

Ejemplos

1) Expresa el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas en forma matricial:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2) Expresar el siguiente sistema dado por su expresión matricial mediante ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$$

3) Comprobar si $x = 1$; $y = -1$; $z = 0$ es una solución del siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

En la expresión matricial sustituimos la matriz de las incógnitas X por la solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1+0 \\ -1-1+2 \\ 2+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La igualdad es cierta $\rightarrow x = 1$; $y = -1$; $z = 0$ es solución.

Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales

Atendiendo al número de sus soluciones, los sistemas se clasifican en:

- Sistemas **Incompatibles**: no admiten ninguna solución.
- Sistemas **compatibles**: admiten alguna solución. Éstos se clasifican en:
 - Sistemas **compatibles determinados**: tienen una única solución.
 - Sistemas **compatibles indeterminados**: tienen infinitas soluciones.

Ejemplos

• Sistema compatible determinado: $\begin{cases} 3x - y + z = -3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x - 2y - z = 2 \end{cases}$ Solución: $x = 1, y = 2, z = -4$

• Sistema compatible indeterminado: $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + y + z = 3 \\ 3x + 3z = 3 \end{cases}$ Solución: $x = 1 - \lambda, y = 1 + \lambda, z = \lambda, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(la tercera ecuación es suma de las dos anteriores)

• Sistema incompatible: $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 2x - 3y + 4z = 6 \\ 3x - y + 5z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -7y + 2z = -2 \\ -7y + 2z = -11 \end{cases} \rightarrow 0 = 9 \rightarrow \text{No hay solución}$

Discusión del sistema

A la hora de discutir un sistema escalonado, en el cual todas las ecuaciones son linealmente independientes, se pueden presentar tres situaciones:

- Si el nº de ecuaciones = nº de incógnitas, el sistema es compatible determinado.
- Si el nº de ecuaciones > nº de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.
- Si hay una ecuación de la forma $0 \cdot x = b$, siendo $b \neq 0$, el sistema es incompatible.

Ejemplos

$$a) \begin{cases} 4x + 2y = 3 \\ x + y - z = 2 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

El sistema es incompatible (3^{a} ecuación: $0 \cdot x = -1$), por tanto, no hay solución.

$$b) \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{E_2:E_2+E_1 \\ E_3:E_3+E_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_3:E_3-2E_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

El sistema es compatible indeterminado.

Hay dos ecuaciones l.i., con lo cual, consideramos una de las incógnitas como parámetro y expresamos las restantes en función de dicho parámetro.

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3y + z = -2x \\ y = 3x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = -2x + 3y = -2x + 9x = 7x \\ y = 3x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = 7x \\ y = 3x \end{cases}$$

Solución: $(\lambda, 3\lambda, 7\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$c) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -5 & 6 & 29 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{E_2:E_2-2E_1 \\ E_3:E_3-E_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -6 & 5 & 27 \end{array} \right) \xrightarrow{E_3:6E_2+E_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 23 & 69 \end{array} \right)$$

El sistema es compatible determinado.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + 3z = 7 \\ 23z = 69 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 + 2 - 3 = 1 \\ y = 7 - 9 = -2 \\ z = 3 \end{cases} \rightarrow \text{Solución: } (1, -2, 3)$$

3 SISTEMAS DE CRAMER. REGLA DE CRAMER

o **Definición:** Se llaman *sistemas de Cramer* aquellos sistemas de ecuaciones lineales que cumplen las siguientes condiciones:

- Tiene el mismo nº de ecuaciones que de incógnitas: $m = n$
- El determinante de la matriz de los coeficientes de las incógnitas es no nulo: $|A| \neq 0$

Regla de Cramer

Todos los sistemas de Cramer son compatibles determinados y su solución única viene dada por:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

donde

- A_i es la matriz que se obtiene a partir de la matriz de los coeficientes, cambiando la columna i por la columna de los términos independientes
- A es la matriz formada por los coeficientes.

