# 13 Integral indefinida

## 1. Reglas de integración

### Piensa y calcula

Calcula: a) $y = x^5,\ y' =$ b) $y' = 3x^2,\ y =$ c) $y = \cos x,\ y' =$ d) $y' = \cos x,\ y =$

**Solución:**
a) $y' = 5x^4$ b) $y = x^3$ c) $y' = -\text{sen } x$ d) $y = \text{sen } x$

### Aplica la teoría

**1.** $\int 3(3x - 5)^7\, dx$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función polinómica.
$\dfrac{(3x-5)^8}{8} + k$

**2.** $\int \dfrac{dx}{(3x+5)^3}$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función racional.
$-\dfrac{1}{6(3x+5)^2} + k$

**3.** $\int \cos \dfrac{x}{6}\, dx$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$6 \text{ sen } \dfrac{x}{6} + k$

**4.** $\int e^x\, dx$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función exponencial.
$e^x + k$

**5.** $\int \dfrac{dx}{x+3}$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función logarítmica.
$L\,|x + 3| + k$

**6.** $\int (e^x - \text{sen } x)\, dx$

**Solución:**
Se aplica la integral de las operaciones.
$e^x + \cos x + k$

**7.** $\int 2^{6x}\, dx$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función exponencial.
$\dfrac{2^{6x-1}}{3\,L\,2} + k$

**8.** $\int \dfrac{x\, dx}{x^2 - 1}$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función logarítmica.
$\dfrac{1}{2}\, L\,|x^2 - 1| + k$

**9.** $\int 2x \text{ sen } x^2\, dx$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$-\cos x^2 + k$

**10.** $\int \frac{7\,dx}{2\sqrt{7x+5}}$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función irracional.
$\sqrt{7x+5} + k$

**11.** $\int 3\cos 3x\,dx$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$\text{sen}\,3x + k$

**12.** $\int \frac{dx}{9+x^2}$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$\frac{1}{3}\,\text{arc tg}\,\frac{x}{3} + k$

**13.** $\int \sec^2(3x+1)\,dx$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$\frac{1}{3}\,\text{tg}\,(3x+1) + k$

**14.** $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$\text{arc sen}\,\frac{x}{3} + k$

**15.** $\int 5\,\text{sen}\,x\,dx$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$-5\cos x + k$

**16.** $\int (x^3 - 6x^2 + 1)\,dx$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función polinómica.
$\frac{x^4}{4} - 2x^3 + x + k$

**17.** $\int \text{cosec}^2(5x-1)\,dx$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$-\frac{1}{5}\,\text{cotg}\,(5x-1) + k$

**18.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función irracional.
$2\sqrt{x-1} + k$

**19.** $\int e^{x/2}\,dx$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función exponencial.
$2\,e^{x/2} + k$

**20.** $\int (\text{sen}\,x + \cos x)\,dx$

**Solución:**
Se aplica la integral de las operaciones.
$-\cos x + \text{sen}\,x + k$

**21.** $\int \frac{3}{(x-3)^4}\,dx$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función racional.
$-\frac{1}{(x-3)^3} + k$

**22.** $\int (4x+1)^5\,dx$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función polinómica.
$\frac{(4x+1)^6}{24} + k$

**23.** $\int \text{cotg}\,(-2x+1)\,dx$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$-\frac{1}{2}\,L\,|\text{sen}\,(2x-1)| + k$

**24.** $\int 3 \cdot 2^{3x}\,dx$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función exponencial.
$\frac{2^{3x}}{L\,2} + k$

**25.** $\int \frac{dx}{(2x-1)^4}$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función racional.
$-\frac{1}{6(2x-1)^3} + k$

**26.** $\int 3 \operatorname{cotg} 3x\, dx$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$L\,|\operatorname{sen} 3x| + k$

**27.** $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+5}\, dx$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función logarítmica.
$L\,|x^2 - 3x + 5| + k$

**28.** $\int 5 \operatorname{sen} 5x\, dx$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$-\cos 5x + k$

**29.** $\int 2 \operatorname{tg} 2x\, dx$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$-L\,|\cos 2x| + k$

**30.** $\int 2\sqrt[5]{2x}\, dx$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función irracional.
$\frac{5x\sqrt[5]{2x}}{3} + k$

**31.** $\int \frac{2\, dx}{\sqrt{1-(2x)^2}}$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$\operatorname{arc\,sen} 2x + k$

**32.** $\int e^x \operatorname{sen} e^x\, dx$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$-\cos e^x + k$

**33.** $\int e^{-7x}\, dx$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función exponencial.
$-\frac{e^{-7x}}{7} + k$

**34.** $\int \frac{dx}{1-x}$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función logarítmica.
$-L\,|1-x| + k$

**35.** $\int 2x \operatorname{tg} x^2\, dx$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$-L\,|\cos x^2| + k$

**36.** $\int \cos (5x-1)\, dx$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$\frac{1}{5} \operatorname{sen} (5x-1) + k$

**37.** $\int \frac{3\, dx}{1+(3x)^2}$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$\operatorname{arc\,tg} 3x + k$

**38.** $\int \operatorname{sen} \frac{x}{2}\, dx$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$-2 \cos \frac{x}{2} + k$

**39.** $\int (x^4 - 2x - 5)\, dx$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función polinómica.
$\frac{x^5}{5} - x^2 - 5x + k$

**40.** $\int e^x \cos e^x\, dx$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
$\operatorname{sen} e^x + k$

## 2. Integración por partes

### Piensa y calcula

Calcula la derivada de: $y = e^x(x^2 - 2x + 2)$

**Solución:**
$y' = e^x(x^2 - 2x + 2) + e^x(2x - 2) = x^2e^x$

### Aplica la teoría

**41.** $\int xe^x\,dx$

**Solución:**
Se resuelve aplicando el método de integración por partes.
Se hacen los cambios:

$$u = x$$
$$dv = e^x dx$$

El resultado es:

$$e^x(x - 1) + k$$

**42.** $\int x \text{ sen } x\,dx$

**Solución:**
Se resuelve aplicando el método de integración por partes.
Se hacen los cambios:

$$u = x$$
$$dv = \text{sen } x dx$$

El resultado es:

$$-x \cos x + \text{sen } x + k$$

**43.** $\int (x + 5) \cos x\,dx$

**Solución:**
Se resuelve aplicando el método de integración por partes.
Se hacen los cambios:

$$u = x + 5$$
$$dv = \cos x\,dx$$

El resultado es:

$$(x + 5) \text{ sen } x + \cos x + k$$

**44.** $\int \text{sen } (Lx)\,dx$

**Solución:**
Se resuelve aplicando el método de integración por partes.
Se hacen los cambios:

$$u = \text{sen } (Lx)$$
$$dv = dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes, y plantear una ecuación.
El resultado es: $\frac{x}{2}(\text{sen } (Lx) - \cos (Lx)) + k$

**45.** $\int \text{arc sen } x\,dx$

**Solución:**
Se resuelve aplicando el método de integración por partes.
Se hacen los cambios:

$$u = \text{arc sen } x$$
$$dv = dx$$

El resultado es:

$$x \text{ arc sen } x + \sqrt{1 - x^2} + k$$

**46.** $\int x^2 e^{-x}\,dx$

**Solución:**
Se resuelve aplicando el método de integración por partes.
Se hacen los cambios:

$$u = x^2$$
$$dv = e^{-x}dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes.
El resultado es:

$$-e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + k$$

**47.** $\int x^3 L\,x\,dx$

**Solución:**
Se resuelve aplicando el método de integración por partes.
Se hacen los cambios:

$$u = L\,x$$
$$dv = x^3\,dx$$

El resultado es:

$$\frac{x^4}{4} L|x| - \frac{x^4}{16} + k$$

**48.** $\int (x^2 - 1) \text{ sen } x\,dx$

**Solución:**
Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x^2 - 1$$

$$dv = \text{sen } x\, dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes. El resultado es:

$$(-x^2 + 3) \cos x + 2x \text{ sen } x + k$$

**49.** $\int (x^2 + 1)\, L\, x\, dx$

**Solución:**

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = L\, x$$

$$dv = (x^2 + 1)dx$$

El resultado es:

$$\left(\frac{x^3}{3} + x\right) L\,|x| - \frac{x^3}{9} - x + k$$

**50.** $\int x^2 \cos x\, dx$

**Solución:**

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x^2$$

$$dv = \cos x\, dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes. El resultado es:

$$(x^2 - 2) \text{ sen } x + 2x \cos x + k$$

**51.** $\int (x + 2)\, e^x\, dx$

**Solución:**

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x + 2$$

$$dv = e^x dx$$

El resultado es:

$$e^x(x + 1) + k$$

**52.** $\int e^{-x} \text{ sen } x\, dx$

**Solución:**

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \text{sen } x$$

$$dv = e^{-x}\, dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes, y plantear una ecuación. El resultado es:

$$-\frac{1}{2}\, e^{-x}(\text{sen } x + \cos x) + k$$

**53.** $\int L\, (x + 1)\, dx$

**Solución:**

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = L\,(x + 1)$$

$$dv = dx$$

El resultado es:

$$(x + 1)\, L\,|x + 1| - x + k$$

**54.** $\int (x^2 + 4)\, e^x\, dx$

**Solución:**

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x^2 + 4$$

$$dv = e^x dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes.

El resultado es:

$$e^x(x^2 - 2x + 6) + k$$

**55.** $\int e^x \cos x\, dx$

**Solución:**

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \cos x$$

$$dv = e^x\, dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes, y plantear una ecuación.

