Como ambos límites coinciden, existe el límite completo, que es la derivada en –1: $f'(-1)=2$.

Observaciones: Cuando tenemos una función definida a trozos, podemos derivar las funciones que la componen directamente, usando las reglas de derivación, y restringir la validez de los resultados a intervalos abiertos (las fórmulas de las tablas de derivadas son válidas en intervalos abiertos). La derivada de los puntos que separan unas zonas de otras debe ser calculada por separado, aplicando la definición. Eso es lo que hemos hecho aquí.
Sin embargo, en la mayoría de las ocasiones, la derivada de los puntos que separan unas zonas de definición de otras coincide con el límite de la función derivada en dichos puntos, si existe. De modo que, si nos vemos apurados en un examen, podemos estudiar la continuidad de la función derivada para decidir si existe la derivada en esos puntos.
Pero el método no es fiable y se recomienda emplear la definición de derivada, como se ha hecho aquí. Por ejemplo, la función $f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } x<0 \\ x+1 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ tiene como derivada $f'(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } x>0 \end{cases}$. Como $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1$, parece que debe existir $f'(0)=1$. Pero no es así, porque f no es derivable en 0, ya que no es continua. También puede comprobarse calculando dicha derivada aplicando la definición. Otro ejemplo, si bien es de un nivel superior al de este curso, sería el de la función $g(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\leq 0 \\ x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{si } x>0 \end{cases}$, cuya derivada puede comprobarse que resulta $g'(x)=\begin{cases} 2x & \text{si } x\leq 0 \\ 2x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x} & \text{si } x>0 \end{cases}$ Luego g es derivable, incluyendo la derivada de 0, que se calcula aplicando la definición de derivada. Pero la función derivada g' no es continua en $x=0$ porque $\nexists \lim_{x\to 0^+} g'(x)$.
En caso de haber discontinuidad de salto finito para f' en uno de esos puntos de separación, entonces puede afirmarse que la función no será derivable en dicho punto. Esto se ha empleado en este documento en la resolución del apartado b (estudio de la monotonía) del problema 2 del examen del 11 de marzo de 2.002.

3) a) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^3 - 1$ en cada uno de los puntos en los que su pendiente sea igual a 3

Para calcular la ecuación de la recta tangente a una curva, necesitamos un punto de dicha recta y su pendiente.
El punto será donde la recta toque a la curva; es decir, es un punto que está sobre la curva. De este punto sólo conoceremos, por lo general, la coordenada x; la segunda coordenada se hallará sustituyendo dicho valor de x en la fórmula de la función.
La pendiente es, según la interpretación geométrica de la derivada, el valor de la derivada en el valor del x del punto de tangencia.
Una vez que tenemos el punto de tangencia $(a, f(a))$ y la pendiente $m=f'(a)$, la recta tangente será, según la ecuación punto-pendiente: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

En este problema no nos dan el punto de tangencia, sino la pendiente: 3. La coordenada x de dicho punto será tal que $f'(x)=3$, por la interpretación geométrica de la derivada. Es decir:

$$f'(x)=3 \Rightarrow 3x^2=3 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=-1 \text{ ó } x=1$$

Hay dos puntos donde eso ocurre, por lo que el problema tiene dos soluciones.

1ª: $x=1 \Rightarrow f(x)=f(1)=1-1=0 \Rightarrow$ El punto de tangencia es (1, 0). Como la pendiente es 3, la recta es: $y-0=3(x-1) \Rightarrow \boxed{y=3x-3}$

2ª: $x=-1 \Rightarrow f(x)=f(-1)=-1-1=-2 \Rightarrow$ El punto de tangencia es (–1, –2). Como la pendiente es 3, la recta es: $y+2=3(x+1) \Rightarrow y=3x+3-2 \Rightarrow \boxed{y=3x+1}$

b) Dada la función $f(x) = x^3+ax^2+b$, calcule a y b para que f(x) tenga un punto de inflexión en (–1, 2)

