

TEMA 1: MATRICES**Ejercicio 1.-**

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, calcula $BB^t - AA^t$.

Ejercicio 2.-

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 1 & y \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, halla x e y para que se verifique $ABC = A^tC$.

Ejercicio 3.-

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ¿se pueden encontrar matrices C y D para que existan los productos ACB y BDA?.

Ejercicio 4.-

Halla A^2 , A^3 , A^4 y A^5 , siendo A la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se percibe algún patrón que permita adivinar cuánto vale A^{50} y en general A^n ?

Ejercicio 5.-

Encuentra todas las matrices X cuadradas de orden 2 que satisfacen la ecuación $AX = XA$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 6.-

Determina dos matrices X e Y tales que:

$$3X - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \quad 4X - 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7.-

Calcula el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \\ -5 & -10 & m \end{pmatrix}$$

Según los valores del parámetro real m.

Ejercicio 8.-

Dada la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ m & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

¿Para qué valor o valores de m no existe la matriz inversa de A?

Ejercicio 9.-

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, halla una matriz B tal que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 10.-

Dadas las matrices:

$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, halla la matriz X que verifica que $AXB = 2C$.

Ejercicio 11.-

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, halla una matriz B tal que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 12.-

Dadas las matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y } E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Realiza, si es posible, los siguientes cálculos:

a) $A^t C \cdot C$
b) CD^t

c) $(B+E)^t$
d) DD^t

e) $A^t C$
f) $(3E)^t$

Ejercicio 13.-

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

- a) Calcula $A^2 + 2AB + B^2$
 b) Calcula $(A + B)^2$

Ejercicio 14.-

Dadas las matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Determina la dimensión de la matriz M para que pueda hacerse el producto AMC.
 b) Determina la dimensión de N para que $C^t N$ sea una matriz cuadrada.

Ejercicio 15.-

Sea la matriz 1×3 $A = (1 \quad 2 \quad a)$. Calcula el valor de a sabiendo que $AA^t = 5$.

Ejercicio 16.-

Determina los valores de x e y que hacen cierta la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 17.-

Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 18.-

Sabiendo que el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & -1 \\ -11 & -4 & a \end{pmatrix}$ es 2, determina el valor de a.

Ejercicio 19.-

Calcula, si existe, la inversa de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

e) $E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

f) $F = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

g) $G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

h) $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

i) $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

j) $J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Ejercicio 20.-

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcula $C + AB$, $C^{-1} + (AB)^{-1}$ y $(C+AB)^{-1}$

Ejercicio 21.-

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, calcula $AA^t - 5A^{-1}$, siendo A^t y A^{-1} , las matrices traspuesta e inversa de A , respectivamente.

Ejercicio 22.-

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, calcula el valor de a sabiendo que no tiene inversa.

Ejercicio 23.-

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, halla los valores de k para los que la matriz BA tiene inversa.

Ejercicio 24.-

Encuentra una matriz X que verifique $X - B^2 = A \cdot B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 25.-

Determina la matriz X que verifica $AXA - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 26.-

Prueba que la matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ no tiene inversa.

Ejercicio 27.-

Si A es una matriz de orden n tal que $A^2 = A$ y $B = 2A - I$, siendo I la matriz identidad de orden n , calcula B^2 .

Ejercicio 28.-

Calcula las matrices A y B que verifican:

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ 2A - 2B &= \begin{pmatrix} -6 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio 29.-

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, comprueba que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

Ejercicio 30.-

Comprueba que la matriz inversa de A es A^{-1} :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 31.-

Estudia el rango de estas matrices y di, en cada caso, el número de columnas que son linealmente independientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 32.-

Calcula X tal que $X - B^2 = A \cdot B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 33.-

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, calcula A^2, A^3, \dots, A^{128} .

Ejercicio 34.-

Comprueba que $A^2 = 2A - I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3.

Utiliza esa igualdad para calcular A^4 .