El resultado es:

$$\frac{1}{2}\, e^x(\text{sen } x + \cos x) + k$$

**56.** $\int \text{arc tg } x\, dx$

**Solución:**

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \text{arc tg } x$$

$$dv = dx$$

El resultado es:

$$x \text{ arc tg } x - \frac{1}{2}\, L\,|x^2 + 1| + k$$

# 3. Integración de funciones racionales con raíces reales en el denominador

## ■ Piensa y calcula

Realiza la siguiente división entera y haz la prueba: $39 \;\lfloor\underline{\,5\quad}$

**Solución:**

$$\begin{array}{l|l} 39 & 5 \\ \hline 4 & 7 \end{array}$$

Prueba: $39 = 5 \cdot 7 + 4$

## ● Aplica la teoría

**57.** $\displaystyle\int \frac{x^2 - x + 3}{x}\,dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$x - 1 + \frac{3}{x}$$

La integral es:

$$\frac{x^2}{2} - x + 3\,L\,|x| + k$$

**58.** $\displaystyle\int \frac{3x^2 - 5x - 3}{x - 1}\,dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$3x - 2 + \frac{5}{1 - x}$$

La integral es:

$$\frac{3x^2}{2} - 2x - 5\,L\,|x - 1| + k$$

**59.** $\displaystyle\int \frac{5x + 2}{x^2 + x}\,dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{x + 1}$$

La integral es:

$$2\,L\,|x| + 3\,L\,|x + 1| + k$$

**60.** $\displaystyle\int \frac{x^2 - 3x + 5}{x^3}\,dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3}$$

La integral es:

$$L\,|x| + \frac{3}{x} - \frac{5}{2x^2} + k$$

**61.** $\displaystyle\int \frac{5x + 13}{x^2 + 6x + 9}\,dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{5}{x + 3} - \frac{2}{(x + 3)^2}$$

La integral es:

$$5\,L\,|x + 3| + \frac{2}{x + 3} + k$$

**62.** $\displaystyle\int \frac{x^2 + 8x + 10}{x^3 + 9x^2 + 27x + 27}\,dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{1}{x + 3} + \frac{2}{(x + 3)^2} - \frac{5}{(x + 3)^3}$$

La integral es:

$$L\,|x + 3| - \frac{2}{x + 3} + \frac{5}{2(x + 3)^2} + k$$

**63.** $\int \frac{3x^2 + x - 9}{x + 2}\, dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$3x - 5 + \frac{1}{x + 2}$$

La integral es:

$$\frac{3x^2}{2} - 5x + L\,|x + 2| + k$$

**64.** $\int \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 10}{x^2 - 1}\, dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$x - 2 + \frac{3}{x - 1} - \frac{5}{x + 1}$$

La integral es:

$$\frac{x^2}{2} - 2x + 3\,L\,|x - 1| - 5\,L\,|x + 1| + k$$

**65.** $\int \frac{8x + 7}{x^2 + x - 2}\, dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$\frac{3}{x + 2} + \frac{5}{x - 1}$$

La integral es:

$$3\,L\,|x + 2| + 5\,L\,|x - 1| + k$$

**66.** $\int \frac{2x + 3}{x^2 - 2x + 1}\, dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{2}{x - 1} + \frac{5}{(x - 1)^2}$$

La integral es:

$$2\,L\,|x - 1| - \frac{5}{x - 1} + k$$

**67.** $\int \frac{x^2 - 7x + 15}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}\, dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{1}{x - 2} - \frac{3}{(x - 2)^2} + \frac{5}{(x - 2)^3}$$

La integral es:

$$L\,|x - 2| + \frac{3}{x - 2} - \frac{5}{2\,(x - 2)^2} + k$$

# 4. Integración de funciones racionales con raíces complejas o de varios tipos

## ■ Piensa y calcula

Halla mentalmente las raíces imaginarias de la siguiente ecuación: $x^2 + 9 = 0$

**Solución:**

$x = \pm 3i$

## ● Aplica la teoría

**68.** $\int \frac{2x + 1}{x^2 - 2x + 5}\, dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

Raíces del denominador:

$$x = 1 \pm 2i$$

Son imaginarias simples.

La integral es:

$$L\,|x^2 - 2x + 5| + \frac{3}{2}\,\text{arc tg}\,\frac{x - 1}{2} + k$$

**69.** $\int \frac{8x^2 - 18x + 1}{x^3 - 3x^2 + 4}\,dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

Raíces del denominador:

$$x = -1 \text{ real simple, } x = 2 \text{ real doble.}$$

La descomposición es:

$$\frac{3}{x+1} + \frac{5}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2}$$

La integral es:

$$3\,L\,|x+1| + 5\,L\,|x-2| + \frac{1}{x-2} + k$$

**70.** $\int \frac{3x^2 - 5x + 1}{x^3 - 3x^2 + 4x - 12}\,dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

Raíces del denominador:

$$x = 3 \text{ real simple.}$$

$$x = \pm 2i \text{ imaginarias simples.}$$

La descomposición es:

$$\frac{1}{x-3} + \frac{2x+1}{x^2+4}$$

La integral es:

$$L\,|x-3| + L\,|x^2+4| + \frac{1}{2}\,\text{arc tg}\,\frac{x}{2} + k$$

**71.** $\int \frac{2x + 5}{x^2 + 4x + 5}\,dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

Raíces del denominador:

$$x = -2 \pm i \text{ imaginarias simples.}$$

La integral es:

$$L\,|x^2 + 4x + 5| + \text{arc tg}\,(x+2) + k$$

# 5. Integración por cambio de variable o sustitución y de funciones definidas a trozos

## Piensa y calcula

Resuelve mentalmente las siguientes integrales inmediatas.

a) $\int \frac{dx}{x}$ b) $\int \frac{e^x}{e^x + 3}\,dx$

**Solución:**

a) $L\,|x| + k$ b) $L\,|e^x + 3| + k$

## Aplica la teoría

**72.** $\int \frac{dx}{x\,(L\,x)^2}$

**Solución:**

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$L\,x = t$$

$$x = e^t$$

$$dx = e^t\,dt$$

Se obtiene:

$$-\frac{1}{L\,x} + k$$

**73.** $\int \frac{L\,x}{x[(L\,x)^2 - 1]}\,dx$

**Solución:**

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$L\,x = t$$

$$x = e^t$$

$$dx = e^t\,dt$$

Se obtiene:

$$\frac{1}{2}\,L\,[(L\,x)^2 - 1] + k$$

**74.** $\int \frac{1}{e^x + 2}\,dx$

**Solución:**

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$e^x = t$$
$$x = L\,t$$
$$dx = \frac{dt}{t}$$

Se obtiene:

$$\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ L\,(e^x + 2) + k$$

**75.** $\int \frac{e^{2x}}{e^x - 4}\,dx$

**Solución:**

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$e^x = t$$
$$x = L\,t$$
$$dx = \frac{dt}{t}$$

Se obtiene:

$$e^x + 4\,L\,|e^x - 4| + k$$

**76.** $\int \frac{x}{\sqrt{x + 1}}\,dx$

**Solución:**

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x + 1} = t$$
$$x + 1 = t^2$$
$$x = t^2 - 1$$
$$dx = 2t\,dt$$

Se obtiene:

$$\frac{2}{3}\,(x + 2)\sqrt{x + 1} + k$$

**77.** $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x + 3}}$

**Solución:**

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x + 3} = t$$
$$x + 3 = t^2$$
$$x = t^2 - 3$$
$$dx = 2t\,dt$$

Se obtiene:

$$2\sqrt{x + 3} - 2\,L\,|\sqrt{x + 3} + 1| + k$$

**78.** $\int \frac{dx}{1 - \sqrt{x}}$

**Solución:**

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x} = t$$
$$x = t^2$$
$$dx = 2t\,dt$$

Se obtiene:

$$-2\sqrt{x} - 2\,L\,|\sqrt{x} - 1| + k$$

**79.** $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$

**Solución:**

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x} = t$$
$$x = t^2$$
$$dx = 2t\,dt$$

Se obtiene:

$$2\,L\,|\sqrt{x} + 1| + k$$

**80.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

**Solución:**

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt[6]{x} = t$$
$$x = t^6$$
$$dx = 6t^5\,dt$$

Se obtiene:

$$2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\,L\,|\sqrt[6]{x} + 1| + k$$

**81.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}}$

**Solución:**

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt[4]{x} = t$$
$$x = t^4$$
$$dx = 4t^3\,dt$$

Se obtiene:

$$2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} + 4\,L\,|\sqrt[4]{x} - 1| + k$$

**82.** Sea $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \le 1 \\ -3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Calcula $\int f(x)\,dx$

**Solución:**

$$\begin{cases} x^2/2 & \text{si } x \le 1 \\ -3x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

**83.** Sea $f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & \text{si } x \le 0 \\ 1/x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Calcula $\int f(x)\,dx$

**Solución:**

$\begin{cases} -\cos x & \text{si } x \le 0 \\ L\,|x| & \text{si } x > 0 \end{cases}$

**84.** Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 1 \\ e^x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Calcula $\int f(x)\,dx$

**Solución:**

$\begin{cases} x^3/3 & \text{si } x \le 1 \\ e^x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

# 6. Integración de funciones trigonométricas

## Piensa y calcula

Escribe la fórmula fundamental de la trigonometría.

**Solución:**

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

## Aplica la teoría

**85.** $\int \text{sen } x \cos x\,dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el sen x y en el cos x

La integral es: $\frac{1}{2}\text{sen}^2 x + k$

**86.** $\int \text{sen}^3 x \cos x\,dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el sen x y en el cos x

La integral es: $\frac{1}{4}\text{sen}^4 x + k$

**87.** $\int \text{sen}^4 x \cos x\,dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el cos x

La integral es: $\frac{1}{5}\text{sen}^5 x + k$

**88.** $\int \text{sen}^3 x \cos^2 x\,dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el sen x

La integral es: $-\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + k$

**89.** $\int \text{sen}^2 x\,dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es par en el sen x

La integral es: $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\text{sen } 2x\right) + k$

**90.** $\int \text{sen}^4 x\,dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es par en el sen x

La integral es: $\frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2} - \cos x\left(\text{sen}^3 x + \frac{3\,\text{sen } x}{2}\right)\right] + k$

**91.** $\int \text{sen } 3x \text{ sen } x \, dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se transforma el producto en suma o resta.

La integral es:

$$\frac{1}{4}\left(-\frac{\text{sen } 4x}{2} + \text{sen } 2x\right) + k$$

**92.** $\int \cos 5x \cos x \, dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se transforma el producto en suma o resta.

La integral es:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\text{sen } 6x}{3} + \frac{\text{sen } 4x}{2}\right) + k$$

**93.** $\int \text{sen } 5x \cos 3x \, dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se transforma el producto en suma o resta.