Primeramente, debe pasar por (–1, 2), para que pueda éste ser un punto de inflexión. Luego $f(-1)=2 \Rightarrow (-1)^3+a(-1)^2+b=2 \Rightarrow a+b=3$

Por otra parte, la x del punto de inflexión verifica que $f''(x)=0$. O sea: $f''(-1)=0 \Rightarrow$

Como $f'(x)=3x^2+2ax$ y $f''(x)=6x+2a$, será: $6(-1)+2a=0 \Rightarrow 2a=6 \Rightarrow \boxed{a=3}$

Sustituyendo en $a+b=3 \Rightarrow 3+b=3 \Rightarrow \boxed{b=0}$.

MATEMÁTICAS 2º BACH. CC. SS. 9 de diciembre de 2005

Análisis

1) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f definida de la forma $f(x) = 1 + \mathrm{L}(2x - 1)$ en el punto de abscisa $x = 1$. *(2 puntos)*

2) Sea la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$ *(5 puntos)*

   a) Determine su dominio, puntos de corte con los ejes, las asíntotas y la monotonía.

   b) Represente gráficamente esta función

3) Sea la función $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

   Estudie la continuidad y derivabilidad de f *(3 puntos)*

Los ejercicios de este examen proceden de los modelos oficiales de exámenes de selectividad del curso 2.004/2.005.

1) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* definida de la forma $f(x)=1+\text{L}(2x-1)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Del punto de tangencia, donde la recta y la curva se tocan, conocemos x=1. La segunda coordenada de dicho punto, al ser un punto de *f*, será, por tanto: $f(1) = 1+\text{L}(2-1) = 1 +\text{L}1 = 1+0 = 1$ $\Rightarrow$ El punto es (1, 1)

Para la pendiente de la tangente, necesitamos la función derivada: $f'(x)=0+\dfrac{2}{2x-1}=\dfrac{2}{2x-1}$ $\Rightarrow$ $f'(1)=\dfrac{2}{2-1}=\dfrac{2}{1}=2$ será la pendiente, puesto que $x = 1$ es la primera coordenada del punto de tangencia.

Aplicando la ecuación punto-pendiente de la recta, la tangente será: $y - 1 = 2(x - 1)$ $\Rightarrow$ $y = 2x - 2 +1$ $\Rightarrow$ $\boxed{y = 2x - 1}$

2) Sea la función $f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$

a) Determine su dominio, puntos de corte con los ejes, las asíntotas y la monotonía.

1. Dominio. $\boxed{D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}}$ porque –2 anula el denominador
2. Intersecciones con los ejes. OX: $y = 0$ $\Rightarrow$ $0=\dfrac{x+1}{x+2}$ $\Rightarrow$ $0 = x + 1$ $\Rightarrow$ $-1 = x$, que es una solución válida, porque no anula el denominador de la ecuación inicial $\Rightarrow$ $\boxed{(-1, 0)}$

   OY: $x = 0$ $\Rightarrow$ $y=\dfrac{0+1}{0+2}=\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\left(0,\dfrac{1}{2}\right)}$
3. Asíntotas. Horizontal: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{1}{1}=1$ $\Rightarrow$ $\boxed{y = 1 \text{ es A. Hor.}}$

   Verticales: Sólo podría tenerlas en $x = -2$, que es el único punto de discontinuidad. $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x+1}{x+2}=\left(\dfrac{-1}{0}\right)=\infty$ $\Rightarrow$ $\boxed{x = -2 \text{ es A. Vert.}}$

   Oblicua: No puede tenerla, puesto que posee asíntota horizontal (saldría ésta, de nuevo, si intentásemos calcularla).
4. Monotonía. $f'(x)=\dfrac{1(x+2)-1(x+1)}{(x+2)^2}=\dfrac{x+2-x-1}{(x+2)^2}=\dfrac{1}{(x+2)^2}$

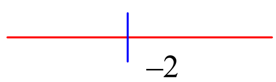
   Dividimos el D(*f*) en intervalos mediante:

   a) Discontinuidades de *f*: $x = -2$

   b) Discontinuidades de *f* ’: $x = -2$ (si anulamos el denominador de *f* ’ queda $(x+2)^2 = 0$ $\Rightarrow$ $x + 2 = \pm\sqrt{0}$ $\Rightarrow$ $x + 2 = 0$ $\Rightarrow$ $x = -2$)

   c) $f\,'(x) = 0$ $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{(x+2)^2}=0$ $\Rightarrow$ $1 = 0$, que no es posible para ningún valor de x.