Ejercicio 35.-

a) Comprueba que la inversa de A es A^{-1} :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 0 \\ -3/5 & 6/5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calcula la matriz X que verifica que $XA = B$, siendo A la matriz anterior y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 36.-

Determina las matrices A y B que son solución del siguiente sistema matricial:

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix} \quad 2A + B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 37.-

Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro k:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix}$$

Ejercicio 38.-

Halla el valor de k para que el rango de la matriz A sea 2:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 39.-

Determina, si es posible, un valor de k para que la matriz $(A - kI)^2$ sea la matriz nula, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 40.-

Un industrial fabrica dos tipos de bombillas: transparentes (T) y opacas (O). De cada tipo se hacen cuatro modelos: M_1 , M_2 , M_3 y M_4 .

$$\begin{array}{c} \text{T} \quad \text{O} \\ M_1 \begin{pmatrix} 300 & 200 \end{pmatrix} \\ M_2 \begin{pmatrix} 400 & 250 \end{pmatrix} \\ M_3 \begin{pmatrix} 250 & 180 \end{pmatrix} \\ M_4 \begin{pmatrix} 500 & 300 \end{pmatrix} \end{array}$$

Esta tabla muestra la producción semanal de bombillas de cada tipo y modelo.

El porcentaje de bombillas defectuosas es el 2 % en el modelo M_1 , el 5 % en el M_2 , el 8 % en el M_3 y el 10 % en el M_4 .

Calcula la matriz que expresa el número de bombillas transparentes y opacas, buenas y defectuosas que se producen.

Ejercicio 41.-

Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula, si es posible:

- Una matriz X tal que $X \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- Una matriz Y tal que $Y \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 42.-

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, halla el valor de x e y para que se cumpla la igualdad $A^2 - xA - yI = 0$.

Ejercicio 43.-

Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/10 & 1 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

- Calcula $A + A^2$
- Resuelve el sistema $A^5 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 44.-

Sean A y B las matrices dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Encuentra las condiciones que deben cumplir los coeficientes a, b, c para que se verifique que $A \cdot B = B \cdot A$.

Ejercicio 45.-

Una matriz de 3 filas y 3 columnas tiene rango 3.

- ¿Cómo puede variar el rango si quitamos una columna?
- Si suprimimos una fila y una columna, ¿podemos asegurar que el rango de la matriz resultante sea 2?

Ejercicio 46.-

¿Es posible añadir una fila a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

de forma que la nueva matriz tenga rango 4?. Razona tu respuesta.

Ejercicio 47.-

Estudia el rango de las siguientes matrices según los valores de a:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & a \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 48.-

Calcula la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 49.-

Estudia el rango de las siguientes matrices:

a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 50.-

Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro que aparece en ellas:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 51.-

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Halla A^{-1} y B^{-1} .
- Halla la matriz inversa de $A \cdot B$.

Ejercicio 52.-

Sea $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- Halla los valores de x para los que la matriz A tiene inversa.
- Calcula, si es posible, A^{-1} para $x = 2$.

Ejercicio 53.-

Determina si las siguientes ecuaciones tienen solución. En caso afirmativo, determina la matriz solución:

a)
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

SOLUCIONES - MATRICES

$$1. \quad BB^t = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ -10 & 25 \end{pmatrix} \quad AA^t = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad BB^t - AA^t = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ -8 & 20 \end{pmatrix}$$

$$2. \quad ABC = \begin{pmatrix} -X+2 \\ -X+2y \end{pmatrix} \quad A^tC = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \text{ Igualando se obtiene el sistema:}$$

$$\left. \begin{array}{l} -x+2=0 \\ -x+2y=2 \end{array} \right\} \text{cuya solución es } x=2 \text{ e } y=2.$$

3. C cuadrada de orden 2 y D cuadrada de orden 3.

$$4. \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ en general } A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y en particular } A^{50} = \begin{pmatrix} 1 & 50 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Las matrices han de ser diagonales.

$$6. \quad X = \begin{pmatrix} -1 & -14 \\ 18 & -3 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} -2 & -20 \\ 23 & -4 \end{pmatrix}$$

7. Si $m \neq -15$, el rango es 3.
Si $m = -15$, el rango es 2.

8. Para $m = 1$ no existe la inversa.

$$9. \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } B = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$10. \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}. \quad X = A^{-1} \cdot 2C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

11. Coincide con el ejercicio 9.

12.

$$a) \quad A^tC = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -7 \\ 1 & 10 & -17 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } A^tCC = \begin{pmatrix} -10 & -26 & 22 \\ -44 & -50 & -32 \\ -14 & -14 & -14 \end{pmatrix}$$

b) No se puede realizar.

$$\text{c) } (B+E)^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } DD^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e) Hecho en el apartado a).

$$\text{f) } (3E)^t = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$13. \left| \begin{array}{l} A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ B^2 = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} \\ A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 2 & 15 \end{pmatrix} \\ (A+B)^2 = \begin{pmatrix} 15 & 2 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \end{array} \right|$$

14.

a) M matriz cuadrada de orden 3.

b) C orden 3x2, C^t es de orden 2x3. N ha de ser de orden 3x2 y, por tanto, C^tN será cuadrada de orden 2.

