DISTRIBUCIÓN NORMAL

1. El peso de las 100 vacas de una ganadería se distribuye según una normal de media 600 kg y una desviación típica de 50 kg. Se pide:

a) ¿Cuántas vacas pesan más de 570 kilos?
b) ¿Cuántas pesan menos de 750 kilos?
c) ¿Cuántas pesan entre 500 y 700 kilos?

Solución:

Es una distribución N (600, 50).

a)

$$P\,(X > 570) = P\left(Z > \frac{570-600}{50}\right) = P\,(Z > -0{,}6) = 0{,}7258$$

El 72,58% de las vacas pesa más de 570 kg. Puede esperarse que 73 vacas superen ese peso.

b)

$$P\,(X < 750) = P\left(Z < \frac{750-600}{50}\right) = P\,(Z < 3) = 0{,}9987$$

El 99,87% de las vacas pesa menos de 750 kg. Puede esperarse que las 100 vacas pesen menos de 750 kg.

c)

$$P\,(500 < X < 700) = P\,(-2 < Z < 2) = 0{,}9544$$

El 95,44% de las vacas pesa entre 500 y 700 kg. Puede esperarse que 95 de las 100 vacas estén entre esos dos pesos.

2. Un estudio de un fabricante de televisores indica que la duración media de un televisor es de 10 años, con una desviación típica de 0,7 años. Suponiendo que la duración de los televisores sigue una distribución normal.

a) Calcula la probabilidad de que un televisor dure más de 9 años.
b) Calcula la probabilidad de que dure entre 9 y 11 años.

Solución:

Se trata de una distribución normal N (10; 0,7).

a)

$$P\,(X > 9) = P\left(Z > \frac{9-10}{0{,}7}\right) \approx P\,(Z > -1{,}43) = P\,(Z < 1{,}43) = 0{,}9236$$

b)

$$P\,(9 < X < 11) = P\left(\frac{9-10}{0{,}7} < Z < \frac{11-10}{0{,}7}\right) \approx P\,(-1{,}43 < Z < 1{,}43) =$$

$$= P\,(Z < 1{,}43) - P\,(Z < -1{,}43) = 0{,}9236 - (1 - 0{,}9236) = 0{,}8472$$

3. Cierto tipo de batería dura un promedio de 3 años, con una desviación típica de 0,5 años. Suponiendo que la duración de las baterías es una variable normal.
a) ¿Qué porcentaje de baterías se espera que duren entre 2 y 4 años?
b) Si una batería lleva funcionado 3 años, ¿cuál es la probabilidad de que dure menos de 4,5 años?

Solución:
Es una normal N (3, 0,5).
a)

$$P\,(2 < X < 4) = P\left(\frac{2-3}{0,5} < Z < \frac{4-3}{0,5}\right) = P\,(-2 < Z < 2) = 0{,}9544$$

b)

$$P\,(X < 4{,}5 \,/\, X > 3) = \frac{P(3 < X < 4{,}5)}{P(X < 3)} = \frac{P(0 < Z < 1{,}5)}{P(Z < 0)} = \frac{0{,}4987}{0{,}5} = 0{,}9974$$

4. Los ingresos diarios de una empresa tiene una distribución normal, con media 20000 € y desviación típica 5000 €.
   a) Calcular el porcentaje de días en los que los ingresos son inferiores a 175000 €.
   b) Calcular el porcentaje de días en los que los ingresos superan las 23000 €.
   c) Calcular el porcentaje de días en los que los ingresos son superiores a 22500 e inferiores a 27500 €.

Solución:
Sea X la variable que indica los ingresos de esa empresa. Dicha variable sigue una distribución normal N (20000, 5000). El resultado lo daremos redondeando el número de días.
a)

$$P\,(X < 17500) = P\left(Z < \frac{17500 - 2000}{5000}\right) = P\,(Z < -0{,}5) = 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085$$

El 31% de los días.

b)

$$P\,(X > 23000) = P\left(Z > \frac{23000 - 2000}{5000}\right) = P\,(Z > 0{,}6) = 1 - 0{,}7257 = 0{,}2743$$

El 27% de los días.

c)

$$P\,(22500 < X < 27500) = P\left(\frac{22500 - 20000}{5000} < Z < \frac{27500 - 2000}{5000}\right) = P\,(0{,}5 < Z < 1{,}5) =$$
$$= P\,(Z < 1{,}5) - P\,(Z < 0{,}5) = 0{,}9332 - 0{,}6915 = 0{,}2417$$

El 24% de los días.