   La división en intervalos la hacemos con ayuda del gráfico:


–2

   Resulta el siguiente cuadro:

	(0, 2)	2	(2, +∞)
f ’	+	∄	+
f	↗	∄	↗

A la vista de este resultado, concluimos que no existen extremos relativos.

5. Curvatura. No nos la piden, pero la vamos a calcular (en general, en un examen real no debe contestarse a lo que no se pregunte, si bien en este caso lo que hacemos es completar la información disponible para dibujar la gráfica). Comenzamos por calcular la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{0-2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{-2}{(x+2)^3}$$

a) Discontinuidades de f : $x = –2$

b) Discontinuidades de f": $x = –2$

c) f"$(x) = 0 \Rightarrow -2 = 0$ que no es posible.

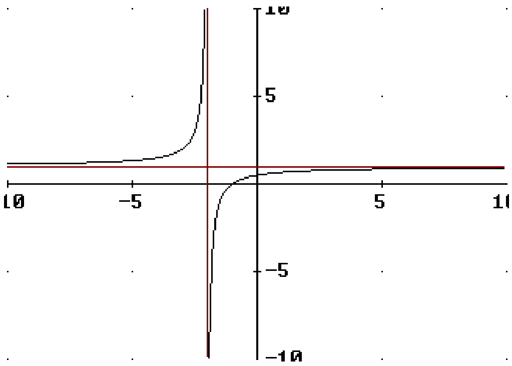
La división en intervalos es la misma que antes, por lo que resulta:

	(-∞,–2)	–2	(–2, +∞)
f"	+	∄	–
f	∪	∄	∩

No tiene puntos de inflexión: sería, en todo caso, $x = –2$, pero resulta que no es un punto del dominio.

d) Representa gráficamente esta función

Combinando los resultados anteriores, se obtiene la gráfica adjunta.



3) Sea la función $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Estudie la continuidad y derivabilidad de f

Continuidad.

- Intervalo (–∞, 1): f coincide con $y = 2^x$. Las exponenciales con continuas en todo $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f es continua en todo el intervalo.
- Intervalo (1, +∞): f coincide con $y = 2/x$, cuya única discontinuidad está en $x = 0$, que no pertenece al intervalo $\Rightarrow$ f es continua, también, en todo el intervalo.
- $x = 1$: Los puntos que separan distintas zonas de definición de las funciones definidas a trozos siempre se estudian por separado:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 2^x = 2^1 = 2 \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2}{x} = \frac{2}{1} = 2 \qquad f(1) = \frac{2}{1} = 2$$

Por tanto, $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 2 \Rightarrow f$ es continua en $x = 1$

Por tanto, f es continua en todo $\mathbb{R}$, por lo que puede ser derivable

.Derivabilidad

$$f'(x) = \begin{cases} 2^x \text{L}2 & \text{si } x < 1 \\ -\dfrac{2}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$ porque podemos derivar directamente en intervalos abiertos.

Para el punto que separa las zonas de definición, vemos los límites laterales de esta función:

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 2\text{ L}2 \qquad \lim_{x\to 1^+} f'(x) = -\frac{2}{1^2} = -2$$

Como no coinciden, no puede ser derivable la función f en $x = 1$.