La integral es:

$$\frac{1}{4}\left(-\frac{\cos 8x}{4} - \cos 2x\right) + k$$

**94.** $\int \sqrt{1 - x^2} \, dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = \text{sen } t$$

$$dx = \cos t \, dt$$

La integral es:

$$\frac{1}{2}\left(\text{arc sen } x + x\sqrt{1 - x^2}\right) + k$$

**95.** $\int \sqrt{16 - x^2} \, dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = 4 \text{ sen } t$$

$$dx = 4 \cos t \, dt$$

La integral es:

$$8 \text{ arc sen } \frac{x}{4} + \frac{1}{2}x\sqrt{16 - x^2} + k$$

**96.** $\int \sqrt{2 - x^2} \, dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = \sqrt{2} \text{ sen } t$$

$$dx = \sqrt{2} \cos t \, dt$$

La integral es:

$$\text{arc sen } \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{1}{2}x\sqrt{2 - x^2} + k$$

**97.** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1 + x^2}}$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = \text{tg } t$$

$$dx = \sec^2 t \, dt$$

La integral es:

$$-\frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} + k$$

**98.** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16 + x^2}}$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = 4 \text{ tg } t$$

$$dx = 4 \sec^2 t \, dt$$

La integral es:

$$-\frac{\sqrt{16 + x^2}}{16x} + k$$

## Preguntas tipo test

Contesta en tu cuaderno:

Señala la solución correcta:

**1** $\int \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}\,dx$

- ❑ $\text{arc tg } 2x + k$
- ❑ $\frac{1}{2} L|4x^2+1| + k$
- ❑ $x + k$
- ☒ $x - \frac{1}{2} L|4x^2+1| + k$

**2** $\int \frac{2x^3-9x^2+7x}{x^2-x}\,dx$

- ❑ $2x^2 - x + k$
- ☒ $x^2 - 7x + k$
- ❑ $2x^2 - 7x + L|x| + L|x-1| + k$
- ❑ $x^2 + L|x| + L|x-1| + k$

**3** $\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx$

- ❑ $L|x| + L|x+1| + k$
- ❑ $L|x| + L|x-1| + k$
- ☒ $L|x| - L|x+1| + k$
- ❑ $L|x| \cdot L|x-1| + k$

**4** $\int \frac{x}{(x+1)^3}\,dx$

- ❑ $L|x+1| - \frac{2x+1}{2x^2+4x+2} + k$
- ☒ $-\frac{2x+1}{2x^2+4x+2} + k$
- ❑ $L|x+1| - \frac{1}{2x^2+4x+2} + k$
- ❑ $-\frac{1}{2x^2+4x+2} + k$

**5** $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$

- ☒ $\frac{2}{3}x\sqrt{x} - x + 4\sqrt{x} - 4L|\sqrt{x}+1| + k$
- ❑ $\frac{x}{2} - \sqrt{x} + 2L|\sqrt{x}-1| + k$
- ❑ $\frac{2}{3}\sqrt{x} - x - 4L|\sqrt{x}+1| + k$
- ❑ $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 4\sqrt{x} - L|\sqrt{x}+1| + k$

**6** $\int \frac{x^3+2}{x^2+3x+2}\,dx$

- ❑ $\frac{x^2}{2} - 3x + L|x-1| + 6L|x-2| + k$
- ❑ $\frac{x^2-3}{2} + L|x-1| + 6L|x-2| + k$
- ☒ $\frac{x^2}{2} - 3x + L|x+1| + 6L|x+2| + k$
- ❑ $\frac{x^2}{2} - 3x + L|x^2+3x+2| + k$

**7** $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

- ❑ $\frac{x^2}{3}\sqrt{x^2+1} + k$
- ☒ $\frac{x^2-2}{3}\sqrt{x^2+1} + k$
- ❑ $(x^2-2)\sqrt{x^2+1} + k$
- ❑ $\frac{x^2-2}{3} + \sqrt{x^2+1} + k$

**8** $\int e^{x+e^x}\,dx$

- ☒ $e^{e^x} + k$
- ❑ $x\,e^x + k$
- ❑ $x\,e^{e^x} + k$
- ❑ $\frac{e^{e^x}}{x} + k$

**9** $\int \frac{x^3+1}{x^2+4}\,dx$

- ❑ $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\text{arc tg}\frac{x}{2} + k$
- ❑ $\frac{x^2}{2} + 2L|x^2+4| + k$
- ❑ $\frac{x^2}{2} + 2L|x^2+4| + \frac{1}{2}\text{arc tg}\frac{x}{2} + k$
- ☒ $\frac{x^2}{2} - 2L|x^2+4| + \frac{1}{2}\text{arc tg}\frac{x}{2} + k$

**10** $\int \frac{4-2x^2}{x} L\,x\,dx$

- ❑ $4(L\,x)^2 - x^2 L\,x - \frac{x^2}{2} + k$
- ☒ $2(L\,x)^2 - x^2 L\,x + \frac{x^2}{2} + k$
- ❑ $4(L\,x)^2 - x^2 - \frac{x^2}{2} + k$
- ❑ $2(L\,x)^2 - L\,x + \frac{x^2}{2} + k$

## 1. Reglas de integración

**99.** $\int 4(4x - 1)^5 \, dx$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función polinómica.

$$\frac{(4x-1)^6}{6} + k$$

**100.** $\int \frac{dx}{(x-1)^5}$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función racional.

$$-\frac{1}{4(x-1)^4} + k$$

**101.** $\int \cos \frac{3x}{2} \, dx$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{2}{3} \operatorname{sen} \frac{3x}{2} + k$$

**102.** $\int e^{-x} \, dx$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función exponencial.

$$-e^{-x} + k$$

**103.** $\int \frac{dx}{x-1}$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función logarítmica.

$$L\,|x-1| + k$$

**104.** $\int (\cos x - e^{-x}) \, dx$

**Solución:**
Se aplica la integral de las operaciones.

$$e^{-x} + \operatorname{sen} x + k$$

**105.** $\int 2^{-4x} \, dx$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función exponencial.

$$-\frac{2^{-4x}}{4\,L\,2} + k$$

**106.** $\int \frac{x\,dx}{x^2 + 9}$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función logarítmica.

$$\frac{1}{2}\,L\,|x^2 + 9| + k$$

**107.** $\int \operatorname{sen}(5 - 2x) \, dx$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{1}{2}\cos(2x - 5) + k$$

**108.** $\int \frac{3\,dx}{\sqrt{3x}}$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función irracional.

$$2\sqrt{3x} + k$$

**109.** $\int x \cos(x^2 + 1) \, dx$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen}(x^2 + 1) + k$$

**110.** $\int \frac{dx}{3 + x^2}$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}}{3}x + k$$

**111.** $\int x \sec^2 x^2 \, dx$

**Solución:**
Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg} x^2 + k$$

**112.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2}}$

**Solución:**

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\text{arc sen } \frac{\sqrt{2}}{2} x + k$$

**113.** $\displaystyle\int 5 \text{ sen } 7x \, dx$

**Solución:**

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-\frac{5}{7} \cos 7x + k$$

**114.** $\displaystyle\int (10x^4 + 2x^3 - x - 1) \, dx$

**Solución:**

Se aplica la integral de una función polinómica.

$$2x^5 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} - x + k$$

**115.** $\displaystyle\int \text{cosec}^2 (3 - 4x) \, dx$

**Solución:**

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{1}{4} \text{cotg } (3 - 4x) + k$$

**116.** $\displaystyle\int \sqrt[5]{x^3} \, dx$

**Solución:**

Se aplica la integral de una función irracional.

$$\frac{5x \sqrt[5]{x^3}}{8} + k$$

**117.** $\displaystyle\int e^{x/3} \, dx$

**Solución:**

Se aplica la integral de una función exponencial.

$$3e^{x/3} + k$$

**118.** $\displaystyle\int (\text{sen } x - \cos x) \, dx$

**Solución:**

Se aplica la integral de las operaciones.

$$-\cos x - \text{sen } x + k$$

**119.** $\displaystyle\int \left(3x^2 + 1 - \frac{1}{x + 2} + \frac{8}{x^5}\right) dx$

**Solución:**

Se aplica la integral de las operaciones.

$$x^3 + x - L\,|x + 2| - \frac{2}{x^4} + k$$

**120.** $\displaystyle\int (2x - 1)^3 \, dx$

**Solución:**

Se aplica la integral de una función polinómica.

$$\frac{(2x - 1)^4}{8} + k$$

**121.** $\displaystyle\int (-x \text{ cotg } x^2) \, dx$

**Solución:**

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-\frac{1}{2} L\,|\text{sen } x^2| + k$$

**122.** $\displaystyle\int 5 \cdot 7^{-5x} \, dx$

**Solución:**

Se aplica la integral de una función exponencial.

$$-\frac{7^{-5x}}{L\,7} + k$$

**123.** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x + 7)^2}$

**Solución:**

Se aplica la integral de una función racional.

$$-\frac{1}{x + 7} + k$$

**124.** $\displaystyle\int 2x \text{ cotg } x^2 \, dx$

**Solución:**

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$L\,|\text{sen } x^2| + k$$

**125.** $\int \frac{3x^2 + 5}{x^3 + 5x - 1}\,dx$

**Solución:**

Se aplica la integral de una función logarítmica.

$$L\,|x^3 + 5x - 1| + k$$

**126.** $\int \operatorname{sen}(3x + 2)\,dx$

**Solución:**

Se aplica la integral de una función trigonométrica

$$-\frac{1}{3}\cos(3x + 2) + k$$

**127.** $\int \operatorname{tg}\frac{x}{4}\,dx$

**Solución:**

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-2\,L\left|\cos\frac{x}{2} + 1\right| + k$$

**128.** $\int \sqrt[3]{5x + 1}\,dx$

**Solución:**

Se aplica la integral de una función irracional.

$$\frac{3(5x + 1)\sqrt[3]{5x + 1}}{20} + k$$

**129.** $\int \frac{7\,dx}{\sqrt{4 - x^2}}$

**Solución:**

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$7 \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{2} + k$$

**130.** $\int e^{-x} \operatorname{sen} e^{-x}\,dx$

**Solución:**

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\cos e^{-x} + k$$

**131.** $\int e^{5x}\,dx$

**Solución:**

Se aplica la integral de una función exponencial.

$$\frac{e^{5x}}{5} + k$$

**132.** $\int \frac{5\,dx}{5x + 4}$

**Solución:**

Se aplica la integral de una función logarítmica.

$$L\,|5x + 4| + k$$

**133.** $\int \operatorname{tg}(4x + 5)\,dx$

**Solución:**

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-\frac{1}{4}\,L\,|\cos(4x + 5)| + k$$

**134.** $\int \cos(4 - x)\,dx$

**Solución:**

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-\operatorname{sen}(4 - x) + k$$

**135.** $\int \frac{6\,dx}{1 + (2x)^2}$

**Solución:**

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$3 \operatorname{arc\,tg} 2x + k$$

**136.** $\int \operatorname{sen}\frac{4x}{5}\,dx$

**Solución:**

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-\frac{5}{4}\cos\frac{4x}{5} + k$$

**137.** $\int \left(x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 8x + 1\right) dx$

**Solución:**

Se aplica la integral de una función polinómica.