5. El nivel de colesterol en los individuos depende de la edad y del sexo. En hombres con menos de 21 años, esta variable normal, tiene una media de 160 mg/dl con una desviación típica de 10 mg/dl.
a) Calcúlese el porcentaje de individuos de menos de 21 años cuyo nivel de colesterol se encuentre entre los 150 y los 180 mg/dl.
b) Calcúlese el nivel de colesterol x0 que tiene la propiedad de que el 25% de los individuos de menos de 21 años tiene un nivel de colesterol por debajo de ese valor.

Solución:

Se trata de la normal: $N(160, 10)$.

a)

$$P(150 < X < 180) = P(-1 < Z < 2) = 0{,}9772 - (1 - 0{,}8413) = 0{,}8185$$

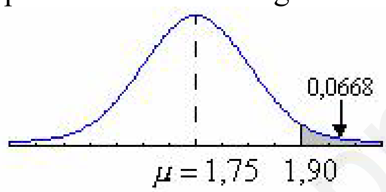
b)

$$P(X < x_0) = 0{,}25 \quad \Rightarrow \quad P\left(\frac{x_0 - 160}{10}\right) = 0{,}25 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_0 - 160}{10} = -0{,}675 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 153{,}25$$

6. En un país en el que la estatura de sus habitantes sigue una distribución normal de media 1,75 m, los individuos que miden más de 1,90 representan el 6,68 % del total. ¿Cuál es la desviación típica? ¿Cuál es la proporción de individuos con estatura superior a 1,60 m?

Solución:

La distribución de la estatura de la población es como sigue:



Se sabe que $P(X > 1{,}90) = 0{,}0668$.

Como la normal de media μ y desviación típica σ, $N(\mu, \sigma)$, se tipifica mediante el cambio $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$, (en nuestro caso, para μ = 1,75 y σ desconocida), se tendrá:

$$P(X > 1{,}90) = P\left(Z > \frac{1{,}90 - 1{,}75}{\sigma}\right) = 0{,}0668 \quad \Leftrightarrow \quad P\left(Z > \frac{0{,}15}{\sigma}\right) = 0{,}0668 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad P\left(Z < \frac{0{,}15}{\sigma}\right) = 1 - 0{,}0668 = 0{,}9332$$

Por la tabla de la distribución normal calculamos que:

$$\frac{0{,}15}{\sigma} = 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad \sigma = 10$$

Esto es, la desviación típica vale 0,10 m. Por tanto:

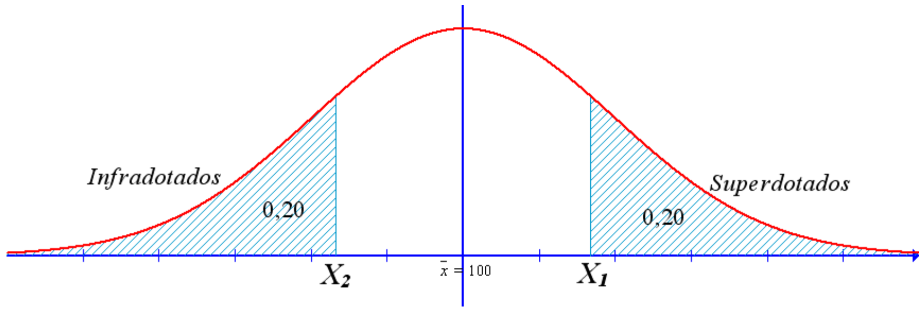
$$P(X > 1{,}60) = P\left(Z > \frac{1{,}60 - 1{,}75}{0{,}10}\right) = P(Z > -1{,}5) = P(Z < 1{,}5) = 0{,}9332$$

Esta probabilidad equivale al 93,32 %.

7. En un test que mide ciertas habilidades específicas, las puntuaciones se distribuyen normalmente, con media 100 y desviación típica 25. El 20 % de las puntuaciones más altas corresponde al grupo de los superdotados, y el 20 % de las puntuaciones más bajas al de los infradotados. Calcular las puntuaciones que delimitan los distintos grupos.

Solución:

La distribución de las puntuaciones es como sigue:



Hay que encontrar los valores X_1 y X_2 tales que:

$$P(X < X_1) = 1 - 0{,}20 = 0{,}80 \qquad \text{y} \qquad P(X < X_2) = 0{,}20$$

Como la distribución normal que tenemos es de media $\mu = 100$ y desviación típica $\sigma = 25$, esto es, $N(100, 25)$, tipificando mediante el cambio $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$, se tendrá:

$$P(X < X_1) = P\left(Z < \frac{X_1 - 100}{25}\right) = 0{,}80 \;\Rightarrow\; \frac{X_1 - 100}{25} = 0{,}84$$

(hemos redondeado, pues realmente: $P(Z < 0{,}84) = 0{,}7996$). Entonces:

$$X_1 = 100 + 25 \cdot 0{,}84 = 100 + 21 = 121$$

Teniendo en cuenta la simetría de la curva, por cumplirse que $P(X < X_2) = P(X > X_1)$, se tendrá:

$$X_2 = 100 - 25 \cdot 0{,}84 = 100 - 21 = 79$$

Por tanto:

- Son infradotados los que obtiene menos de 79 puntos.
- Son normales los que obtiene entre 79 y 121.
- Son superdotados los que obtienen más de 121 puntos.