MATEMÁTICAS 2º BACH. CC. SS. 10 de enero de 2006

Análisis

1) Sea la función $f(x)=\begin{cases}2^x & \text{si } x<1\\ \dfrac{2}{x} & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

   a) Estudie la continuidad y derivabilidad de f. *(2 puntos)*

   b) Calcule sus asíntotas. *(1 punto)*

   c) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$. *(2 puntos)*

2) El valor, en miles de euros, de las existencias de una empresa en función del tiempo t, en años, viene dado por al función $f(t) = -4t^2 + 60t - 15$, $1 \leq t \leq 8$. ¿Cuál será el valor máximo de las existencias? ¿En qué instante se alcanza? *(1.5 puntos)*

3) Sea la función $f(x) = x^3+3x^2$.

   a) Halle su punto de inflexión *(1 punto)*

   b) Dibuje la gráfica de la función estudiando previamente la monotonía y los extremos relativos *(2,5 puntos)*

Soluciones

Los ejercicios de este examen proceden de los exámenes de selectividad del curso 2.005 y de los modelos del curso 2.004/05 (el último problema)

1) Sea la función $f(x)=\begin{cases} 2^x & \text{si } x<1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de *f*. *(2 puntos)*

Continuidad

- Intervalo $(-\infty, 1)$: *f* coincide con $y=2^x$, que es continua en todos los puntos de $\mathbb{R}$, por ser exponencial. En particular, en los e este intervalo. Luego *f* es continua en todo el intervalo.
- Intervalo $(1, +\infty)$: *f* coincide con $y=\dfrac{2}{x}$, que es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$, porque 0 anula el denominador. Como $0\notin(1, +\infty)$, *f* es continua en todos los puntos del intervalo.
- x = 1: En primer lugar, $\exists f(1)=\dfrac{2}{1}=2$. Además:

  $$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} 2^x=2;\quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{2}{x}=2\ \Rightarrow\ \lim_{x\to 1} f(x)=2=f(1)$$

  Luego es continua en todo $\mathbb{R}$.

Derivabilidad

Usando las reglas de derivación en intervalos abiertos:

$f'(x)=\begin{cases} 2^x L2 & \text{si } x<1 \\ -\dfrac{2}{x^2} & \text{si } x>1 \end{cases}$ de donde $f'(1^-)=2^1L2=2\,L2$; $f'(1^+)=-2$. Como no coinciden, *f* no es derivable en $x=1$.

b) Calcule sus asíntotas. *(1 punto)*

Asíntotas verticales. Sólo puede tenerlas en los puntos de discontinuidad. Como vimos antes que es continua en todo $\mathbb{R}$, no puede tener asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales. La función tiene diferente definición en $-\infty$ que en $+\infty$. Distinguimos, entonces, a la hora de calcular el límite:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 2^x=\left(2^{-\infty}\right)=\left(\frac{1}{2^{+\infty}}\right)=\left(\frac{1}{+\infty}\right)=0\ \Rightarrow\ y=0 \text{ es asíntota}$$

horizontal por el lado de $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=\left(\frac{2}{+\infty}\right)=0\ \Rightarrow\ y=0 \text{ es asíntota horizontal, también,}$$

por el lado de $+\infty$

Asíntotas oblicuas. Al tener asíntota horizontal tanto al acercarnos a $-\infty$ como a $+\infty$, no tiene asíntotas oblicuas (al calcularlas, se obtendría, de nuevo, la asíntota horizontal).

c) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=2$. *(2 puntos)*

De los dos intervalos donde nos definen f de forma distinta, $x = 2$ pertenece a $[1, +\infty)$, donde $f(x) = \dfrac{2}{x}$. Nos limitamos a esta fórmula de f, pues.

Cuando $x = 2 \;\Rightarrow\; f(2) = \dfrac{2}{2} = 1 \;\Rightarrow\;$ El punto de tangencia es (2, 1).

La pendiente de la recta tangente será $f\,'(2)$, según la interpretación geométrica de la derivada. Como $f\,'(x) = -\dfrac{2}{x^2} \;\Rightarrow\; f\,'(2) = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2}$.