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{4} - 4x^2 + x + k$$

**138.** $\int e^{-x} \cos e^{-x}\, dx$

**Solución:**

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-\text{sen } e^{-x} + k$$

**139.** Calcula tres primitivas de la función:

$$y = \text{sen } x$$

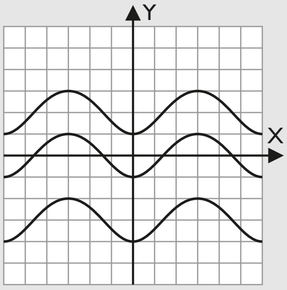
Represéntalas. ¿En qué se parecen?

**Solución:**

$y = -\cos x$

$y = 2 - \cos x$

$y = -3 - \cos x$




Todas las curvas tienen en común que son traslaciones verticales de la integral sin constante.

**140.** Dada la función:

$$y = \cos x$$

a) calcula su integral indefinida.

b) halla la primitiva que pasa por el punto P(0, 3)

c) dibuja la función inicial y la primitiva que se pide en el apartado anterior.

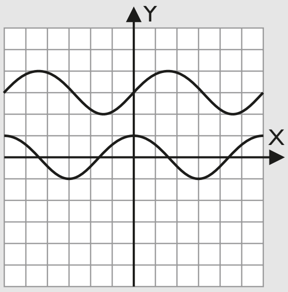
**Solución:**

a) $\int \cos x\, dx = \text{sen } x + k$

b) $\text{sen } 0 + k = 3 \Rightarrow k = 3$

$y = 3 + \text{sen } x$

c)




## 2. Integración por partes

**141.** $\int x\, e^{3x}\, dx$

**Solución:**

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x$$
$$dv = e^{3x}\, dx$$

El resultado es:

$$e^{3x}\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right) + k$$

**142.** $\int (x - 1) \text{ sen } x\, dx$

**Solución:**

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x - 1$$
$$dv = \text{sen } x\, dx$$

El resultado es:

$$(-x + 1) \cos x + \text{sen } x + k$$

**143.** $\int (x - 2) \cos x\, dx$

**Solución:**

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x - 2$$
$$dv = \cos x\, dx$$

El resultado es:

$$(x - 2) \text{ sen } x + \cos x + k$$

**144.** $\int x \text{ L } (x + 5)\, dx$

**Solución:**

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \text{L } (x + 5)$$
$$dv = x\, dx$$

El resultado es:

$$\frac{1}{2}(x^2 - 25) \text{ L } |x + 5| - \frac{x^2}{4} + \frac{5x}{2} + k$$

145. $\int x \text{ arc tg } x \, dx$

**Solución:**

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \text{arc tg } x$$
$$dv = x \, dx$$

El resultado es:

$$\frac{1}{2}(x^2 + 1) \text{ arc tg } x - \frac{x}{2} + k$$

146. $\int x^2 e^{-3x} \, dx$

**Solución:**

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x^2$$
$$dv = e^{-3x} \, dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes.

El resultado es:

$$-\frac{1}{27} e^{-3x}(9x^2 + 6x + 2) + k$$

147. $\int x^4 \, L \, x \, dx$

**Solución:**

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = L \, x$$
$$dv = x^4 \, dx$$

El resultado es:

$$\frac{x^5}{5} L|x| - \frac{x^5}{25} + k$$

148. $\int (x^2 + 3) \text{ sen } x \, dx$

**Solución:**

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x^2 + 3$$
$$dv = \text{sen } x \, dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes.

El resultado es:

$$(x^2 + 1) \cos x + 2x \text{ sen } x + k$$

149. $\int (x^2 - 1) \, L \, x \, dx$

**Solución:**

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = L \, x$$
$$dv = (x^2 - 1)dx$$

El resultado es:

$$\left(\frac{x^3}{3} - x\right) L|x| - \frac{x^3}{9} + x + k$$

150. $\int (x^2 - 1) \cos x \, dx$

**Solución:**

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x^2 - 1$$
$$dv = \cos x \, dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes.

El resultado es:

$$(x^2 - 3) \text{ sen } x + 2x \cos x + k$$

151. $\int (x - 1) e^x \, dx$

**Solución:**

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x - 1$$
$$dv = e^x \, dx$$

El resultado es:

$$e^x(x - 2) + k$$

152. $\int e^{2x} \text{ sen } x \, dx$

**Solución:**

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \text{sen } x$$
$$dv = e^{2x} \, dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes, y planear una ecuación.

El resultado es: $\frac{1}{5} e^{2x}(2 \text{ sen } x - \cos x) + k$

153. $\int L\,(x-1)\,dx$

**Solución:**

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = L\,(x-1)$$
$$dv = dx$$

El resultado es:

$$(x-1)\,L\,|x-1| - x + k$$

154. $\int (x^2-3)\,e^x\,dx$

**Solución:**

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x^2 - 3$$
$$dv = e^x dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes.

El resultado es:

$$e^x(x^2 - 2x - 1) + k$$

155. $\int e^{-x}\cos x\,dx$

**Solución:**

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \cos x$$
$$dv = e^{-x}\,dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes, y plantear una ecuación.

El resultado es:

$$\frac{1}{2}\,e^{-x}(\operatorname{sen} x - \cos x) + k$$

156. $\int \operatorname{arc\,tg} 2x\,dx$

**Solución:**

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \operatorname{arc\,tg} 2x$$
$$dv = dx$$

El resultado es:

$$x\,\operatorname{arc\,tg} 2x - \frac{1}{4}\,L\,|4x^2+1| + k$$

## 3. Integración de funciones racionales con raíces reales en el denominador

157. $\int \frac{x^2+x-2}{x}\,dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales. La descomposición es:

$$x + 1 - \frac{2}{x}$$

La integral es:

$$\frac{x^2}{2} + x - 2\,L\,|x| + k$$

158. $\int \frac{x^2-6x+2}{5-x}\,dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales. La descomposición es:

$$-x + 1 - \frac{3}{5-x}$$

La integral es:

$$-\frac{x^2}{2} + x + 3\,L\,|x-5| + k$$

159. $\int \frac{3x-4}{x^2-4}\,dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples. La descomposición es:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2} + \frac{5}{x+2}\right)$$

La integral es:

$$\frac{1}{2}\,(L\,|x-2| + 5\,L\,|x+2|) + k$$

160. $\int \frac{5x^2-2x-3}{x^3}\,dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales. El denominador tiene una raíz real múltiple. La descomposición es:

$$\frac{5}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}$$

La integral es:

$$5\,L\,|x| + \frac{2}{x} + \frac{3}{2x^2} + k$$

161. $\int \frac{4x - 11}{x^2 - 6x + 9}\,dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{4}{x-3} + \frac{1}{(x-3)^2}$$

La integral es:

$$4\,L\,|x-3| - \frac{1}{x-3} + k$$

162. $\int \frac{-2x^2 + 14x - 31}{x^3 - 9x^2 - 27x + 27}\,dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales. El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$-\frac{2}{x-3} + \frac{2}{(x-3)^2} - \frac{7}{(x-3)^3}$$

La integral es:

$$-2\,L\,|x-3| - \frac{2}{x-3} + \frac{7}{2(x-3)^2} + k$$

163. $\int \frac{2x^2 - 10x + 13}{x - 3}\,dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$2x - 4 + \frac{1}{x-3}$$

La integral es:

$$x^2 - 4x + L\,|x-3| + k$$

164. $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 6x - 2}{x^2 - x}\,dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales. El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$x - 1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x-1}$$

La integral es:

$$\frac{x^2}{2} - x + 2\,L\,|x| + 3\,L\,|x-1| + k$$

165. $\int \frac{11x + 13}{x^2 + x - 6}\,dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$\frac{4}{x+3} + \frac{7}{x-2}$$

La integral es:

$$4\,L\,|x+3| + 7\,L\,|x-2| + k$$

166. $\int \frac{3x - 1}{x^2 + 2x + 1}\,dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{3}{x+1} - \frac{4}{(x+1)^2}$$

La integral es:

$$3\,L\,|x+1| + \frac{4}{x+1} + k$$

167. $\int \frac{3x^2 + 8x + 5}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}\,dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{3}{x+2} - \frac{4}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+2)^3}$$

La integral es:

$$3\,L\,|x+2| + \frac{4}{x+2} - \frac{1}{2(x+2)^2} + k$$

## 4. Integración de funciones racionales con raíces complejas o de varios tipos

168. $\int \frac{2x - 3}{x^2 + 2x + 10}\,dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

Raíces del denominador:

$$x = -1 \pm 3i$$

Son imaginarias simples.

La integral es:

$$L|x^2 + 2x + 10| - \frac{5}{3}\text{ arc tg } \frac{x+1}{3} + k$$

169. $\displaystyle\int \frac{2x^2 + 18x + 25}{x^3 + 3x^2 - 4}\,dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

Raíces del denominador:

$x = 1$ real simple.

$x = -2$ real doble.

La descomposición es:

$$\frac{5}{x-1} - \frac{3}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2}$$

La integral es:

$$5\,L|x-1| - 3\,L|x+2| - \frac{1}{x+2} + k$$

170. $\displaystyle\int \frac{2x^2 + x + 7}{x^3 + 2x^2 + 9x + 18}\,dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

Raíces del denominador:

$x = -2$ real simple.

$x = \pm 3i$ imaginarias simples.

La descomposición es:

$$\frac{1}{x+2} + \frac{x-1}{x^2+9}$$

La integral es:

$$L|x+2| + \frac{1}{2}L|x^2+9| - \frac{1}{3}\text{ arc tg } \frac{x}{3} + k$$

171. $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2 - 4x + 8}\,dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

Raíces del denominador:

$x = 2 \pm 2i$ imaginarias simples.