Consideramos en forma matricial: $A \cdot X = B$, tal que $|A| \neq 0$:

Multiplicando los dos miembros de la ecuación matricial por la izquierda por A^{-1} , queda:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Es decir:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Si desarrollamos este producto, obtenemos:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} ; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} ; \quad \dots ; \quad x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}}{|A|}$$

Observación:

Si $|A| = 0$ se tiene que alguna ecuación es combinación lineal de las otras (i.e. esa ecuación “sobra”); por lo tanto, basta con detectar dicha ecuación, eliminarla.

Para poder aplicar la regla de Cramer al sistema, se pasa una de las incógnitas como parámetro al otro miembro. Para ello, tenemos que comprobar que el nuevo sistema es efectivamente tipo Cramer, es decir, $|A| \neq 0$.

Ejemplos

1. Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x - 3y + 3z = -2 \\ 2x + y - z = 6 \\ 3x + 2y + 2z = 6 \end{cases}$$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 14 \neq 0 \rightarrow \text{Es un sistema de Cramer. La solución del sistema es:}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{28}{14} = 2 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{14}{14} = 1 \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-14}{14} = -1$$

2. Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x + z = 4 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{Es un sistema de Cramer. La solución del sistema es:}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{4}{4} = 1 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{8}{4} = 2 \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{12}{4} = 3$$

3. Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 3 \\ 2x - y + z = 5 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad (E_2 = E_1 + E_3) \rightarrow \text{Suprimiendo dicha ecuación, obtenemos el sistema:}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 2y = 3 - 2z \\ x + y = z \end{cases} \rightarrow |C| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 - 2z & -2 \\ z & -1 \end{vmatrix}}{|C|} = \frac{-3 + 4z}{3} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 - 2z \\ 2 & z \end{vmatrix}}{|C|} = \frac{5z - 6}{3}$$

 Es sistema es compatible indeterminado. La solución es: $\left(-1 + \frac{4}{3}z, \frac{5}{3}z - 2, z\right) \quad z \in \mathbb{R}$

Ejemplos

1) Clasificar el siguiente sistema y resolver en caso de ser compatible:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + z = 2 \\ 2x + y + 2z = 5 \end{cases}$$

Consideremos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} ; \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 2 & 1 & 2 & | & 5 \end{pmatrix}$$

$\text{rg } A = \text{rg } A^* = 2$ ya que $F_3 = F_1 + F_2$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ Es un sistema compatible indeterminado.

Consideramos del sistema las ecuaciones cuyos coeficientes forman parte del menor y consideremos como incógnitas principales aquellas cuyos coeficientes aparecen en el menor:

$$\begin{cases} x + y = 3 - z \\ x = 2 - z \end{cases}$$

Aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-z & 1 \\ 2-z & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{z-2}{-1} = 2-z \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-z \\ 1 & 2-z \end{vmatrix}}{-1} = \frac{2-z-3+z}{-1} = 1$$

Las infinitas soluciones del sistema son: $x = 2 - z$; $y = 1$; $z = z$, es decir, $(2 - \lambda, 1, \lambda) \forall \lambda \in \mathbb{R}$

2) Clasificar el siguiente sistema y resolver en caso de ser compatible:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ -3x + 2y + 3z = -2 \\ 2x - 3y - 5z = -4 \end{cases}$$

Consideremos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -5 \end{pmatrix} ; \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 2 \\ -3 & 2 & 3 & | & -2 \\ 2 & -3 & -5 & | & -4 \end{pmatrix}$$

$|A| = 0$ ya que $F_3 + F_2 + F_1 = 0 \rightarrow \text{rg } A = 2$, considerando que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 3 \neq 0$

Estudiamos el rango de A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 2 \\ -3 & 2 & 3 & | & -2 \\ 2 & -3 & -5 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 + F_2 + F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 2 \\ -3 & 2 & 3 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{rg } A^* = 3$$

Por tanto, el sistema es incompatible.

5 RESOLUCIÓN DE SISTEMAS: MÉTODO DE LA MATRIZ INVERSA

Ya hemos visto dos procedimientos de resolución de sistemas: método de Gauss y la regla de Cramer.