Luego la recta tangente será, usando la ecuación de la recta en forma punto-pendiente:

$$y-1 = -\frac{1}{2}(x-2) \;\Rightarrow\; y = -\frac{1}{2}x + 1 + 1 \;\Rightarrow\; y = -\frac{1}{2}x + 2$$

2) El valor, en miles de euros, de las existencias de una empresa en función del tiempo t, en años, viene dado por al función $f(t) = -4t^2 + 60t - 15$, $1 \leq t \leq 8$. ¿Cuál será el valor máximo de las existencias? ¿En qué instante se alcanza? *(1.5 puntos)*

Usamos el método general.

- Extremos del intervalo de definición: t=1 y t=8.
  $f(1) = -4\cdot1^2+60\cdot1-15 = -4+60-15 = 60-19 = 41$
  $f(8) = -4\cdot8^2+60\cdot8-15 = -256+480-15 = 480-271 = 209$
- Discontinuidades de f: No tiene, porque es polinómica.
- Discontinuidades de $f\,'$: Tampoco, por la misma razón, puesto que $f\,'(t) = -8t+60$
- $f\,'(t) = 0 \;\Rightarrow\; -8t+60 = 0 \;\Rightarrow\; 60 = 8t \;\Rightarrow\; t = 7{,}5$
  $f(7{,}5) = -4\cdot7{,}5^2+60\cdot7{,}5-15 = 210$

Por tanto, el máximo absoluto vale 210 y se alcanza para t=7,5. O sea, que el valor máximo de las existencias es 210 miles de euros y se alcanza en el instante t=7,5 años.

3) Sea la función $f(x) = x^3+3x^2$.

a) Halle su punto de inflexión *(1 punto)*

Tenemos dos posibilidades: Estudiar la curvatura completa, o usar el criterio de que si $f\,''(x) = 0$ y $f\,'''(x) \neq 0$, en $(x, f(x))$ hay un punto de inflexión. Ésta segunda forma es más corta y contesta lo que se pide, si bien la primera forma nos puede ser útil para el apartado siguiente. De todas formas, hay poca diferencia entre ambas. Responderemos de la segunda forma.

$f\,'(x) = 3x^2+6x \;\Rightarrow\; f\,''(x) = 6x+6 \;\Rightarrow\;$ Se anula la segunda derivada cuando $6x+6 = 0 \;\Rightarrow\; x = -1$

Como $f\,'''(x) = 6 \;\Rightarrow\; f\,'''(-1) = 6 \neq 0$, por lo que en $x = -1$ hay un punto de inflexión, cuyas coordenadas son, puesto que $f(-1) = 2$: $(-1, 2)$

Si hubiésemos empleado la primera forma, tendríamos:

- Discontinuidades de f ó $f\,''$: No hay, porque ambas son polinómicas
- $f\,''(x) = 0 \;\Rightarrow\; 6x+6 = 0 \;\Rightarrow\; x = -1$

Al dividir $\mathbb{R}$ en intervalos mediante el único punto obtenido, resulta:

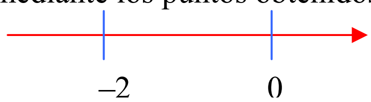
	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
$f\,''$	$-$	0	+
f	$\cap$	P.I.	$\cup$

Por lo que el punto de inflexión es el obtenido antes: $(-1, 2)$

b) Dibuje la gráfica de la función estudiando previamente la monotonía y los extremos relativos *(2,5 puntos)*

- Discontinuidades de f ó f': No hay, porque ambas son polinómicas
- $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2+6x = 0 \Rightarrow x(3x+6) = 0 \Rightarrow$ Como un producto vale 0 sólo si alguno de los factores se anula: $\begin{cases} x = 0 \\ o \\ 3x+6=0 \Rightarrow 3x=-6 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$

Dividimos R en intervalos mediante los puntos obtenidos:

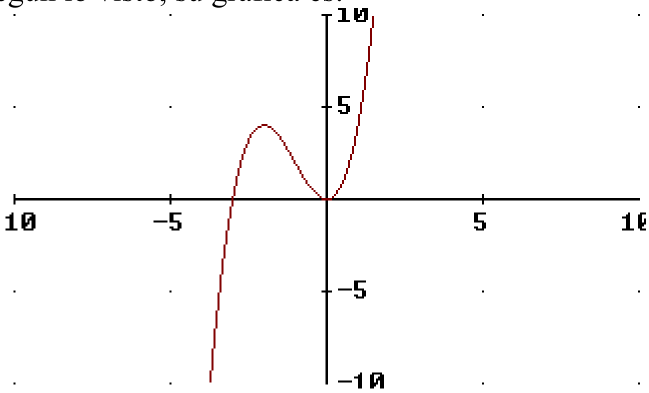


Obteniendo:

	(–∞, –2)	–2	(–2, 0)	0	(0, +∞)
f'	+	0	–	0	+
f	↗	Máx	↘	Mín	↗

Como $f(-2) = 4 \Rightarrow (-2, 4)$ Máximo relativo (antes es creciente, después, decrec.)
Y $f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$ es mínimo relativo (antes, decreciente; después, creciente)

Teniendo en cuenta que, al ser una función polinómica, su dominio es todo R, y no tiene asíntotas, según lo visto, su gráfica es:



MATEMÁTICAS 2º BACH. CC. SS. 31 de enero de 2006

Análisis (Recuperación)

1) Halle $f'(2)$, $g'(4)$ y $h'(0)$ para las funciones definidas de la siguiente forma:

$$f(x)=x^2+\frac{16}{x^2}\,;\quad g(x)=(x^2+9)^3\,;\quad h(x)=\mathrm{L}(x^2+1)\,.$$ *(3 puntos)*

2) Estudiar y dibujar, basándose en el estudio previo, la gráfica de la función:

$$g(x)=\frac{3-x}{x-2}$$ *(5 puntos)*

3) Sea f la función definida por: *(2 puntos)*

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+1 & \text{si} \quad x<1 \\ x^2+bx+3 & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$$

Determine los valores que deben tener a y b para que f sea derivable.

Soluciones

(Estos problemas están basados en la batería de exámenes preparados para Selectividad de 2.005)

1) Halle $f'(2)$, $g'(4)$ y $h'(0)$ para las funciones definidas de la siguiente forma:

$$f(x)=x^2+\frac{16}{x^2};\quad g(x)=(x^2+9)^3;\quad h(x)=\mathrm{L}(x^2+1).$$

Simplemente, aplicando las reglas de derivación, se obtiene:

$$f'(x)=2x-\frac{32x}{x^4}=2x-\frac{32}{x^3} \qquad \Rightarrow\quad f'(2)=4-\frac{32}{8}=4-4=0$$

$$g'(x)=3(x^2+9)^2 2x=6x(x^2+9)^2 \qquad \Rightarrow\quad g'(4)=24(16+9)^2=15.000$$

$$h'(x)=\frac{2x}{x^2+1} \qquad \Rightarrow\quad h'(0)=\frac{0}{1}=0$$

2) Estudiar y dibujar, basándose en el estudio previo, la gráfica de la función:

$$g(x)=\frac{3-x}{x-2}$$

a) Dominio: D(f) = R–{2}, ya que 2 anula el denominador, y no se puede dividir entre cero.

b) Par/Impar: $g(-x)=\dfrac{3+x}{-x-2}=\dfrac{3+x}{-(x+2)}=-\dfrac{3+x}{x-2}$ que no coincide ni con $g(x)$ ni con $-g(x)$. Por tanto, ni es par, ni impar.

c) Intersecciones con los ejes: Si $x=0 \Rightarrow y=-3/2$. Corta a OY en (0, –3/2).
Si $y=0 \Rightarrow 0=\dfrac{3-x}{x-2} \Rightarrow 0=3-x$ (siempre que la solución no anule el denominador $x-2$) $\Rightarrow x=3 \Rightarrow$ Corta a OX en (3, 0).

d) Monotonía y extremos relativos: $g'(x)=\dfrac{-(x-2)-(3-x)}{(x-2)^2}=\dfrac{-x+2-3+x}{(x-2)^2}=-\dfrac{1}{(x-2)^2}$

- Discontinuidades de g ó de g': $x=2$, que anula el denominador tanto de una como de otra.
- Puntos que anulan g': No hay (el numerador nunca se anula).