La integral es:

$$\frac{3}{2}L|x^2 - 4x + 8| + 3\text{ arc tg } \frac{x-2}{2} + k$$

## 5. Integración por cambio de variable o sustitución y de funciones definidas a trozos

172. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\,L\,x}$

**Solución:**

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$Lx = t$$
$$x = e^t$$
$$dx = e^t\,dt$$

Se obtiene:

$$L(L\,x) + k$$

173. $\displaystyle\int \frac{L\,x}{x\,[(L\,x)^2 + 1]}\,dx$

**Solución:**

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$Lx = t$$
$$x = e^t$$
$$dx = e^t\,dt$$

Se obtiene:

$$\frac{1}{2}L[(L\,x)^2 + 1] + k$$

174. $\displaystyle\int \frac{1}{e^x - 3}\,dx$

**Solución:**

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$e^x = t$$
$$x = L\,t$$
$$dx = \frac{dt}{t}$$

Se obtiene:

$$-\frac{x}{3} + \frac{1}{3}L|e^x - 3| + k$$

175. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^x + 5}\,dx$

**Solución:**

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$e^x = t$$
$$x = L\,t$$
$$dx = \frac{dt}{t}$$

Se obtiene:

$$e^x - 5\,L|e^x + 5| + k$$

**176.** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$

**Solución:**

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x-1} = t$$
$$x - 1 = t^2$$
$$x = t^2 + 1$$
$$dx = 2t\,dt$$

Se obtiene:

$$\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x-1} + k$$

**177.** $\displaystyle\int \frac{dx}{2-\sqrt{x-3}}$

**Solución:**

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x-3} = t$$
$$x - 3 = t^2$$
$$x = t^2 + 3$$
$$dx = 2t\,dt$$

Se obtiene:

$$-2\sqrt{x-3} - 4\,L\,|\sqrt{x-3} - 2| + k$$

**178.** $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

**Solución:**

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x} = t$$
$$x = t^2$$
$$dx = 2t\,dt$$

Se obtiene:

$$2\sqrt{x} - 2\,L\,|\sqrt{x} + 1| + k$$

**179.** $\displaystyle\int \frac{dx}{2x-\sqrt{x}}$

**Solución:**

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x} = t$$
$$x = t^2$$
$$dx = 2t\,dt$$

Se obtiene:

$$L\,|2\sqrt{x} - 1| + k$$

**180.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$

**Solución:**

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt[6]{x} = t$$
$$x = t^6$$
$$dx = 6t^5\,dt$$

Se obtiene:

$$2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\,L\,|\sqrt[6]{x} - 1| + k$$

**181.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$

**Solución:**

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt[4]{x} = t$$
$$x = t^4$$
$$dx = 4t^3\,dt$$

Se obtiene:

$$2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\,L\,|\sqrt[4]{x} + 1| + k$$

**182.** Sea $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \le 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Calcula $\displaystyle\int f(x)\,dx$

**Solución:**

$$\begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 1 \\ -x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

**183.** Sea $f(x) = \begin{cases} 2/x & \text{si } x < 0 \\ \cos x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

Calcula $\displaystyle\int f(x)\,dx$

**Solución:**

$$\begin{cases} 2\,L\,|x| & \text{si } x < 0 \\ \text{sen } x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

**184.** Sea $f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{si } x \le 1 \\ e^{x/2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Calcula $\displaystyle\int f(x)\,dx$

**Solución:**

$$\begin{cases} -1/x & \text{si } x \le 1 \\ 2e^{x/2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

## 6. Integración de funciones trigonométricas

**185.** $\int \text{sen } x \cos^2 x \, dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el sen x

La integral es:

$$-\frac{1}{3}\cos^3 x + k$$

**186.** $\int \text{sen } x \cos^3 x \, dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el sen x y en el cos x

La integral es:

$$-\frac{1}{4}\cos^4 x + k$$

**187.** $\int \text{sen } x \cos^4 x \, dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el sen x

La integral es:

$$-\frac{1}{5}\cos^5 x + k$$

**188.** $\int \text{sen}^2 x \cos^3 x \, dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el cos x

La integral es:

$$\frac{\text{sen } x}{5}\left(-\cos^4 x + \frac{\cos^2 x}{3} + \frac{2}{3}\right) + k$$

**189.** $\int \text{tg}^2 x \, dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas. Es par en el sen x y en el cos x

La integral es: $(-x + \text{tg } x) + k$

**190.** $\int \cos^4 x \, dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es par en el cos x

La integral es:

$$\frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2} + \text{sen } x \cos x\left(\cos^2 x + \frac{3}{2}\right)\right] + k$$

**191.** $\int \text{sen } 4x \cos x \, dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se transforma el producto en suma o resta.

La integral es:

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 5x}{5} - \frac{\cos 3x}{3}\right) + k$$

**192.** $\int \text{sen } 5x \text{ sen } 3x \, dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se transforma el producto en suma o resta.

La integral es:

$$\frac{1}{4}\left(-\frac{\text{sen } 8x}{4} + \text{sen } 2x\right) + k$$

**193.** $\int \cos 6x \cos 4x \, dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se transforma el producto en suma o resta.

La integral es:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\text{sen } 10x}{5} + \text{sen } 2x\right) + k$$

**194.** $\int \sqrt{9 - x^2} \, dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = 3 \text{ sen } t$$
$$dx = 3 \cos t\, dt$$

La integral es:

$$\frac{1}{2}\left(9 \text{ arc sen } \frac{x}{3} + x\sqrt{9 - x^2}\right) + k$$

**195.** $\int \sqrt{25 - x^2}\, dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = 5 \text{ sen } t$$
$$dx = 5 \cos t\, dt$$

La integral es:

$$\frac{1}{2}\left(25 \text{ arc sen } \frac{x}{5} + x\sqrt{25 - x^2}\right) + k$$

**196.** $\int \sqrt{3 - x^2}\, dx$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = \sqrt{3} \text{ sen } t$$
$$dx = \sqrt{3} \cos t\, dt$$

La integral es:

$$\frac{1}{2}\left(3 \text{ arc sen } \frac{\sqrt{3}}{3}x + x\sqrt{3 - x^2}\right) + k$$

**197.** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 + x^2}}$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = 2 \text{ tg } t$$
$$dx = 2 \sec^2 t\, dt$$

La integral es:

$$-\frac{\sqrt{4 + x^2}}{4x} + k$$

**198.** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{25 + x^2}}$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = 5 \text{ tg } t$$
$$dx = 5 \sec^2 t\, dt$$

La integral es:

$$-\frac{\sqrt{25 + x^2}}{25x}$$

## Para ampliar

**199.** Calcula tres primitivas de la función:

$$y = x$$

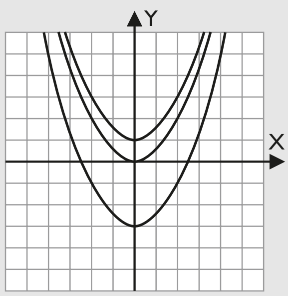
Represéntalas. ¿En qué se parecen?

**Solución:**

$y = \frac{x^2}{2}$

$y = \frac{x^2}{2} + 1$

$y = \frac{x^2}{2} - 3$




Todas las curvas tienen en común que son traslaciones verticales de la integral sin constante.

**200.** Dada la función:

$$y = -x + 1$$

a) calcula su integral indefinida:

b) halla la primitiva que pasa por el punto P(4, – 1)

c) dibuja la función inicial y la primitiva que se pide en el apartado anterior.

**Solución:**

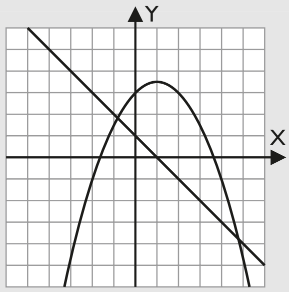
a) $\int (-x + 1)\, dx = -\frac{x^2}{2} + x + k$

b) $-\frac{4^2}{2} + 4 + k = -1$

$k = 3$

$y = -\frac{x^2}{2} + x + 3$

c)




**201.** Halla la integral de la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 2 \\ x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

**Solución:**

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} x + k & \text{si } x < -2 \\ x^2/2 + k & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

**202.** Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x}$$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales. La descomposición es:

$$x + 3 + \frac{1}{x}$$

La integral es:

$$\frac{x^2}{2} + 3x + L\,|x| + k$$

**203.** Calcula la integral de la función:

$$f(x) = x^3 - 4x$$

**Solución:**

Es la integral de un polinomio.

$$\frac{x^4}{4} - 2x^2 + k$$

**204.** Calcula la integral indefinida:

$$\int \frac{1}{1 + e^x}\,dx$$

**Solución:**

Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.

$$e^x = t \Rightarrow x = L\,t$$

$$dx = \frac{dt}{t}$$

La integral es:

$$x - L\,|e^x + 1| + k$$

**205.** Calcula la integral de la función:

$$f(x) = x\,L\,x$$

**Solución:**

Se calcula por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = L\,x$$

$$dv = x\,dx$$

El resultado es:

$$\frac{x^2}{2}\left(L\,|x| - \frac{1}{2}\right) + k$$

**206.** Calcula la integral de la función:

$$y = e^{x+2}$$

**Solución:**

Es la integral de una función exponencial.

$$e^{x+2} + k$$

**207.** Calcula la integral de la función:

$$f(x) = (1 + x)\,e^x$$

**Solución:**

Se calcula por partes. Se hacen los cambios:

$$u = 1 + x$$

$$dv = e^x\,dx$$

El resultado es:

$$xe^x + k$$

**208.** Calcula:

$$\int \frac{2x^3 - x^2 - 12x - 3}{x^2 - x - 6}\,dx$$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$2x + 1 + \frac{1}{5}\left(\frac{6}{x-3} - \frac{1}{x+2}\right)$$

La integral es:

$$x^2 + x + \frac{6}{5}\,L\,|x - 3| - \frac{1}{5}\,L\,|x + 2| + k$$

**209.** Halla una función f(x) sabiendo que:

$$f'(x) = x^2e^x$$

**Solución:**

Se calcula por partes; hay que aplicar dos veces el método. La primera vez se hacen los cambios:

$$u = x^2$$

$$dv = e^x\,dx$$

El resultado es:

$$e^x(x^2 - 2x + 2) + k$$

**210.** Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \sqrt{x-1}$$

**Solución:**

Se aplica la integral de una función irracional.

$$\frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1} + k$$

**211.** Calcula:

$$\int x^3 e^{x^2}\,dx$$

**Solución:**

Se calcula por partes; tiene que aplicarse dos veces el método:

La primera vez se hacen los cambios:

$$u = x^2$$
$$dv = x\,e^{x^2}$$

El resultado es:

$$\frac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1) + k$$

**212.** Calcula:

$$\int \frac{x\,dx}{e^{x^2}}\,dx$$

**Solución:**

Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.

$$e^{x^2} = t \Rightarrow 2x\,e^{x^2}\,dx = dt$$

$$x\,dx = \frac{dt}{2t}$$

La integral es:

$$-\frac{1}{2}e^{-x^2} + k$$

**213.** Calcula una primitiva de la función:

$$y = \frac{1}{1-x^2}$$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right)$$

La integral es:

$$\frac{1}{2}\big(L\,|x+1| - L\,|x-1|\big) + k$$

**214.** Calcula una primitiva de la función:

$$y = \sqrt{x}$$

**Solución:**

Es la integral de una función irracional.

$$\frac{2}{3}x\sqrt{x} + k$$

## Problemas

**215.** Calcula tres primitivas de la función:

$$y = -x$$

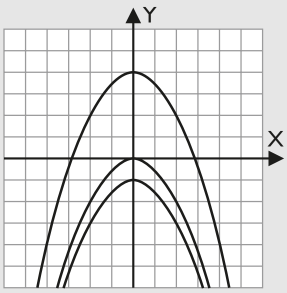
Represéntalas. ¿En qué se parecen?