El método de la matriz inversa consiste en expresar el sistema en forma matricial $A \cdot X = B$ y despejar la matriz X , siempre que exista su inversa, A^{-1} :

$$A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Ejemplos

1) Resolver el siguiente sistema:
$$\begin{cases} -x + y + z = -1 \\ x - 3z = -18 \\ 2x - 5y + 3z = 52 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -5 - 6 - 3 + 15 = 1$$

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Adj}(A^T) = \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A^T) = \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de los adjuntos de cada elemento de A^T :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = -15$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(3+5) = -8$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = -(3+6) = -9$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -(3-1) = -2$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -(5-2) = -3$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Calculamos la matriz X , solución del sistema:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -18 \\ 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \text{La solución del sistema es: } x = 3, y = -5, z = 7$$

2) Resolver el siguiente sistema:
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + z = -1 \\ 3x + 2y + z = 6 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 5 \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A^T) = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema es: $x = 1, y = 2, z = -1$

6 DISCUSIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON PARÁMETROS

Recuerda que hay dos procedimientos para analizar el nº de soluciones del sistema:

- El teorema de Rouchè-Fröbenius.
- El método de Gauss.

Hay tres métodos de resolución de sistemas lineales compatibles:

- El método de Gauss.
- La regla de Cramer.
- Empleando la matriz inversa.

Ejemplos

1) Sea considera el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 2y + z = a \\ (a-2)x + y + 3z = 0 \\ (a-1)y = 1-a \end{array} \right\}$$

- a) Estudie el sistema, según los valores de $a \in \mathbb{R}$.
 b) Resuélvalo cuando sea compatible indeterminado.

Consideramos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ a-2 & 1 & 3 \\ 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & | & 1 \\ a-2 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & a-1 & 0 & | & 1-a \end{pmatrix}$$

Estudiamos el rango de A:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5 \neq 0 \rightarrow \text{rg } A \geq 2 \quad |A| = (a-2) \cdot (a-1) = 0 \text{ si } a = 1, a = 2$$

Por tanto, $\text{rg } A = 2$ si $a = 1, a = 2$.

- o Si $a = 1 \rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & | & 1 \\ -1 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rg } A^* = 2 = \text{rg } A \rightarrow$ sistema compatible indeterminado.

Tenemos el sistema: $\left. \begin{array}{l} 2y + z = 1 \\ -x + y + 3z = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y + z = 1 \\ y + 3z = x \end{array} \right\} \rightarrow y = \frac{3-x}{5}; z = \frac{2x-1}{5}$

Solución: $(5\lambda, 3-\lambda, 2\lambda-1) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

- o Si $a = 2 \rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rg } A^* \neq \text{rg } A \rightarrow$ sistema incompatible.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -6 - 6 + 1 = -11 \neq 0 \rightarrow \text{rg } A^* = 3$$

- o Si $a \neq 2, a \neq 1 \rightarrow \text{rg } A^* = \text{rg } A = 3 \rightarrow$ sistema compatible determinado.

2) Dado el número real a , se considera el sistema

$$\left. \begin{aligned} x - ay + z &= a \\ ax - y + z &= 1 \\ -ax - y + z &= a \end{aligned} \right\}$$

a) Discuta el sistema según los valores de a .

b) Resuelva el sistema para el caso $a = 2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ a & -1 & 1 \\ -a & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -a & 1 \\ a & -1 & 1 \\ -a & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3=F_2-F_3} \begin{vmatrix} 1 & -a & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 2a & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2a(a-1) = 0 \rightarrow a = 1, a = 0$

o Si $a = 0 \rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rg } A^* \neq \text{rg } A \rightarrow \text{sistema incompatible.}$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{rg } A^* = 3$$

o Si $a = 1 \rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rg } A^* = \text{rg } A \rightarrow \text{sistema compatible indeterminado.}$

o Si $a = 2 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 4$ (sustituyendo $a = 2$)

Aplicando el método de Gauss para resolver el sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3=F_2-F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2=-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

El sistema triangular equivalente que hemos obtenido es:

$$\left. \begin{aligned} x - 2y + z &= 2 \\ x + y &= -1 \\ 4x &= -1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4} + \frac{6}{4} + z = 2 \rightarrow z = \frac{3}{4} \\ y = -1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Por tanto la solución del sistema es: $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{3}{4} \right)$

7 DISCUSIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES HOMOGÉNEOS

- Definición: Un sistema se llama **homogéneo** cuando todos los términos independientes son nulos.