Dividimos R en intervalos por el único punto obtenido, y resulta:

	(0, 2)	2	(2, +∞)
g'	–	∄	–
g	↘	∄	↘

No tiene extremos relativos.

e) Curvatura y puntos de inflexión: $g''(x)=\dfrac{2(x-2)}{(x-2)^4}=\dfrac{2}{(x-2)^3}$

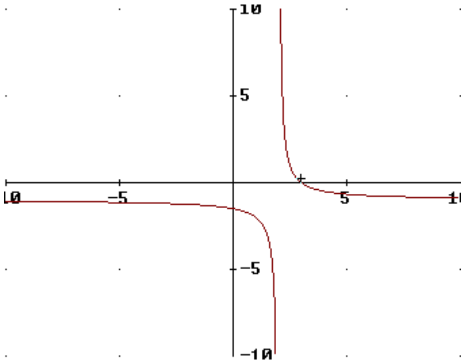
- Discontinuidades de g ó de g'': $x=2$
- Puntos que anulan g': No hay (el numerador nunca se anula).

Dividimos R en intervalos por el único punto obtenido, y resulta:

	(0, 2)	2	(2, +∞)
g''	–	∄	+
g	∩	∄	∪

No tiene puntos de inflexión, puesto que $x = 2$ no pertenece al dominio.

f) <u>Gráfica</u>:



3) Sea f la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 + bx + 3 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Determine los valores que deben tener a y b para que f sea derivable.

En primer lugar, para ser derivable debe ser continua. Como en las dos zonas en las que se define f lo hace con expresiones polinómicas, que siempre son continuas, sólo hay que exigirle la continuidad en el punto de separación de ambas zonas de definición, o sea, en $x = 1$. Como $f(1)$ existe, y vale $4+b$, y los límites laterales son:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (ax^2 + 1) = a+1 \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^2 + bx + 3) = 4+b$$

hay que exigir: $a+1 = 4+b \;\Rightarrow\; a = 3+b$

Por otra parte, $f'(x) = \begin{cases} 2ax & \text{si} \quad x < 1 \\ 2x + b & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

Exigimos que $f'(1^-) = f'(1^+) \;\Rightarrow\; 2a = 2+b$. Sustituyendo aquí $a = 3+b$:

$$2(3+b) = 2+b \;\Rightarrow\; 6+2b = 2+b \;\Rightarrow\; b = -4.$$

Sustituyendo: $a = 3+b = 3-4 = -1$

Luego $a = -1$, $b = -4$.

MATEMÁTICAS 2º BACH. CC. SS. 22 de mayo de 2006

Análisis

1) Sea la función $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x & \text{si} \quad x\le 0\\ x^2+ax & \text{si} \quad x>0\end{cases}$

   a) Para $a=-2$ represente gráficamente la función f, e indique sus extremos relativos. *(2 puntos)*

   b) Determine el valor de a para que la función f sea derivable. *(1,5 puntos)*

2) a) Determine a y b en la ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + 5$ sabiendo que ésta tiene un máximo en el punto (2, 9) *(2 puntos)*

   b) Calcule las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}$ *(1,5 puntos)*

3) El beneficio, en millones de euros, de una empresa en función del tiempo t, en años, viene dado por:

$$f(t) = -t^2 + 12t - 31, \quad 4 \le t \le 7.$$

   b) Represente la gráfica de la función f. *(1,5 puntos)*

   c) ¿Para qué valor de t alcanza la empresa su beneficio máximo y a cuánto asciende? ¿Para qué valor de t alcanza su beneficio mínimo y cuál es éste? *(1,5 puntos)*