**Solución:**

$$y = -\frac{x^2}{2}$$

$$y = -\frac{x^2}{2} + 3$$

$$y = -\frac{x^2}{2} - 1$$




Todas las curvas tienen en común que son traslaciones verticales de la integral sin constante.

**216.** Dada la función: $y = e^x$

a) calcula su integral indefinida.

b) halla la primitiva que pasa por el punto P(1, 1)

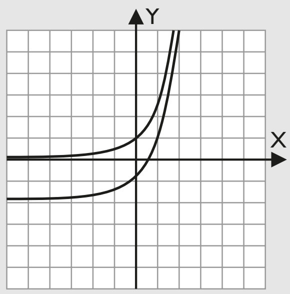
c) dibuja la función inicial y la primitiva que se pide en el apartado anterior.

**Solución:**

a) $\int e^x\,dx = e^x + k$

b) $e^1 + k = 1 \Rightarrow k = 1 - e \Rightarrow y = e^x + 1 - e$

c)



**217.** Halla la integral de la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \le 1 \\ e^x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

**Solución:**

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} -x^2/2 + k & \text{si } x \le 1 \\ e^x + k & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

**218.** Calcula:

$$\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1 - e^x}}$$

**Solución:**

Es la integral de una función irracional.

$$-2\sqrt{1 - e^x} + k$$

**219.** Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{1}{1 - e^x}$$

mediante un cambio de variable.

**Solución:**

Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.

$$e^x = t \Rightarrow x = L\,t$$

$$dx = \frac{dt}{t}$$

La integral es:

$$x - L\,|e^x - 1| + k$$

**220.** Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{2x}{x - 1}$$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$2 + \frac{2}{x - 1}$$

La integral es:

$$2x + 2\,L\,|x - 1| + k$$

**221.** Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

**Solución:**

Es la integral de una función logarítmica.

$$\frac{1}{2}\,L\,|x^2 + 1| + k$$

**222.** Calcula $\int \frac{1}{x + 1}\,dx$

**Solución:**

Es la integral de una función logarítmica.

$$L\,|x + 1| + k$$

**223.** Calcula la integral de la función:

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$$

**Solución:**

Es la integral de un polinomio.

$$\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{x^3}{3} + 3x^2 + k$$

**224.** Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x}$$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$x - 3 + \frac{2}{x}$$

La integral es:

$$\frac{x^2}{2} - 3x + 2\,L\,|x| + k$$

**225.** Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{4x^2 + 3x - 9}{x + 2}$$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$4x - 5 + \frac{1}{x + 2}$$

La integral es:

$$2x^2 - 5x + L\,|x + 2| + k$$

**226.** Calcula:

$$\int \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 1}\,dx$$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$1 + \frac{2}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}$$

La integral es:

$$x + 2\,L\,|x - 1| - L\,|x + 1| + k$$

**227.** Calcula:

$$\int (x^2 + 5)\, e^{-x}\, dx$$

**Solución:**

Se calcula por partes, hay que aplicar dos veces el método.

La primera vez se hacen los cambios:

$$u = x^2 + 5$$

$$dv = e^{-x}\, dx$$

El resultado es:

$$-e^{-x}(x^2 + 2x + 7) + k$$

**228.** Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{16}{(x + 1)^2}$$

**Solución:**

Es la integral de una función racional.

$$-\frac{16}{x + 1} + k$$

**229.** Calcula la integral de la función:

$$y = e^{-x}$$

**Solución:**

Es la integral de una función exponencial.

$$-e^{-x} + k$$

**230.** Calcula la integral de la función:

$$f(x) = xe^{2x}$$

**Solución:**

Se calcula por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x$$

$$dv = 2e^{2x}\, dx$$

El resultado es:

$$\frac{1}{2} e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + k$$

**231.** Calcula:

$$\int x \cos x^2\, dx$$

**Solución:**

Es la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen} x^2 + k$$

**232.** Sea la integral:

$$\int e^{2x} \operatorname{sen} e^x\, dx$$

a) Intégrala mediante el cambio $t = e^x$

b) Calcula la constante de integración para que la función integral pase por el origen de coordenadas.

**Solución:**

a) Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.

$$e^x = t \Rightarrow x = L\, t$$

$$e^{2x} = t^2$$

$$dx = \frac{dt}{t}$$

Luego hay que hacerla por partes.

La integral es:

$$-e^x \cos e^x + \operatorname{sen} e^x + k$$

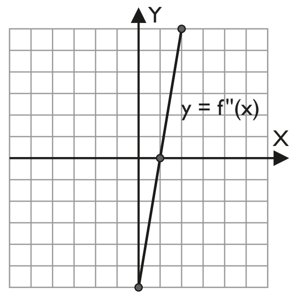
b) Para $x = 0,\ y = 0$

$$-e^0 \cos e^0 + \operatorname{sen} e^0 + k = 0$$

$$-\cos 1 + \operatorname{sen} 1 + k = 0$$

$$k = \cos 1 - \operatorname{sen} 1$$

**233.** La recta que pasa por los puntos (0, –6) y (1, 0) (observa el dibujo) es la gráfica de la función derivada segunda f'' de una cierta función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se sabe que el origen pertenece a la curva y = f(x) y que en ese punto la recta tangente tienen pendiente igual a 3. Determina una expresión de la función f




**Solución:**

$f''(x) = 6x - 6$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + k_1$

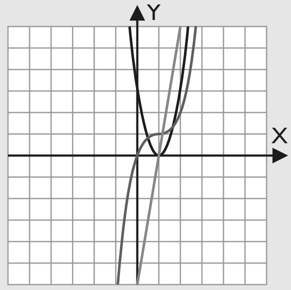
$f'(0) = 3 \Rightarrow k_1 = 3$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + k_2$

$f(0) = 0 \Rightarrow k_2 = 0$

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$



**234.** Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{x^4 + x + 1}{x^2 + x}$$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$x^2 - x + 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

La integral es:

$$\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + L\,|x| - L\,|x + 1| + k$$

**235.** Calcula:

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 2}\,dx$$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$1 + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}$$

La integral es:

$$x + L\,|x - 2| - L\,|x + 1| + k$$

**236.** Calcula la integral de la función:

$$y = \frac{x^2}{x^3 - 2}$$

**Solución:**

Es la integral de una función logarítmica.

$$\frac{1}{3}\,L\,|x^3 - 2| + k$$

**237.** Calcula la integral de la función:

$$y = \frac{1}{x^2 + 2}$$

**Solución:**

Es la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{arc tg}\,\frac{\sqrt{2}}{2}x + k$$

**238.** Calcula la integral de la función:

$$f(x) = (x + 1)e^{2x}$$

**Solución:**

Se calcula por partes. Se hacen los cambios:

$$u = x + 1$$

$$dv = e^{2x}\,dx$$

El resultado es:

$$\frac{1}{2}e^{2x}\left(x + \frac{1}{2}\right) + k$$

**239.** Calcula:

$$\int x\,\text{sen}\,x\,\cos x\,dx$$

**Solución:**

Se llama I a la integral buscada.

Se aplica la integración por partes.

$$u = x\,\text{sen}\,x$$

$$dv = \cos x\,dx$$

Se obtiene la siguiente ecuación:

$$I = x\,\text{sen}^2\,x - \int \text{sen}^2\,x - I$$

Se resuelve la integral trigonométrica que es par en el seno.

$$\int \text{sen}^2\,x = \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\,\text{sen}\,2x$$

Queda:

$$2I = x\,\text{sen}^2\,x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\,\text{sen}\,2x + k$$

$$I = \frac{x\,\text{sen}^2\,x}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\,\text{sen}\,2x + k$$

**240.** Calcula:

$$\int \frac{e^{3x}}{2 + e^x}\,dx$$

**Solución:**

Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.

$$e^x = t \Rightarrow x = L\,t$$

$$e^{3x} = t^3$$

$$dx = \frac{dt}{t}$$

La integral es:

$$\frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x + 4\,L\,|e^x + 2| + k$$

**241.** Calcula una primitiva de la función:

$$f(x) = x\ L\ (1 + x^2)$$

**Solución:**

Se calcula por partes. Se hacen los cambios:

$$u = L\ (1 + x^2)$$
$$dv = x\ dx$$

El resultado es:

$$\frac{1}{2}\left[(x^2 + 1)\ L\ |x^2 + 1| - x^2\right] + k$$

**242.** Calcula:

$$\int x\sqrt{1 + x^2}\ dx$$

**Solución:**

Se aplica la integral de una función irracional.

$$\frac{1}{3}(x^2 + 1)\sqrt{1 + x^2} + k$$

## Para profundizar

**243.** Calcula tres primitivas de la función:

$$y = e^x$$

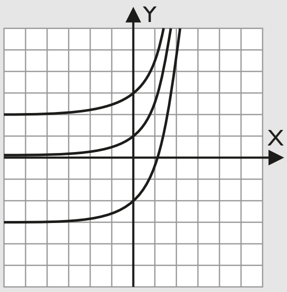
Represéntalas. ¿En qué se parecen?