15. a=0.

16. Multiplicando las matrices se obtiene que:

$$\left. \begin{array}{l} \begin{pmatrix} x-y \\ 3x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2x \\ 3y-2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{array}{l} x-y = 3+2x \\ 3x+2y = 3y-2 \end{array} \end{array} \right\} \text{cuya solución es } x = \frac{-5}{4} \quad y = \frac{23}{4}$$

17. Rango A = 2, rango B = 3, rango C = 2, rango D = 3, rango E = 3.

18. Para que el rango sea 2 ha de ser a = 5.

19.

$$\text{a) } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 11 & 11 \\ -5 & -1 \\ 11 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{h) } H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{f) } F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-3}{4} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{i) } I^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{g) } G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{-3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{-3}{20} & \frac{1}{20} & \frac{-7}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{j) } J^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

20. $C + AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $(A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, por lo que se tiene que $C^{-1} + (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $(C + AB)^{-1} = I$.

21. Con cálculos previos, se tiene que:

$$\left. \begin{array}{l} A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \\ A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow A \cdot A^t - 5 \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

22. Para $a = 2$ no tiene inversa.

23. Para cualquier valor de k tiene inversa.

$$\text{24. } B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 6 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix} \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 9 \\ 7 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{y por tanto, } X = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 13 & 10 & 25 \\ 0 & 0 & 48 \end{pmatrix}$$

$$\text{25. } X = A^{-1}BA^{-1}; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{y por tanto } X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

26. Tan sólo hay que probarlo.

27. B^2 es la identidad de orden n.

$$28. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

29. Es comprobarlo.

30. Hay que hacer los productos $A \cdot A^{-1}$ y $A^{-1} \cdot A$ y comprobar que, en ambos casos, se obtiene la identidad de orden 3.

31. Rango A = 3; Rango B = 2; Rango C = 2; Rango D = 4.

$$32. A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad X = B^2 + AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$33. A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^4 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \dots$$

$$A^{128} = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

34. Análogo al ejercicio 27.

35.

a) Hay que hacer los productos $A \cdot A^{-1}$ y $A^{-1} \cdot A$ y comprobar que, en ambos casos, se obtiene la identidad de orden 3.

$$b) X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$36. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

37.

- Rango M = 3 para cualquier valor de k.
- Si $k = -1/2$ el rango de N es 2. Para $k \neq -1/2$ el rango es 3.
- Si $k = -2$, el rango de P es 1. Si $k \neq -2$, el rango es 2.
- Si $k = 2$, el rango de Q es 2. Si $k \neq 2$, el rango es 3.

38. Si $k = 2$, el rango es 2.

39. No es posible encontrar dicho valor de k.

$$41. X = \begin{pmatrix} -1/11 & 9/11 & 1/11 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 3/11 & -5/11 & -3/11 \\ 6/11 & 12/11 & 5/11 \end{pmatrix}$$

$$42. x = 3 ; y = -8.$$

$$43. a) A + A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3/10 & 2 & 0 \\ 3/10 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad b) x = 20; y = -5; z = -9$$

44. Ha de verificarse $a = b = c$

45. Si quitamos una columna el rango será 2.

46. No, ya que tiene rango 2.

47. Matriz M

- $a \neq -2, 1$ rango de M es 3
- Si $a = -2$, el rango de M es 2
- Si $a = 1$, el rango de M es 2.

Matriz A

- $a \neq 0$ rango de A es 3
- Si $a = 0$, el rango de A es 2

48. Las inversas son:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 1/2 \\ -3/2 & -1/2 & 1 \\ -3/4 & -3/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 2/5 & -1/5 & 0 \end{pmatrix}$$

49. a) Rango 3. b) Rango 2

50. Matriz A

- $a \neq 2$ rango de A es 3
- Si $a = 2$, el rango de A es 2.

Matriz B

- $a \neq -8, 1$ rango de B es 3
- Si $a = -8$, el rango de B es 2

- Si $a = 1$, el rango de B es 2.

$$51. A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 8 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -9 & 11 & -14 \end{pmatrix}$$

52. Tiene inversa para cualquier valor de x distinto de 0.

$$\text{Para } x = 2 \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

53.

a) No tiene solución, ya que no existe la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

b) La solución es $\begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 5/4 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$