Características:

- Siempre va a tener la solución $(0,0,0)$, llamada solución trivial.
- Siempre $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) \rightarrow$ El sistema homogéneo nunca va a ser incompatible.
- Si $|A| = 0 \rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado.
- Si $|A| \neq 0 \rightarrow$ El sistema es compatible determinado, siendo la solución la trivial: $x_i = 0$

Ejemplos

Estudiar el sistema para los distintos valores del parámetro "a". Resolver en caso de ser compatible.

$$\left. \begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ x - ay - 3z &= 0 \\ 5x + 2y - z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -a & -3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Al ser un sistema homogéneo el $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*)$, por tanto, admite la solución trivial $(0, 0, 0)$

$$|A| = (2a + 2 + 45) - (-5a + 3 - 12) = 7a + 56$$

$$|A| = 0 \rightarrow 7a + 56 = 0 \rightarrow a = -8$$

Si $a = -8 \rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 2 < n^\circ \text{ incógnitas} \rightarrow \text{S.C.I.}$

Si $a \neq -8 \rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 3 = n^\circ \text{ incógnitas} \rightarrow \text{S.C.D.}$

Resolución para $a = -8$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 8 & -3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F2 \leftrightarrow F1} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F2=F2-2F1 \\ F3=F3-5F1}} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 0 & -19 & 7 \\ 0 & -38 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} x + 8y - 3z &= 0 \\ -19y + 7z &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} x + 8y &= 3z \\ 19y &= 7z \end{aligned} \right\} \xrightarrow{z=\lambda} \begin{cases} x = 3z - 8y = 3\lambda - \frac{56\lambda}{19} = \frac{\lambda}{19} \\ y = \frac{7\lambda}{19} \end{cases}$$

Solución: $x = \lambda, y = 7\lambda, z = 19\lambda$

EJERCICIOS
1. Resolución de sistemas lineales. Método de Gauss
1.1. Resolver los siguientes sistemas, aplicando el método de Gauss:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \begin{cases} x+2y+2z=2 \\ x+2y+z=3 \\ -x+3y=1 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x+2y+5z=-1 \\ 3x+y=-2 \\ -x+3y=4 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} x+y=1 \\ y+z=-2 \\ x+z=3 \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} 3x+4y-z=3 \\ 6x-6y+2z=-16 \\ x-y+2z=-6 \end{cases} \\
 \text{e) } \begin{cases} 2x+5y=16 \\ x+3y-2z=-2 \\ x+z=4 \end{cases} & \text{f) } \begin{cases} 3x+2y+z=1 \\ 5x+3y+3z=3 \\ x+y+z=0 \end{cases} & \text{g) } \begin{cases} x+2y+z=9 \\ x-y-z=-10 \\ 2x-y+z=5 \end{cases} & \text{h) } \begin{cases} -x+y+3z=-2 \\ 4x+2y-z=5 \\ 2x+4y-7z=1 \end{cases}
 \end{array}$$

Soluciones: a) (2,1,-1); b) $(-1, 1, -\frac{2}{5})$; c) (3, -2, 0); d) (-1, 1, -2); e) (-2, 4, 6); f) $(\frac{3}{2}, -2, \frac{1}{2})$; g) (-1, 1, 8); h) $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$

1.2. Discutir los siguientes sistemas y resolver en caso de ser compatible:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \begin{cases} x+y+z=11 \\ 2x-y+z=5 \\ 3x+2y+z=24 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 2x-4y+6z=2 \\ y+2z=-3 \\ x-3y+z=4 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} x-2y+z=1 \\ 3x-y-2z=4 \\ -4x+3y+z=2 \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} x-y+2z=2 \\ -x+3y+z=3 \\ x+y+5z=7 \end{cases} \\
 \text{e) } \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ x-2y=1 \end{cases} & \text{f) } \begin{cases} -x+y+z=3 \\ x-y+z=7 \\ x+y-z=1 \end{cases} & \text{g) } \begin{cases} 2x-y+z=1 \\ x-y-z=2 \\ x+y+5z=3 \end{cases} & \text{h) } \begin{cases} 3x-2y+z=5 \\ x+2y-z=3 \\ -x+6y-3z=1 \end{cases}
 \end{array}$$