**Solución:**

$y = e^x$

$y = e^x + 2$

$y = e^x - 3$




Todas las curvas tienen en común que son traslaciones verticales de la integral sin constante.

**244.** Dada la función:

$$y = \text{sen } x$$

a) calcula su integral indefinida.
b) halla la primitiva que pasa por el punto $P(\pi, 3)$
c) dibuja la función inicial y la primitiva que se pide en el apartado anterior.

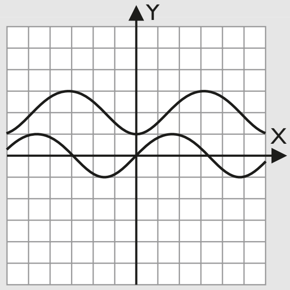
**Solución:**

a) $\int \text{sen } x\ dx = -\cos x + k$

b) $-\cos \pi + k = 3 \Rightarrow k = 2$

$y = -\cos x + 2$

c)




**245.** Halla la integral de la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & \text{si } x \le -1 \\ e^x & \text{si } -1 < x < 2 \\ \cos x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

**Solución:**

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} -\cos x & \text{si } x \le -1 \\ e^x & \text{si } -1 < x < 2 \\ \text{sen } x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

**246.** Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$$

**Solución:**

Es la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\ \text{arc tg}\ \frac{\sqrt{3}}{3}x + k$$

**247.** Calcula la integral de la función:

$$f(x) = xe^{-x}$$

**Solución:**

Se calcula por partes. Se hacen los cambios:

$$u = x$$
$$dv = e^{-x}\ dx$$

El resultado es: $-e^{-x}(x + 1) + k$

**248.** Calcula la integral de la función:

$$y = \frac{2x + 2}{1 - x}$$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$-2 - \frac{4}{x - 1}$$

La integral es:

$$-2x - 4\ L\ |x - 1| + k$$

**249.** Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{1}{x - 1}$$

**Solución:**

Es la integral de una función logarítmica.

$$L\,|x - 1| + k$$

**250.** Calcula:

$$\int x^2\, L\, x\, dx$$

donde L x denota el logaritmo neperiano de un número positivo **x**

**Solución:**

Se calcula por partes. Se hacen los cambios:

$$u = L\,x$$

$$dv = x^2\, dx$$

El resultado es:

$$\frac{x^3}{3}\left(L\,|x| - \frac{1}{3}\right) + k$$

**251.** Calcula la integral de la función:

$$f(x) = 2 + x - x^2$$

**Solución:**

Es la integral de un polinomio.

$$-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + k$$

**252.** Halla una función f(x) sabiendo que:

$$f'(x) = x^2 e^x$$

**Solución:**

Se calcula por partes; hay que aplicar dos veces el método. La primera vez se hacen los cambios:

$$u = x^2$$

$$dv = e^x\, dx$$

El resultado es:

$$e^x(x^2 - 2x + 2) + k$$

**253.** Calcula:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 3}$$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x + 3}\right)$$

La integral es:

$$\frac{1}{2}(L\,|x + 1| - L\,|x + 3|) + k$$

**254.** Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \operatorname{sen} \sqrt{x}$$

Usa el cambio de variable $\sqrt{x} = t$

**Solución:**

Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.

$$\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$$

Luego hay que hacerla por partes.

La integral es:

$$2\operatorname{sen} \sqrt{x} - 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + k$$

**255.** Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

**Solución:**

Es la integral de una función racional.

$$-\frac{1}{x} + k$$

**256.** Haciendo el cambio de variable $e^x = t$, calcula:

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} - 1}$$

**Solución:**

Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.

$$e^x = t \Rightarrow x = L\,t$$

$$e^{2x} = t^2$$

$$dx = \frac{dt}{t}$$

La integral es:

$$\frac{1}{2}(L\,|e^x - 1| - L\,|e^x + 1| + k$$

**257.** Calcula:

$$f(x) = \int \frac{x^3 - 2x + 3}{x - x^2}\, dx$$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$-x - 1 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x - 1}$$

La integral es:

$$-\frac{1}{2}x^2 - x + 3\,L\,|x| - 2\,L\,|x - 1| + k$$

**258.** Calcula la integral de la función:

$$f(x) = x\sqrt{5 - x^2}$$

**Solución:**

Se aplica la integral de una función irracional.

$$-\frac{1}{3}(5 - x^2)\sqrt{5 - x^2} + k$$

**259.** Calcula una primitiva de la función:

$$y = \operatorname{tg} x$$

**Solución:**

Es la integral de una función trigonométrica.

$$-\,L\,|\cos x| + k$$

**260.** Calcula:

$$\int x^3 e^{x^2}\,dx$$

**Solución:**

Se calcula por partes; hay que aplicar dos veces el método.

La primera vez se hacen los cambios:

$$u = x^2$$

$$dv = xe^{x^2}\,dx$$

El resultado es:

$$\frac{1}{2}e^{x^2}(x^2 - 1) + k$$

**261.** Calcula una primitiva de la función:

$$y = \frac{x^2}{4 - x^2}$$

**Solución:**

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$-1 + \frac{1}{x + 2} - \frac{1}{x - 2}$$

La integral es:

$$-x + L\,|x + 2| - L\,|x - 2| + k$$

**262.** Utiliza el cambio de variable L x = t para calcular la integral:

$$\int \frac{1 + L\,x^2 + (L\,x)^2}{x(1 + L\,x)}\,dx$$

**Solución:**

Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.

$$L\,x = t \Rightarrow x = e^t$$

$$dx = e^t\,dt$$

$$I = \int \frac{1 + 2t + t^2}{e^t(1 + t)}\,e^t\,dt = \int \frac{1 + 2t + t^2}{1 + t}\,dt =$$

$$= \int \frac{(1 + t)^2}{1 + t}\,dt = \int (t + 1)\,dt = \frac{1}{2}t^2 + t + k =$$

$$= \frac{1}{2}(L\,x)^2 + L\,x + k$$

**263.** Calcula la integral:

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx$$

**Solución:**

Se aplica la integral de la función racional.

$$I = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx = -\frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x} + k$$

## Paso a paso

**264.** Calcula la siguiente integral indefinida:

$$\int\left(e^{5x} + \cos\frac{x}{3}\right) dx$$

**Solución:**
Resuelto en el libro del alumnado.

**265.** Calcula la integral:

$$F(x) = \int (2x - 5)\, dx$$

Halla la primitiva que pase por el punto P(4, 3).

Representa la primitiva obtenida para comprobar que pasa por dicho punto.

**Solución:**
Resuelto en el libro del alumnado.

**266.** Calcula la integral:

$$\int \cos 2x\, dx$$

Sustituye la constante **k** por los números enteros de –10 a 10. Representa la familia de funciones que obtienes. ¿Qué observas en las gráficas?

**Solución:**
Resuelto en el libro del alumnado.

**267.** Calcula la integral:

$$\int \frac{3x^2 - 11x + 15}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}\, dx$$

y haz la descomposición en fracciones simples del integrando.

**Solución:**
Resuelto en el libro del alumnado.

**268.** **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

## Practica

**269.** $\int x \cos x\, dx$

**Solución:**

Ejercicio 269

$$\int x\cdot\cos(x)\, dx \Rightarrow \cos(x) + x\cdot\text{sen}(x)$$

**270.** $\int L\, x\, dx$

**Solución:**

Ejercicio 270

$$\int \ln x\, dx \Rightarrow x\cdot\ln(x) - x$$

**271.** $\int x^2 e^x\, dx$

**Solución:**

Ejercicio 271

$$\int x^2\cdot e^x\, dx \Rightarrow (x^2 - 2\cdot x + 2)\cdot e^x$$

**272.** $\int e^x \text{ sen } x\, dx$

**Solución:**

Ejercicio 272

$$\int e^x\cdot\text{sen}(x)\, dx \Rightarrow \frac{e^x\cdot\text{sen}(x)}{2} - \frac{e^x\cdot\cos(x)}{2}$$

En los siguientes ejercicios haz la descomposición en fracciones simples del integrando y calcula la integral.

**273.** $\int \frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}\,dx$

**Solución:**

Ejercicio 273

$\int \frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}\,dx \rightarrow \ln(|x^2+1|)+3\cdot x$

$\text{fracciones\_simples}\left(\frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}\right) \rightarrow \{\{3,1\},\{2\cdot x, x^2+1\}\}$

**274.** $\int \frac{12x + 1}{x^2 + x - 6}\,dx$

**Solución:**

Ejercicio 274

$\int \frac{12x + 1}{x^2 + x - 6}\,dx \rightarrow 7\cdot\ln(|-x-3|)+5\cdot\ln(|x-2|)$

$\text{fracciones\_simples}\left(\frac{12x + 1}{x^2 + x - 6}\right) \rightarrow \{\{5,x-2\},\{7,x+3\}\}$

**275.** $\int \frac{3x + 5}{x^2 - 4x + 13}\,dx$

**Solución:**

Ejercicio 275

$\int \frac{3x + 5}{x^2 - 4x + 13}\,dx \rightarrow \frac{3\cdot\ln(|x^2-4\cdot x+13|)}{2} + \frac{11\cdot\text{atan}\left(\frac{x}{3}-\frac{2}{3}\right)}{3}$

$\text{fracciones\_simples}\left(\frac{3x + 5}{x^2 - 4x + 13}\right) \rightarrow \{\{3\cdot x+5, x^2-4\cdot x+13\}\}$

**276.** $\int \frac{5x^2 - 21x + 12}{x^3 - 7x^2 + 11x - 5}\,dx$

**Solución:**

Ejercicio 276

$\int \frac{5x^2 - 21x + 12}{x^3 - 7x^2 + 11x - 5}\,dx \rightarrow 3\cdot\ln(|-x+1|)+2\cdot\ln(|x-5|)+\frac{-1}{x-1}$

$\text{fracciones\_simples}\left(\frac{5x^2 - 21x + 12}{x^3 - 7x^2 + 11x - 5}\right) \rightarrow \{\{2,x-5\},\{1,x^2-2\cdot x+1\},\{3,x-1\}\}$

**277.** $\int \frac{5x^2 - 4x + 3}{x^3 - 2x^2 + x - 2}\,dx$

**Solución:**

Ejercicio 277

$\int \frac{5x^2 - 4x + 3}{x^3 - 2x^2 + x - 2}\,dx \rightarrow 3\cdot\ln(|x-2|)+\ln(|x^2+1|)$