8. En cierta prueba, el 35 por ciento de la población examinada obtuvo una nota superior a 6, el 25 por ciento, entre 4 y 6, y el 40 por ciento inferior a 4. Suponiendo que las notas siguen una distribución normal, calcula la nota media y la desviación típica. ¿Qué porcentaje de población tiene una nota que se diferencia de la media en menos de 2 unidades.

Solución:
Se tienen la siguientes probabilidades:

$$P(X > 6) = 0{,}35, \qquad P(4 \le X \le 6) = 0{,}25, \qquad P(X < 4) = 0{,}40$$

Sea μ la media y σ la desviación típica. Esto es, la distribución es $N(\mu, \sigma)$. Esta normal se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$, luego:

$$P(X > 6) = P\left(Z > \frac{6-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}35 \;\Rightarrow\; \text{(por la tabla normal)} \; \frac{6-\mu}{\sigma} = 0{,}358$$

$$P(X < 4) = P\left(Z < \frac{4-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}40 \;\Rightarrow\; \text{(por la tabla normal)} \; \frac{4-\mu}{\sigma} = -0{,}255$$

Se tiene el sistema:

$$6 - \mu = 0{,}385\sigma$$
$$4 - \mu = -0{,}255\sigma$$

Su solución es: $\mu = 4{,}797$ y $\sigma = 3{,}125$
Con esto:

$$P(2{,}797 < X < 6{,}797) = P\left(\frac{2{,}797 - 4{,}797}{3{,}125} < Z < \frac{6{,}797 - 4{,}797}{3{,}125}\right) =$$

$$= P(-0{,}64 < Z < 0{,}64) = P(Z < 0{,}64) - P(Z < -0{,}64) = 0{,}7389 - (1 - 0{,}7389) = 0{,}4778$$

9. En las empresas multinacionales A y B, que tiene 50000 y 60000 empleados, respectivamente, el sueldo mensual de dichos empleados se ajusta a una distribución normal, con media de 1800 euros y desviación típica de 650 euros, en el caso de A; y con una media de 2000 euros y desviación típica de 500 euros, en el caso B. ¿Cuál de las dos empresas tiene más empleados con sueldo superior a 3000 euros?

Solución:
Las distribuciones son:

Empresa A: N (1800, 650) $\Rightarrow$ Se tipifica haciendo $Z = \dfrac{X - 1800}{650}$

Empresa B: N (2000, 500) $\Rightarrow$ Se tipifica haciendo $Z = \dfrac{X - 2000}{500}$

Con esto:

- Para la empresa A:

$$P(X > 3000) = P\left(Z > \frac{3000 - 1800}{650}\right) = P(Z > 1{,}85) = 1 - P(Z < 1{,}85) = 1 - 0{,}9678 = 0{,}0322$$

Entonces, para 50000 empleados, puede esperarse que $50000 \cdot 0{,}0322 = 1610$ ganen más de 3000 euros.

- Para la empresa B:

$$P(X > 3000) = P\left(Z > \frac{3000 - 2000}{500}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

Entonces, para 60000 empleados, puede esperarse que $60000 \cdot 0{,}0228 = 1368$ ganen más de 3000 euros.
Por tanto, la empresa A tiene más empleados que ganen más de 3000 €.

10. Se sabe que el 20 % de las personas de una ciudad ve un determinado programa de televisión. Si se elige una muestra al azar de 100 personas de esa ciudad, ¿cuál es la probabilidad aproximada de que al menos 25 de ellas vean el citado programa de televisión?

Solución:
Es un experimento binomial: B (100, 0,2).
Si tenemos en cuenta que $n = 100 \geq 30$, y que $np = 100 \cdot 0{,}2 = 20 > 5$ y $nq = 100 \cdot 0{,}8 = 80 > 5$, se puede aproximar mediante la normal N (20, 4) [$N\left(np, \sqrt{npq}\right)$]. Por tanto:

$$P(X \geq 25) = P(Y \geq 24{,}5) = P\left(Z \geq \frac{24{,}5 - 20}{4}\right) = P(Z \geq 1{,}125) =$$
$$= 1 - P(Z < 1{,}125) = 1 - 0{,}8697 = 0{,}1303$$