Soluciones: a) (4, 5, 2); b) $(-7\lambda-5, -3-2\lambda, \lambda) \forall \lambda \in \mathbb{R}$; c) S.I.; d) $(\frac{9-7\lambda}{2}, \frac{5-3\lambda}{2}, \lambda) \forall \lambda \in \mathbb{R}$; e) $(\frac{3-2\lambda}{3}, -\frac{\lambda}{3}, \lambda) \forall \lambda \in \mathbb{R}$
 f) (4, 2, 5); g) S.I.; h) $(2, \lambda, 2\lambda-1) \forall \lambda \in \mathbb{R}$

1.3. Discutir y resolver, en caso de ser compatible, los siguientes sistemas homogéneos:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ y+z=0 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+3y+2z=0 \\ 2x+4y+3z=0 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ 3x-y=0 \\ 4x+y-z=0 \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} x-y+3z-14t=0 \\ 2x-2y+3z+t=0 \\ 3x-3y+5z+6t=0 \end{cases}
 \end{array}$$

Soluciones: a) (0, 0, 0); b) $(\lambda, \lambda, -2\lambda) \forall \lambda \in \mathbb{R}$; c) $(\lambda, 3\lambda, 7\lambda) \forall \lambda \in \mathbb{R}$; d) $(\lambda, \lambda, 0, 0) \forall \lambda \in \mathbb{R}$

1.4. Resolver los siguientes sistemas:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \begin{cases} 2x-y+w=7 \\ x-2y+z=2 \\ 3x+z=2 \\ 4x=4 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 2x+y+z-3t=4 \\ x+3y-z+2t=2 \\ -3x+y-3z+8t=-7 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} 2x-y+w=0 \\ x-2y+z=0 \\ 5x-y+z+w=0 \\ 5x-2y-z+2w=0 \end{cases} \\
 \text{d) } \begin{cases} x+y-z+t=1 \\ x-y-t=2 \\ z-t=0 \end{cases} & \text{e) } \begin{cases} x+y+z=2 \\ x-2y-7z=0 \\ y+z=-1 \\ 2x+3y=0 \end{cases} & \text{f) } \begin{cases} x-y-z+t=4 \\ x+y+z-t=2 \end{cases}
 \end{array}$$

Soluciones: a) (1, -2, -1, 3); b) S.I; c) (0, 0, 0, 0); d) $(\frac{3+\lambda}{2}, -\frac{1+\lambda}{2}, \lambda, \lambda) \lambda \in \mathbb{R}$; e) (3, -2, 1); f) $(3, -1-\lambda+\mu, \lambda, \mu) \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

2. Resolución de sistemas lineales. Regla de Cramer

2.1. Resolver los siguientes sistemas, aplicando la regla de Cramer:

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } \begin{cases} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{cases} \\
 \text{b) } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases} \\
 \text{c) } \begin{cases} x - 2y - 3z = 1 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \\ -2x + 3y + z = -9 \end{cases} \\
 \text{d) } \begin{cases} x - y = 7 \\ 2x + y - z = 3 \\ y + z = 3 \end{cases}
 \end{array}$$

Soluciones: a) (1, 1, -1) b) (1, -2, 3); c) (1, -3, 2); d) (5, -2, 5)

2.2. Discutir los siguientes sistemas y resolver en caso de ser compatible, aplicando la regla de Cramer:

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 1 \end{cases} \\
 \text{b) } \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - y + z = -1 \\ 3x + y + 2z = 2 \end{cases} \\
 \text{c) } \begin{cases} -x + 2y - z = 1 \\ 2x - 4y + 2z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \\
 \text{d) } \begin{cases} y + z = -1 \\ x - y = 1 \\ x + 2y + 3z = -2 \end{cases}
 \end{array}$$