$\text{fracciones\_simples}\left(\frac{5x^2 - 21x + 12}{x^3 - 7x^2 + 11x - 5}\right) \rightarrow \{\{2,x-5\},\{1,x^2-2\cdot x+1\},\{3,x-1\}\}$

**278.** $\int \frac{1}{(x^2 - x)(x - 1)}\,dx$

**Solución:**

Ejercicio 278

$\int \frac{1}{(x^2 - x)\cdot(x - 1)}\,dx \rightarrow \ln(|x|)-\ln(|-x+1|)-\frac{1}{x-1}$

$\text{fracciones\_simples}\left(\frac{1}{(x^2 - x)\cdot(x - 1)}\right) \rightarrow \{\{1,x\},\{1,x^2-2\cdot x+1\},\{-1,x-1\}\}$

**279.** $\int \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}\,dx$

**Solución:**

Ejercicio 279

$\int \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}\,dx \rightarrow -\frac{\ln(|x^2+1|)}{2}+\text{atan}(x)+\frac{x^2}{2}$

$\text{fracciones\_simples}\left(\frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}\right) \rightarrow \{\{x,1\},\{-x+1,x^2+1\}\}$

Calcula las siguientes integrales:

**280.** $\int \frac{L\,x}{x}\,dx$

**Solución:**

Ejercicio 280

$\int \frac{\ln x}{x}\,dx \rightarrow \frac{\ln(x)^2}{2}$

**281.** $\int \frac{6}{e^x + 3}\,dx$

**Solución:**

Ejercicio 281

$\int \frac{6}{e^x + 3}\,dx \rightarrow 2\cdot\ln(|e^x|)-2\cdot\ln(|e^x+3|)$

**282.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$

**Solución:**

Ejercicio 282

$$\int \frac{1}{x\cdot\sqrt{x+1}}\,dx \rightarrow \ln(|-\sqrt{x+1}+1|)-\ln(|\sqrt{x+1}+1|)$$

**283.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$

**Solución:**

Ejercicio 283

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx \rightarrow 6\cdot\ln(|\sqrt[6]{x}-1|)+(2\cdot\sqrt[6]{x}^{3}+3\cdot\sqrt[6]{x}^{2})+6\cdot\sqrt[6]{x}$$

**284.** $\int |x|\,dx$

**Solución:**

Ejercicio 284

$$\int |x|\,dx \rightarrow \frac{x\cdot|x|}{2}$$

**285.** $\int \text{sen}^2\,x\cos x\,dx$

**Solución:**

Ejercicio 285

$$\int (\text{sen}\,x)^2\cdot\cos(x)\,dx \rightarrow \frac{\text{sen}(x)^3}{3}$$

**286.** $\int \cos^3 x\,dx$

**Solución:**

Ejercicio 286

$$\int (\cos x)^3\,dx \rightarrow -\frac{\text{sen}(x)^3}{3}+\text{sen}(x)$$

**287.** $\int \cos^2 x\,dx$

**Solución:**

Ejercicio 287

$$\int (\cos(x))^2\,dx \rightarrow \frac{\text{sen}(2\cdot x)}{4}+\frac{x}{2}$$

**288.** $\int \cos 4x\cos 3x\,dx$

**Solución:**

Ejercicio 288

$$\int \cos(4x)\cdot\cos(3x)\,dx \rightarrow \frac{\text{sen}(x)}{2}+\frac{\text{sen}(7\cdot x)}{14}$$

**289.** $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$

**Solución:**

Ejercicio 289

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx \rightarrow \frac{x\cdot\sqrt{-x^2+4}}{2}+2\cdot\text{asen}\left(\frac{x}{2}\right)$$

**290.** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9+x^2}}$

**Solución:**

Ejercicio 290

$$\int \frac{1}{x^2\cdot\sqrt{9+x^2}}\,dx \rightarrow \frac{-1\cdot\sqrt{x^2+9}}{9\cdot x}$$

**291.** $\int x^3\,L\,x\,dx$

**Solución:**

Ejercicio 291

$$\int x^3\cdot\ln(x)\,dx \rightarrow \frac{x^4\cdot\ln(x)}{4}-\frac{x^4}{16}$$

**292.** $\int \frac{L\,x}{x^2}\,dx$

**Solución:**

Ejercicio 292

$\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx \Rightarrow -\frac{\ln(x)}{x}-\frac{1}{x}$

**293.** $\int e^{-x}(x^2+1)\,dx$

**Solución:**

Ejercicio 293

$\int e^{-x}\cdot(x^2+1)\,dx \Rightarrow (-x^2-2\cdot x-3)\cdot e^{-x}$

**294.** $\int \frac{2}{1+\sqrt{x}}\,dx$

**Solución:**

Ejercicio 294

$\int \frac{2}{1+\sqrt{x}}\,dx \Rightarrow -4\cdot\ln(|-\sqrt{x}-1|)+4\cdot\sqrt{x}$

**295.** $\int \frac{L(L\,x)}{x\,L\,x}\,dx$

**Solución:**

Ejercicio 295

$\int \frac{\ln(\ln(x))}{x\cdot\ln(x)}\,dx \Rightarrow \frac{\ln(\ln(x))^2}{2}$

**296.** Calcula la integral:

$$F(x) = \int (3x^2 - 4x - 1)\,dx$$

Halla la primitiva que pase por el punto P(2, 1). Representa la primitiva obtenida para comprobar que pasa por dicho punto.

**Solución:**

Ejercicio 296

$f(x) = 3x^2 - 4x - 1 \Rightarrow x \mapsto 3\cdot x^2-4\cdot x-1$

$F(x) = \int f(x)\,dx \Rightarrow x \mapsto x^3-2\cdot x^2-x$

P = punto(2, 1) ⇒ (2,1)

Sustituimos el punto P(2, 1)

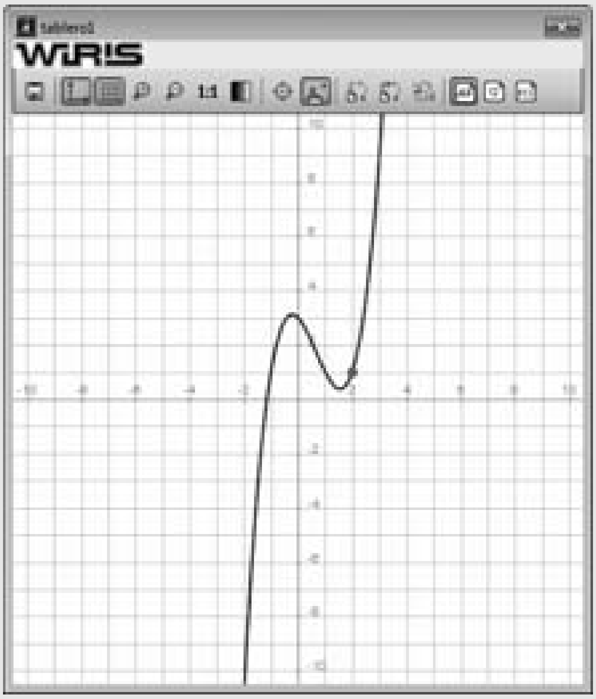
resolver(F(2)+k = 1) ⇒ {{k=3}}

La función es :

$F(x) = F(x) + 3 \Rightarrow x \mapsto x^3-2\cdot x^2-x+3$

dibujar(F(x), {color=azul, anchura_linea=2})

dibujar(P, {color = rojo, tamaño_punto = 8})



**297.** Calcula la integral:

$$\int x \text{ sen } 2x \, dx$$

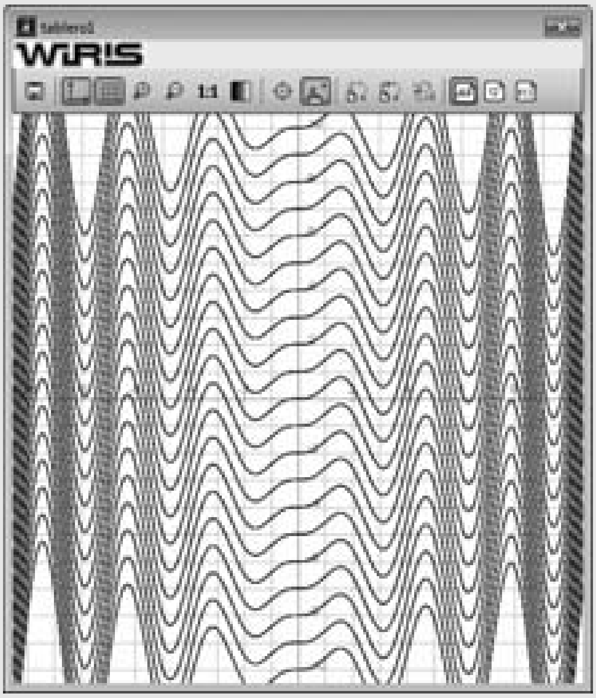
Sustituye la constante **k** por los números: –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4 y 5. Representa la familia de funciones que obtienes. ¿Qué observas en las gráficas?

**Solución:**

Ejercicio 297

$$\int x \cdot \text{sen}(2x)\, dx \rightarrow \frac{\text{sen}(2 \cdot x)}{4} - \frac{x \cdot \cos(2 \cdot x)}{2}$$

$$\text{aplicar\_función}\left(k \mapsto \text{dibujar}\left(\frac{\text{sen}(2 \cdot x)}{4} - \frac{x \cdot \cos(2 \cdot x)}{2} + k\right), -10..10\right)$$



**298.** Calcula la integral:

$$\int \text{sen } 3x \cos 2x \, dx$$

Sustituye la constante **k** por los números: –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4 y 5. Representa la familia de funciones que obtienes. ¿Qué observas en las gráficas?

**Solución:**

Ejercicio 298

$$\int \text{sen}(3x) \cdot \cos(2x)\, dx \rightarrow -\frac{8 \cdot \cos(x)^5}{5} + 2 \cdot \cos(x)^3 - \cos(x)$$

$$\text{aplicar\_función}\left(k \mapsto \text{dibujar}\left(-\frac{8 \cdot \cos(x)^5}{5} + 2 \cdot \cos(x)^3 - \cos(x) + k\right), -10..10\right)$$