Soluciones: a) $(-1 - 3\lambda, 4\lambda + 2, \lambda)$; b) $(3\lambda - 4, \lambda, 7 - 5\lambda)$; c) S.I. d) $(1 + \lambda, \lambda, -1 - \lambda)$

2.3. Discutir y resolver, en caso de ser compatible, los siguientes sistemas homogéneos, empleando la regla de Cramer:

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 11x - y - 3z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \\
 \text{b) } \begin{cases} 3x - 5y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \\
 \text{c) } \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ x - 5y - 9z = 0 \end{cases} \\
 \text{d) } \begin{cases} x + y + 5z = 0 \\ 3x - y - 2t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}
 \end{array}$$

Soluciones: a) $(\lambda, 2\lambda, 3\lambda) \forall \lambda \in \mathbb{R}$; b) (0, 0, 0); c) $(-\lambda, -2\lambda, \lambda) \forall \lambda \in \mathbb{R}$; d) $(\lambda, -\lambda, 0, 2\lambda) \forall \lambda \in \mathbb{R}$

3. Discusión y resolución de sistemas con un parámetro

3.1. Discute, en función del parámetro k, estos sistemas de ecuaciones:

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } \begin{cases} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 1 \end{cases} \\
 \text{b) } \begin{cases} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 0 \end{cases} \\
 \text{c) } \begin{cases} x + y + z = k + 2 \\ x - ky + z = 1 \\ kx + y + z = 4 \end{cases}
 \end{array}$$

Solución: a) $k = 3$ S.C.I., $k \neq 3$, S.C.D. b) $k = 3$ S.I., $k \neq 3$, S.C.D.; c) $k = 1$ S.I., $k = -1$ S.C.I., $k \neq 1, k \neq -1$ S.C.D.

3.2. a) Discutir, según los distintos valores del parámetro m, el siguiente sistema.

b) Resolver en el caso de $m = -2$.

$$\begin{cases} (m-6)y + 3z = 0 \\ 2x + y - z = m - 4 \\ (m+1)x + 2y = 3 \end{cases}$$

Solución: $m = 5$ S.C.I.; $m = -3$ S.I., $m \neq 5, m \neq -3$ S.C.D. Para $m = -2$ solución: (-3, 0, 0)

3.3. Discutir, según los distintos valores del parámetro A, el siguiente sistema. Resolver el sistema para $a = 8$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ 7x - y + az = 6 \end{cases}$$

Solución: $a = 10$ S.I.; $a \neq 10$ S.C.D. Para $a = 8$ solución: $\left(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1\right)$

3.4. Dado el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} -ax + y = 1 \\ -x + ay - z = 0 \\ x + y + az = 1 \end{array} \right\}$$

- a) Estudie su compatibilidad según los valores del número real a .
 b) Resuélvalo cuando $a = 0$ si es posible.

Solución: $a = -1$ S.I.; $a \neq -1$ S.C.D. Para $a = 0$ solución: $(0, 1, 0)$

3.5. Dado el sistema

$$\left. \begin{array}{l} ax + y + z = a \\ x + y + z = a \\ y + az = 2 \end{array} \right\}$$

- a) Estudie su compatibilidad según los distintos valores de a .
 b) Resuélvalo cuando sea compatible indeterminado.

Solución: $a = 1$ S.C.I.; $a \neq 1$ S.C.D. b) solución: $(-1, 2 - \lambda, \lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

3.6. Dado el sistema

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 2x + y + mz = 1 \\ 4x + y + m^2z = m \end{array} \right\}$$

- a) Estudie su compatibilidad según los valores de m .
 b) Resuélvalo cuando sea compatible indeterminado.

Solución: $m = 1$ S.C.I.; $m = 2$ S.I. $m \neq 1$; $m \neq 2$ S.C.D. b) solución: $(0, 1 - \lambda, \lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

4. Resolución de problemas empleando la matriz inversa ($AX = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$)

4.1. Calcule los números a , b y c para que la curva de ecuación $y = ax^3 + bx^2 + cx + 4$ pase por los puntos $(1, 10)$, $(-1, 2)$ y $(2, 26)$. Demuestre que la curva es única. Escriba dicha curva.

Solución: $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$

4.2. En un almacén un mayorista compra 5 unidades de un producto A, 4 de B y 3 de C, pagando un total de 8.600 €. Otro cliente compra 2 paquetes de A, 7 de B y 4 de C, gastando 7.300 €. Un tercer cliente compra 8 de A, 13 de B y 5 de C, pagando lo que los otros dos juntos. ¿Cuánto vale cada producto?

Solución: $A=1.000$, $B=300$ y $C=800$ €.

4.3. Una gran multinacional destina 900.000 € para gratificar a sus 51 empleados. Concede 25.000 € a los empleados de nivel A, 20.000 a los de nivel B y 15.000 a los de nivel C. Teniendo en cuenta que para los de nivel C destina en total el doble que para los del B, ¿cuántos empleados hay en cada nivel?

Solución: $A=6$, $B=15$ y $C=30$ empleados

4.4. La suma de las edades de tres personas es, en el momento actual, 73 años. Dentro de 10 años la edad de la mayor de ellas será el doble de la edad de la persona más joven. Hace doce años la persona con edad intermedia tenía el doble de años que la más joven. Hallar las edades de las tres personas.

Solución: 15, 18 y 40 años

4.5. En una mesa de una cafetería tomaron dos cafés, 1 refresco y dos té, costándoles 5,30 €. En otra mesa pagaron 8,40 € por tres cafés, 3 refrescos y 1 té. Por otra parte, dos amigos tomaron un café y un refresco en la barra, donde el precio es un 10% más barato, pagando 2,50 €. ¿Qué cuesta cada bebida?

Solución: $\text{café}=1$ €, $\text{refresco}=1,50$ €, $\text{té}=0,90$ €

4.6. Tres amigos suben a una báscula de dos en dos: Andrés y Benjamín suman 173 kg, Andrés y Carlos 152 kg, mientras que entre Benjamín y Carlos pesan 165 kg. ¿Cuánto pesa cada uno?

Solución: $\text{Andrés}=80$ kg; $\text{Benjamín}=93$ kg; $\text{Carlos}=72$ kg

5. Repasa

5.1. Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Resuelve la ecuación $\det(A - x \cdot I_3) = 0$. (1 punto)
- Discuta el sistema homogéneo de matriz $A - x \cdot I_3$, según los valores del número real x . (0.75 puntos)
- Resuélvalo en aquellos casos en que el sistema sea compatible determinado. (0.75 puntos)

5.2. Dado el sistema:

$$\left. \begin{aligned} (a-1)x + 2y + (a-1)z &= 1+a \\ (a+1)y - (a+1)z &= 2 \\ x + y + az &= a \end{aligned} \right\}$$

- Estudia su compatibilidad según los valores de a . (1.5 puntos)
- Resuélvalo cuando $a = 0$. (1 punto)

5.3. Dado el sistema:

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ ax + y &= 1 \\ x + y + 2z &= 3 \end{aligned} \right\}$$

- Estudia su compatibilidad según los valores de a . (1 punto)
- Resuélvalo en el caso en que sea compatible indeterminado. (1.5 puntos)

5.4. Dado el sistema:

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= a \\ x + ay + z &= a \\ x + y + az &= 1 \end{aligned} \right\}$$

- Estudia su compatibilidad según los valores de a . (1.5 puntos)
- Resuélvalo en el caso en que sea compatible indeterminado. (1 punto)

5.5. Dado el sistema:

$$\left. \begin{aligned} x + ay - z &= 1+a \\ x + y - az &= 2 \\ x - y - z &= a \end{aligned} \right\}$$

- Estudia su compatibilidad según los valores de a . (1.5 puntos)
- Resuélvalo en el caso en que sea compatible indeterminado. (1 punto)

5.6. Dado el número real m , se considera la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- Halle los valores de m para los que la matriz A tiene inversa. (0.75 puntos)
- Para $m = 2$, halle, si existe, la inversa de A . (1 punto)

- Para $m = 2$, calcule el vector X que verifique $A \cdot X = B$ siendo $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ (0,75 puntos)